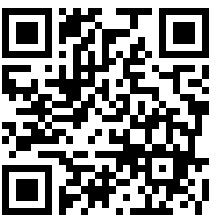
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

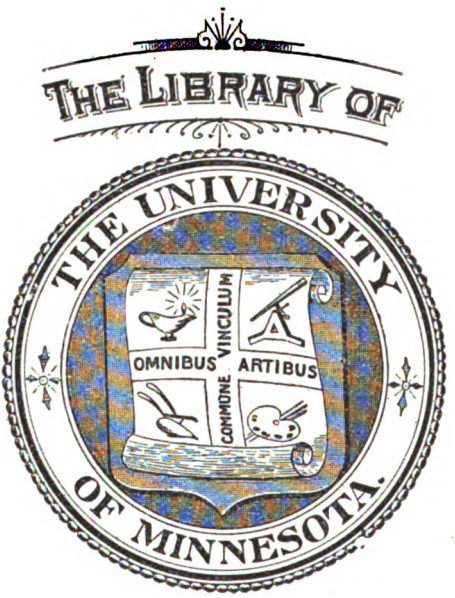
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Digitized by Google



CLASS T506

BOOK K81g

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Geschäftliche Mitteilungen

aus dem Jahre 1910.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1910.

Digitized by Google

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)
in Göttingen.

Digitized by Google

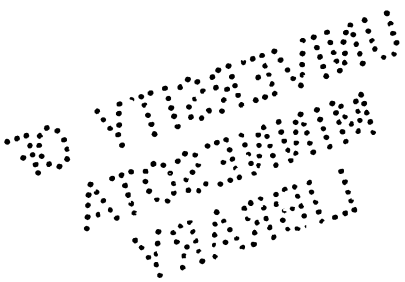
Inhalt.

Bericht des Sekretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1909/1910 S. 1
Verzeichnis der im Jahre 1909/10 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mitteilungen . . . . . „ 5
Bericht über die Wedekindsche Preisstiftung für deutsche Geschichte . . „ 10
Bericht über die Wolfskehl-Stiftung . . . . . „ 13
Bericht über das Samoa-Observatorium 1909/10 . . . . . „ 14
Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken . . . . . „ 17
Bericht über den Thesaurus linguae latinae . . . . . „ 19
Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden . „ 21
Bericht über die ausgesetzten Preisaufgaben . . . . . „ 24
Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Ende März 1910. . . . . „ 25
Benekesche Preisstiftung . . . . . „ 35
Verzeichnis der im Jahre 1909 eingegangenen Druckschriften . . . . . „ 41
E. Riecke, Friedrich Kohlrausch . . . . . „ 71
M. Verworn, Theodor Wilhelm Engelmann . . . . . „ 86
P. Wendland, Die Aufgaben der platonischen Forschung . . . . . „ 96
Adresse zur Säkularfeier der Universität zu Berlin . . . . . „ 115
Bericht über die Wolfskehl-Stiftung . . . . . „ 117
Glückwunschschreiben an Rochus v. Liliencron zum 8. Dezember 1910 . „ 118

JAN 17 1912

100051

Digitized by Google



Digitized by Google

Bericht des Sekretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1909/1910.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften hat während des abgelaufenen Jahres zwei öffentliche und 14 ordentliche Sitzungen gehalten. Ueber den Inhalt der öffentlichen Sitzungen ist in den Geschäftlichen Mitteilungen des Jahres berichtet, der wissenschaftliche Inhalt der ordentlichen Sitzungen ist unten besonders verzeichnet.

Die Nachrichten der mathematisch-physikalischen Klasse sind in 4 Heften (428 S.), die der philologisch-historischen Klasse in 4 Heften (572 S.) und einem Beiheft (179 S.) ausgegeben.

Von den Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse erschienen:

Bd. VI No. 4 Martin Brendel, Theorie der kleinen Planeten. Zweiter Teil. (VI. 192 S.) 1909.

Bd. VII No. 3 Ergebnisse der Arbeiten des Samoa-Observatoriums der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften III. F. Linke, Die Brandungsbewegungen des Erdbodens und ein Versuch ihrer Anwendung in der prakt. Meteorologie. Mit 3 Tafeln. (58 S.) 1909.

Von den Abhandlungen der philologisch-historischen Klasse:

Bd. XI No. 4 F. Frensdorff, Von und über Schlözer. (114 S.) 1909.

Bd. XI No. 5 Hermann Oldenberg, Ṛgveda. Textkritische und exegetische Noten. Erstes bis sechstes Buch. (VIII. 438 S.).

Bd. XII No. 1 G. Körte, Das Volumniergrab bei Perugia. Mit 7 Tafeln und 2 Textabbildungen. (47 S.) 1909.

Bd. XII No. 2 Johannes Hertel, Tantrākhyāyika. Die älteste Fassung der Pañcatantra. Mit 1 Tafel. (186 S.) 1910.

Die Redaktion der Göttingischen Gelehrten Anzeigen übernahm Herr Dr. J. Joachim; die Anzeigen sind in gewohnter Weise fortgeführt worden.

Digitized by Google

Der Tauschverkehr erfuhr dadurch eine Erweiterung, daß in ihn eingetreten sind Gesellschaften und Anstalten in Barcelona, Bergedorf, Charkow, Concarneau, Gent, Lausanne, Urbana. Er umfaßt jetzt 389 Stellen. Ueber die der Gesellschaft im Tausch und sonst zugegangenen Schriften giebt das weiterhin abgedruckte Verzeichnis Auskunft. Es dient zugleich als Empfangsbescheinigung, wo solche nicht besonders gegeben ist.

Mit der Zustimmung der Frau Geheimrat Althoff schenkte Herr Bildhauer Seeböck in Rom der Gesellschaft eine Marmorbüste Althoffs. Dafür wird auch hier verbindlichst gedankt.

Die Gesellschaft bewilligte zur Unterstützung wissenschaftlicher Arbeiten:

Herrn Professor Dr. Hertel in Jena zur Weiterführung seiner experimentellen Studien über die physiologischen Wirkungen des Lichtes	M.	800
Herrn Professor Dr. von Walter in Göttingen für eine Studienreise zum Zwecke einer Ausgabe des Gandulf	„	300
Herrn H. Wagner zur Unterstützung des Druckes eines von Oberleutnant Weiss herauszugebenden ethnographischen Abbildungswerkes	„	500
Herrn Wackernagel für das Septuaginta-Unternehmen	„	2500
Herrn Dr. Pütter in Göttingen als Unterstützung zu einer wissenschaftlichen Reise	„	600
Herrn Bonwetsch für Beschaffung handschriftlichen Materials zur Geschichte der Exegese des alten Testamentes	„	300

Auf der am 28. und 29. Mai 1909 in Wien tagenden Kartellversammlung des Verbandes wissenschaftlicher Körperschaften war die Gesellschaft durch Herrn Wiechert vertreten.

An den Verhandlungen der Kommission für Hirnforschung, die am 29. Mai in Bologna stattfanden, nahm als Vertreter der Gesellschaft Herr Ehlers teil.

In den Sitzungen des Komitees der internationalen Association der gelehrten Körperschaften vertraten Herr Ehlers und Kehr die Gesellschaft.

Die Gesellschaft ließ zum fünfhundertjährigen Jubiläum der Universität Leipzig eine Adresse durch den vorsitzenden Sekretär, an die Universität Cambridge zur Erinnerungsfeier Darwins eine solche durch Herrn Verworn überreichen. Beide Adressen sind in den Geschäftlichen Mitteilungen 1909 H. 2 abgedruckt. — Sie

Digitized by Google

bezeugte ihre Teilnahme an dem hundertjährigen Geburtstage der früheren Sekretäre Henle und Sauppe.

Ueber die wissenschaftliche Ausgabe der Septuaginta, die von der Gesellschaft in Angriff genommen wurde, ist ein ausführlicher Bericht in den Geschäftlichen Mitteilungen 1909 H. 2 erstattet.

Die Verwaltung der Lagarde-Stiftung nahm ungestörten Fortgang. — Die Stiftung der Freunde Lagardes hatte auch in diesem Jahre wieder für reiche Zuwendungen zu danken.

Durch den Tod verlor die Gesellschaft

von Ehrenmitgliedern:

Georg von Neumayer in Neustadt a. d. Hardt am 24. Mai 1909 (Ehrenmitglied seit 1901),

von auswärtigen Mitgliedern:

in der mathematisch-physikalischen Klasse

Friedrich Kohlrausch in Marburg am 17. Januar 1910 (ausw. Mitglied seit 1879, zuvor Assessor seit 1867),

Simon Newcomb zu Washington am 11. Juli 1909 (ausw. Mitglied seit 1907, zuvor korresp. Mitglied seit 1888),

Alexander Agassiz am 27. März 1910 (auswärt. Mitglied seit 1898, zuvor korrespond. Mitglied seit 1879),

in der philologisch-historischen Klasse

M. J. de Goeje zu Leiden am 17. Mai 1909 (auswärtiges Mitglied seit 1888, zuvor korrespond. Mitglied seit 1872),

von korrespondierenden Mitgliedern:

in der mathematisch-physikalischen Klasse

Theodor Wilhelm Engelmann zu Berlin am 20. Mai 1909 (korrespond. Mitglied seit 1884),

Heinrich Limpricht in Greifswald am 13. Mai 1909 (korresp. Mitglied seit 1860, zuvor Assessor seit 1857),

Eduard Pflüger in Bonn am 18. März 1910 (korrespond. Mitglied seit 1872),

in der philologisch-historischen Klasse

Charles Gross zu Cambridge (Mass.) am 3. Dezember 1909 (korrespond. Mitglied seit 1891),

Benedictus Niese zu Halle a. S. am 1. Februar 1910 (korrespond. Mitglied seit 1901),

Max Rieger zu Alsbach a. d. Bergstraße am 10. November 1909 (korrespond. Mitglied seit 1897).

Digitized by Google

In die Reihe der auswärtigen Mitglieder trat mit seiner Uebersiedelung nach Potsdam ein

Karl Schwarzschild, Dr. ph., Professor, Direktor des astrophysikalischen Instituts in Potsdam (zuvor ordentl. Mitglied seit 1907).

Die Gesellschaft wählte zu

ordentlichen Mitgliedern:

in der mathematisch-physikalischen Klasse

Otto Mügge, Dr. Prof. in Göttingen, erwählt am 23. Januar 1909, allerhöchst bestätigt am 29. März 1909,

in der philologisch-historischen Klasse

Karl Brandi, Dr. Prof. in Göttingen, erwählt am 23. Januar 1909, allerhöchst bestätigt am 29. März 1909,

Hermann Oldenberg, Dr. Prof. in Göttingen, erwählt am 22. Mai 1909, allerhöchst bestätigt am 16. Juni 1909 (zuvor korrespond. Mitglied seit 1890),

Paul Wendland, Dr. Prof. in Göttingen, erwählt am 22. Mai 1909, allerhöchst bestätigt am 16. Juni 1909,

zum auswärtigen Mitglied:

in der philologisch-historischen Klasse

Ludwig Wimmer, Dr. Prof. in Kopenhagen, erwählt am 23. Januar 1909, allerhöchst bestätigt am 29. März 1909.

Digitized by Google

Verzeichnis der im Jahre 1909/10 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mitteilungen.

Oeffentliche Sitzung am 1. Mai 1909.

Berichte über das abgelaufene Jahr. — Gedächtnisreden des Herrn Hilbert auf Minkowski, des Herrn Körte auf Aug. Mau, des Herrn Oldenberg auf Th. Benfey. (Geschäftl. Mitteilungen 1909, H. 1).

Ordentliche Sitzung am 8. Mai 1909.

F. Klein legt vor:

Mathematische Encyclopaedie III, 2, H. 4.

Emil Hilb, Neue Entwicklungen über lineare Differentialgleichungen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 230).

Jacob J. Weyrauch, Ueber den Begriff der Deformationsarbeit in der Theorie der Elastizität fester Körper. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 242.

E. Wiechert legt vor: Oskar Venske, Ein Verfahren zur Bestimmung der Inklination vermittels des Induktionsinklinatoriums. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 219).

K. Schwarzschild legt vor: E. Hertzsprung, Ueber neue Mitglieder des Systems β, γ, δ, ε, ζ Ursae minoris. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 235.

N. Bonwetsch, Eine antimonophysitische Schrift. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 123).

E. Schröder, Zur Ueberlieferung des Herbort von Fritzlar. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 92).

Ordentliche Sitzung am 22. Mai 1909.

R. Pietschmann legt Berichte des Herrn L. Borchardt über Ausgrabungen in Aegypten vor.

Digitized by Google

Ordentliche Sitzung am 19. Juni 1909.

F. Klein legt vor: Mathematische Encyclopaedie, III, 2, H. 3.

P. Kehr legt vor: H. von Soden, Sententiae LXXXVII episcoporum; das Protokoll der Synode von Karthago am 1. Septbr. 256. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 247).

N. Bonwetsch legt vor: G. Dietterich, Bericht über neuentdeckte handschriftliche Urkunden zur Geschichte des Gottesdienstes in der nestorianischen Kirche. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 160).

H. Wagner legt vor: O. Tetens, Meteorologische Terminbeobachtungen 1902—4. O. Tetens, Ableitung meteorologischer Mittelwerte für Apia. (Abhandl. math.-phys. Kl. Bd. VII).

Ordentliche Sitzung am 3. Juli 1909.

H. Oldenberg, Zur Geschichte des Śloka. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 219).

E. Wiechert legt vor: Angenheister, Wolkenzug in Samoa. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 363).

Ordentliche Sitzung am 17. Juli 1909.

D. Hilbert legt vor: H. Bohr, Ueber die Summabilität Dirichletscher Reihen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 247).

D. Hilbert: 1) Grundlagen einer Theorie der linearen Integralgleichungen. (6. Mitteilung). — 2) Zur Theorie der konformen Abbildung. — 3) Ueber die Gestalt einer Fläche vierter Ordnung. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 314. 308).

W. Meyer, Die drei arezzaner Hymnen des Hilarius von Poitiers. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 373).

Ordentliche Sitzung am 31. Juli 1909.

E. Schröder kündigt an: Prolegomena zu einer Ausgabe des Helmbrecht (für die Nachrichten, phil.-hist. Kl.).

P. Kehr legt vor: Italia pontificia Vol. IV.

P. Kehr, Nachträge zu den Papsturkunden. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 435).

J. Wackernagel legt vor: F. N. Finck, Die Wanderungen der Polynesier nach dem Zeugnis ihrer Sprachen. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 308).

J. Wackernagel, Akzentstudien. II. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.).

Digitized by Google

F. Frensdorff, Eine Musterung deutscher Historiker aus dem Jahre 1776. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 351).

W. Voigt kündigt an: Untersuchungen über die Intensitätsverhältnisse beim Zeeman-Effekt. I. (für die Nachrichten, math.-phys. Kl.).

E. Riecke legt vor: A. Coehn und U. Raydt, Ueber die quantitative Gültigkeit des Ladungsgesetzes für Dielektrika. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 263).

C. Runge, Ueber die Ortsbestimmung im Ballon. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 289).

F. Klein legt vor: P. Koebe, Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 324).

Oeffentliche Sitzung am 6. November 1909.

G. Berthold las über Organisation und Formwandlung in der Pflanze. (Geschäftl. Mitteilungen 1909, S. 114).

Ordentliche Sitzung am 20. November 1909.

W. Voigt legt vor: R. H. Weber, Ueber asymmetrische und symmetrische Tensoren. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 371).

E. Wiechert legt vor: K. Zoeppritz und L. Geiger, Ueber Erdbebenwellen. III. Berechnung von Weg und Geschwindigkeit der Vorläufer. Die Poissonsche Konstante im Erdinnern. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 400).

F. Leo legt vor: die der Gesellschaft übersandten Schriften des korrespondierenden Mitgliedes C. Conti Rossini — und Weese-Bernoulli, Die Bildnisse Hallers.

H. Oldenberg, Nakṣatra und sieou. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 544).

L. Meyer überreicht im Namen der Verfasserin Meta Benfey: Theodor Benfey 1909.

P. Wendland legt vor: Ernst Hautsch, Der Lukiantext des Oktateuch. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1909, S. 518).

E. Schröder gibt auf Grund vorläufiger Berichte von Prof. Borchling Auskunft über den Stand der Erforschung mittelniederdeutscher Handschriften.

Digitized by Google

Ordentliche Sitzung am 4. Dezember 1909.

Der Vorsitzende gedenkt aus Anlaß des am 9. d. M. fallenden hundertjährigen Geburtstages der Verdienste des letzten ständigen Sekretärs der Gesellschaft H. Sauppe.

F. Leo berichtet über die Oktoberkonferenz der Kommission für den Thesaurus linguae latinae und legt Band IV des Thesaurus vor.

F. Klein legt vor: Mathematische Encyclopaedie Bd. V. 3. H. 2. Bd. VI. 1A. H. 3.

O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium XXII und XXIII. (XXII Nachrichten, math.-phys. Kl. 1909, S. 391. XXIII, 1910, S. 87).

Ordentliche Sitzung am 18. Dezember 1909.

E. Wiechert legt vor: Wiechert und Geiger, Zwei Methoden der Herdbestimmungen bei Erdbeben. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).

H. Wagner legt vor: A. Wolkenhauer, Die Koblenzer Fragmente zweier handschriftlicher Karten von Deutschland aus dem 15. Jahrhundert. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1910, S. 17).

Ordentliche Sitzung am 15. Januar 1910.

E. Schröder, Busbecqs Krimgotisches Vokabular. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1910, S. 1).

F. Leo legt vor: W. Wiederhold, Papsturkunden in Frankreich. V. (Beiheft zu den Nachrichten der phil.-hist. Kl. 1910).

D. Hilbert legt vor: Walter Schnee, Ueber die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1910, S. 1).

Ordentliche Sitzung am 29. Januar 1910.

E. Riecke legt vor: Madelung, Molekulare Eigenschwingungen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1910, S. 43).

G. Körte legt vor: A. J. Evans, Scripta Minoa I.

Ordentliche Sitzung am 12. Februar 1910.

L. Meyer, Etymologische Mitteilungen. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1910, S. 48).

H. Wagner legt vor: O. Tetens und Fr. Linke, Die Regen- und Temperaturverhältnisse von Samoa auf Grund der Beob-

Digitized by Google

achtungen von 34 Stationen. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl., Bd. VII).

Derselbe legt vor: Oberleutnant Weiss, Die Völkerstämme in N. Deutsch-Ostafrika.

E. Wiechert legt vor: Angenheister, Magnetische Beobachtungen in Samoa. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl., Bd. VII).

Ordentliche Sitzung am 26. Februar 1910.

E. Ehlers legt vor: Dr. Bernh. Dürken, Ueber das Verhalten des Nervensystems nach Exstirpation der Extremitätenanlagen beim Frosch. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).

D. Hilbert legt vor:

P. Koebe, Ueber die Hilbertsche Uniformisierungsmethode. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1910, S. 59).

L. Bieberbach, Ueber die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen euclidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1910, S. 75).

O. Haupt, Bemerkung über Oszillationstheoreme. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1910, S. 85).

Robert König, Konforme Abbildungen einer körperlichen Ecke. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).

J. K. Whittemore, Convexe Curven. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).

E. Riecke legt vor: Otto Berg, Ueber den Thomsoneffekt in Kupfer, Platin und Eisen. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).

Ordentliche Sitzung am 12. März 1910.

F. Andreas legt vor: W. Bang, Beiträge zur Erklärung des komanischen Marienhymnus. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1910. S. 61).

F. Leo legt vor: The Oxyrhynchos Papyri VII ed. by A. S. Hunt.

F. Leo, Zur Kydippe des Kallimachos. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1910, S. 56).

F. Andreas legt vor: Lehmann-Haupt, Armenien einst und jetzt.

E. Schwartz legt vor: Nachtrag zum zweiten Heft der griechischen Poliorketiker von R. Schneider.

H. Wagner legt vor: K. Wegener, Die aerologischen Ergebnisse von 1909 am Samoa-Observatorium. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.).

Digitized by Google

Wedekindsche Preisstiftung für deutsche Geschichte.

Von den Arbeiten, die mit Unterstützung der Wedekindstiftung ausgeführt werden, ist eine im abgelaufenen Jahre zu greifbaren Ergebnissen gelangt. Es ist das gelungen ungeachtet der schweren Schicksale, die diese Arbeit in ihrem ganzen Verlaufe und jetzt aufs neue getroffen haben.

Nachdem der frühere Plan, die Herstellung einer Biographie von Friedrich v. Gentz mit den Mitteln der Stiftung zu fördern, nach dem am 17. Mai 1904 erfolgten Tode des Dr. Paul Wittichen aufgegeben und an seine Stelle die Herausgabe von Quellen zur Geschichte Gentzens getreten war, unterzog sich der jüngere Bruder des Verstorbenen, Dr. Friedrich Carl Wittichen der Aufgabe, die gesammelten, vorzugsweise in Briefen von und an Gentz bestehenden, Materialien zu vervollständigen, zu sichten und zu bearbeiten, so daß zu ihrer Veröffentlichung geschritten werden konnte. Da die bisher den Archiven entnommenen Urkunden zum Teil nur exzerpiert waren, wie es für den Zweck der Herstellung einer Biographie genügt hätte, so machte sich eine Ergänzung und Vervollständigung notwendig, seitdem eine Edition von Quellen, von Briefen zum Ziel genommen wurde. Außer den Archivreisen des Dr. Wittichen, über die schon früher berichtet ist, besuchte er im J. 1907 Schweden, wo ihm die Korrespondenz zwischen Gentz und Brinckmann, im Besitz des Grafen Trolle-Wachtmeister auf Trolle-Ljungby, im J. 1908 Oesterreich, wo ihm der Briefwechsel mit Metternich in dem fürstlichen Archive zu Plaß zugänglich wurde. Nachdem der Verwaltungsrat der Wedekindstiftung einen namhaften Zuschuß zu den Druckkosten übernommen hatte, gelang es Dr. Wittichen im Februar 1909 einen Verlagsvertrag über das Werk, wofür der Titel: Briefe von und an Friedrich von Gentz festgestellt wurde, mit der Firma R. Oldenbourg in München abzuschließen. Die Arbeiten waren so weit gefördert, daß bald

Digitized by Google

darauf mit dem Drucke des Buches begonnen wurde. Die zehn ersten Bogen waren uns eben im Reindruck zugegangen, als die Nachricht eintraf, daß den Herausgeber die tückische Krankheit hinweggerafft habe, die in den letzten Jahren so viele Opfer gefordert hat.

Dr. Wittichen starb am 1. Mai 1909 im Hause des Prinzen Friedrich von Sachsen-Meiningen, in dessen Familie er zuerst in Freiburg, dann in Hannover als Erzieher der Söhne gewirkt hatte. Der Prinz und die Prinzessin nannten ihn in der Todesanzeige aber auch den treuen Freund ihrer Familie. Dr. Wittichen war im Begriff, auch in eine öffentliche Lehrstellung einzutreten. Als Privatdozent der Geschichte an der Technischen Hochschule zu Hannover zugelassen, hatte er am 5. März 1909 eben die Antrittsrede gehalten, als seine Erkrankung eintrat. Grade diese Antrittsrede beweist, welchen Verlust die Wissenschaft durch den frühen Heimgang des Redners erlitten hat. Sie behandelte: Gentz und Metternich. Die Rede ist bei aller Schlichtheit ihrer Sprache eine glänzende Leistung, originell, auf eigenen Forschungen aufgebaut, in kraftvoller Darstellung die Persönlichkeiten, die Ereignisse und die Stimmung der Zeiten erfassend [1]).

Dr. Wittichen hatte noch nicht das 31. Lebensjahr vollendet. Die Sorge um seine Arbeit begleitete ihn bis in seine letzten Stunden. Unsere Stiftung, die mit seinen zahlreichen und treuen Freunden um ihn trauert, darf es als ein günstiges Geschick preisen, daß sie zur Fortdauer seines Namens in der Wissenschaft beitragen kann. Er hatte so rüstig geschafft, daß seine Arbeit durch seinen Tod kaum eine Unterbrechung erlitt, nachdem einer seiner Freunde, Dr. Ernst Salzer, Assistent am Geh. Staatsarchiv in Berlin, sich hochherzig bereit erklärt hatte, die weitere Drucklegung des begonnenen Werkes zu übernehmen und in die Stellung des Verstorbenen der Verlagshandlung wie der Wedekindstiftung gegenüber einzutreten. Dadurch ist es gelungen, den ersten Band der Gentzbriefe in der zweiten Hälfte des November 1909, den zweiten Band im April 1910 im Buchhandel erscheinen zu lassen. Die Mutter des Verstorbenen, Frau Pfarrer Wittichen zu Marburg, voll Teilnahme an der Arbeit, der ihre beiden Söhne ihre beste Kraft gewidmet haben, hat bei Lesung der Korrektur geholfen und die Personenregister der beiden Bände zusammengestellt. Der erste Band enthält die Briefe von Gentz an Elisabeth

1) Abgedruckt in den Mitteilungen des Instituts für österreich. Geschichtsforschung Bd. XXXI (Heft 1, Innsbruck 1910) S. 88—111.

Digitized by Google

Graun, eine Jugendfreundin aus der Königsberger Zeit, besser bekannt unter dem Namen ihrer zweiten Ehe, Elisabeth von Stägemann. Außerdem bringt der Band Briefe an den Philosophen Garve, an Karl August Böttiger, den bekannten erst in Weimar, dann in Dresden lebenden Gelehrten, und eine Reihe von Einzelbriefen an verschiedene Adressaten. Ist der Inhalt von Bd. I überwiegend von literarhistorischem Interesse, so kommt die politische Zeitbewegung zur Geltung in Bd. II. Den größten Raum nehmen die Briefe an Karl Gustav von Brinckmann ein, einen kleinern Briefe an und von Adam Müller. Von den viertehalbhundert Briefen der beiden Bände sind einige fünfzig bereits gedruckt, aber größtenteils unvollständig oder inkorrekt, die übrigen ungedruckt. Die Briefe sind nach den Korrespondenten geordnet und jeder Briefgruppe eine Einleitung vorangestellt, die über die Persönlichkeit des Adressaten und ihre Beziehung zu Gentz orientiert. Für den weitern von Dr. Wittichen gesammelten Stoff sind noch zwei Bände des Werkes in Aussicht genommen.

F. Frensdorff,
d. Z. Direktor.

Digitized by Google

Bericht über die Wolfskehl-Stiftung.

Ende April 1909 hat Herr Professor H. Poincaré aus Paris auf Einladung der Kommission der Wolfskehl-Stiftung gegen ein den Zinsen der Stiftung entnommenes Honorar von 2500 M. einen Zyklus von sechs mathematischen Vorträgen in Göttingen gehalten. Ferner hat im Herbst 1909 Herr Schulamtskandidat Wieferich aus Münster i. W. für eine in Crelles Journal erschienene Abhandlung über den Fermatschen Satz aus den Zinsen der Stiftung einen Preis von 1000 M. erhalten.

Hilbert.

Digitized by Google

Bericht über das Samoa-Observatorium 1909/10.

Das Observatorium stand seit 1. Januar 1909 unter Leitung des vierten der von uns hinausgesandten Observatoren, Dr. Kurt Wegener, welcher sie an jenem Tage aus den Händen von Dr. G. Angenheister übernommen hatte. (Vergl. den vorjähr. Bericht.) Es standen ihm zur Seite die schon seit länger am Observatorium beschäftigten Unterbeamten Scholz und Eiffe. Ersterer kündigte seine Stellung zum 31. Mai 1910.

Als wissenschaftlicher Assistent, der zugleich einzelne Geschäfte des Sekretärs am Observatorium zu übernehmen hätte, ward von uns Dr. Max Hammer gewonnen, der soeben seine mathematisch-physikalischen Studien unter Geheimrat Dorn in Halle beendet hatte. Er trat am 9. Juli 1909 in unsere Dienste, um sich im Geophysikalischen Institut unter spezieller Leitung des zurückgekehrten Dr. Angenheister auf die in Samoa zu übernehmenden Aufgaben vorzubereiten. Durch den Wunsch Dr. Hammers, vor der Ausreise auch noch seine Oberlehrerprüfung abzulegen, verzögerte sich diese ein wenig. Am 1. Februar 1910 verließ er Genua und erreichte über Australien und Neuseeland am 7. April Apia, dort das kleinere bisher von Scholz bewohnte Haus auf dem Territorium des Observatoriums beziehend.

Durch den Abgang des Sekretärs Scholz verlor letzteres auch eine in der Mechanik bewanderte Hilfskraft, die an Ort und Stelle schwer wieder zu finden war. Daher ward in dem seit Jahren im Geophysikalischen Institut zu Göttingen beschäftigten Feinmechaniker Paul Liebrecht für Ersatz gesorgt. Er verpflichtete sich für vier Jahre vom 1. August 1910 am Observatorium als Gehülfe tätig zu sein, trat am 1. Juni 1910 in unsere Dienste und verließ mit seiner Frau — es ward Wert darauf gelegt, einen verheirateten Gehülfen in die fragliche Stellung zu bringen — am

Digitized by Google

21. Juni Genua, um wie Dr. Hammer über Australien Apia zu erreichen.

Ueber Dr. Angenheisters Rückreise von Apia, das er am 15. Februar 1909 verließ, über Australien, China, Sibirien ist bereits berichtet worden. Er traf am 22. Mai in Göttingen ein und begann kurz darauf seine regelmäßige Tätigkeit behufs Bearbeitung der mitgebrachten Beobachtungsresultate. Zu diesem Zweck ward in dem von Professor Wiechert gütigst zur Verfügung gestellten Geophysikalischen Institut von neuem ein „Samoa-Büro" errichtet, an dem wie zu Dr. Linkes Zeiten Dr. Rohloff als Assistent und eine Rechnerin ständig beschäftigt wurden.

Dr. K. Wegener hat die regelmäßigen, im Programm vorgesehenen meteorologischen, seismischen und erdmagnetischen Beobachtungen gewissenhaft geleitet und in kurzen Terminen über die Hauptresultate hierher berichtet. Die seismischen Registrierungen sind dann vom geophysikalischen Institut alsbald an die interessierten Kreise versandt worden.

Der Ballonaufstiege und Drachenbeobachtungen hat sich Dr. Wegener in besonderem Maße angenommen und am 12. März 1910 konnte bereits eine längere Abhandlung von ihm „Die aerologischen Ergebnisse von 1909 am Samoa-Observatorium" vorgelegt werden, die im 2. Heft der Nachrichten der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., erschienen ist.

In der Zeit vom 4.—15. Juni und 6.—16. Juli 1909 unternahm Dr. Wegener im eigenen Motorboote und auf seine Kosten Reisen nach Savaii, hauptsächlich um eine bessere Karte der Insel zu entwerfen. Im Maßstab 1 : 100000 eingesandt, ist diese Karte in der Geographischen Anstalt von J. Perthes in Gotha auf 1 : 150000 verkleinert und in Petermanns Geographischen Mitteilungen 1910, Heft IV mit kurzem Text erschienen.

Die meteorologischen Stationen auf Upolu und Savaii sind gleichfalls von ihm inspiziert worden. Auch hat er mehrfach kleinere Aufsätze über das Klima und die Regenverhältnisse Samoas veröffentlicht.

Das bis 1908 vorliegende meteorologische Material über die Inselgruppe (34 Stationen) ist im Sommer 1909 vom neuem durch Dr. O. Tetens und Dr. Fr. Linke von Frankfurt a./M. aus vorgenommen und zu einer größeren Abhandlung betitelt: „Das Klima von Samoa" verarbeitet; dieselbe wird in Verbindung mit zwei kleineren Abhandlungen von Dr. Tetens, nämlich „Meteorologische Terminbeobachtungen in Apia 1902—1904" und „Ableitung klimatologischer Mittelwerte für Apia aus 21jährigen Beobach-

Digitized by Google

tungen“ als Heft IV der „Ergebnisse der Arbeiten des Samoa-Observatoriums der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen“ demnächst erscheinen. Der Abschluß hat sich durch die Uebersiedelung von Dr. Tetens an das Aeronautische Observatorium bei Lindenberg, woselbst ihm eine Observatorstelle zu Teil ward, leider wiederum verzögert. Mit dieser Abhandlung wird dann der erste Band der „Ergebnisse“ abgeschlossen werden.

Als Frucht der erdmagnetischen Beobachtungen in Samoa konnte am 12. Februar eine größere Abhandlung Dr. Angenheisters der Gesellschaft vorgelegt werden, betitelt: „Magnetische Beobachtungen in Samoa“. Sie wird erscheinen zusammen mit Dr. Linkes gleichfalls abgeschlossener Arbeit, die sich im Druck befindet, unter dem Titel: „Die magnetischen Registrierungen der Jahre 1905 bis 1908 in Samoa“.

H. Wagner.

Digitized by Google

Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.

Achter Bericht [1]).

Von

F. Klein.

Seit dem letzten über die Herausgabe erstatteten Bericht hat sich eine Neu-Auflage des VI. Bandes als notwendig erwiesen, da dieser vergriffen war. Da nicht beabsichtigt wurde, eine Neubearbeitung des Bandes herbeizuführen, welche längere Zeit in Anspruch genommen und eine gewisse Incohärenz in die Gesamtausgabe gebracht hätte, so wurde ein anastatischer Neudruck veranstaltet. Dieser Druck hat sich nachträglich als ziemlich schwierig herausgestellt, so daß es sich nicht hat vermeiden lassen, daß er eine Reihe von Reproduktionsfehlern enthält. Durch eine sorgfältige Durchsicht ist indessen erreicht worden, daß sich keine sinnentstellenden Fehler vorfinden, sondern nur solche, die der Leser zweifellos bemerken wird; natürlich konnten auch bei dieser Art der Neuauflage die bereits bekannten Druckfehler der alten Ausgabe nicht verbessert werden; da überhaupt das Prinzip verfolgt wurde, den Neudruck ganz gleich der alten Auflage zu gestalten; so wurde auch kein Druckfehlerverzeichnis hinzugefügt.

Der noch ausstehende X. Band der Gesamtausgabe ist in Vorbereitung und wir dürfen hoffen, in nicht ferner Zeit über seine Fertigstellung berichten zu können, da nach der Unterbrechung, die durch die Uebersiedelung von Herrn Brendel nach Frankfurt

1) Vergl. den siebenten Bericht in den Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen aus dem Jahre 1906, pg. 109—113

Digitized by Google

entstand, die Arbeit nun wieder in vollem Gange ist. Ueber das, was dieser Band bringen wird, ist bereits am Schlusse des vorigen Berichtes (Geschäftliche Mitteilungen für 1906) berichtet worden.

Das Gauß-Archiv hat vor einiger Zeit eine sehr wertvolle Bereicherung dadurch erfahren, daß es in den Besitz von vier noch fehlenden Originalbriefen von Gauß an Wolfgang Bolyai gelangt ist, unter denen sich der wichtige vom 6. März 1832 befindet, der von Johann Bolyai's berühmtem Appendix [1]) handelt und von dem das Archiv eine Abschrift besaß [2]). Die Erwerbung ist den Bemühungen von Herrn P. Stäckel zu danken, auf dessen Veranlassung der bisherige Besitzer, Herr Professor P. Szabó in Budapest diese Briefe, die er erst kürzlich im Nachlasse seines Vaters auffand, dem Archiv schenkte.

Ferner überreichte Herr Stäckel dem Gauß-Archiv:

1 Originalbrief von Gauß an Prof. Strempel, Rektor der Universität Rostock, als Geschenk von Herrn Prof. Staude in Rostock,

3 Originalbriefe von Gauß an den ständigen Sekretär der Petersburger Akademie, P. H. v. Fuß, als Geschenk von Herrn Geheimrat Viktor Fuß in St. Petersburg.

Ueber diese vier letzten Briefe berichtet Herr Stäckel in den Nachrichten der K. Ges. der Wiss., Math.-Phys. Klasse 1907.

Herr Prof. Frischauf in Graz übermittelte dem Archiv einige willkommene Bemerkungen zu Gauß' geodätischen Abhandlungen, sowie einige seiner Veröffentlichungen, welche mit diesen in Beziehung stehen; auch verdanken wir ihm die Berichtigung einiger Druckfehler in Band IV.

Wir bemerken endlich, daß in dem von Herrn C. Schilling (Bremen) unter Mitwirkung von Herrn J. Kramer (Berlin) soeben herausgegebenen zweiten Bande des Werkes: Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke (Berlin, Springer), der Briefwechsel zwischen Gauß und Olbers nunmehr abgeschlossen veröffentlicht vorliegt.

---

1) Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, der von der Lösung des Problems der absoluten Geometrie handelt und als Anhang zu Wolfgang Bolyai's Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae . . . introducendi 1832 zu Maros Vásárhely in Siebenbürgen erschienen ist.

2) Vgl. Briefwechsel zwischen Gauß und Wolfgang Bolyai, herausgegeben von F. Schmidt und P. Stäckel, Seite 171—172.

Digitized by Google

Bericht über den Thesaurus linguae latinae.

Die im vorigen Jahr von der Kommission den Akademien empfohlene Erhöhung der jährlichen Beiträge von 5000 auf 6000 M. ist für unsere Gesellschaft von der K. Staatsregierung bewilligt worden; auch von Wien aus ist die Zusage erfolgt und steht für die übrigen Akademien in Aussicht. Die Kommission ist dadurch in der Lage, auf die Dauer, entsprechend der im letzten Geschäftsjahr getroffenen Einrichtung, eine größere Zahl von Assistenten anzustellen, so daß das Personal auch in diesem Jahre, beide Redaktoren und Sekretäre eingerechnet, aus 17 Mitarbeitern bestanden hat.

Außer der Giesecke-Stiftung hat die Kommission an besonderen Zuwendungen neben den laufenden Beiträgen je 1000 M. von der Berliner und Wiener Akademie erhalten. Dazu hat die preußische Regierung wie früher durch zwei Stipendien zu je 1200 M. und die Beurlaubung eines Oberlehrers, die österreichische gleichfalls durch Beurlaubung eines Gymnasiallehrers, die bayerische durch Fortsetzung des Urlaubes für den Sekretär die Sache des Thesaurus unterstützt. Weiter haben wie bisher die Regierungen von Hamburg, Württemberg und Baden Jahreszuschüsse von 1000, 700, 600 M. geleistet. Die Kommission dankt von neuem im Namen der Akademien allen Regierungen für die unermüdliche Förderung des Werkes lebhaft und aufrichtig.

Die Arbeit hat unter Leitung des Generalredaktors Herrn Prof. Dr. E. Lommatzsch durchaus erfreulichen Fortgang genommen. Band IV ist mit 100 Bogen abgeschlossen und fertig erschienen (1909). Von Band III sind 25 Bogen (bis B. 91) gedruckt worden, im Manuskript ist der Band bis *collacrimo* fertig, d. h. er steht kurz vor dem Abschluß; von Band V sind 13 Bogen gedruckt, das Manuskript fertig bis *dedecus*; vom Eigennamen-Supplement 8 Bogen (bis B. 20), Manuskript bis *Chaldaeus*. Im ganzen sind 61 Bogen hergestellt. Die Vorbereitung von *F* für Band VI

Digitized by Google

ist im Gange, das Zettelmaterial von Band III ist bis *circumustus*, von IV bis *consutio* zurückgeordnet worden. Ueber die Vermehrung des Zettelmaterials ist zu berichten, daß wie bisher die Litteraturexcerpte von Herrn Dr. Klotz in Straßburg, die der Inschriften und Papyri nach dem von der Kommission aufs schmerzlichste empfundenen Tode ihres bewährten Mitarbeiters Prof. Ihm in Halle von Herrn Prof. Diehl in Jena weitergeführt worden sind, ebenso die Verzettelung von Ciceros Reden und Hieronymus' Briefen. Die Excerpte aus Gregorius M. wurden zu Ende, die aus Augustinus (Wiener Corpus) weitergeführt, die Epistulae pontificum und Aponius in Angriff genommen.

Ueber die finanzielle Lage des Unternehmens hat die Kommission nach ihrer Konferenz im Oktober 1909 den Akademien Bericht erstattet.

Digitized by Google

Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden.

Trotz aller in der Sache selbst und in den persönlichen und amtlichen Verhältnissen unserer Mitarbeiter liegenden Schwierigkeiten ist unser Unternehmen unter der Leitung von Prof. Kehr in dem vergangenen Berichtsjahr um ein gutes Stück Weges vorwärtsgekommen.

I. Von der Italia pontificia ist Band IV (Umbria-Picenum-Marsia) im Sommer 1909 erschienen. Ihm ist zugleich ein alphabetisches Verzeichnis der in den Bänden I—IV behandelten Empfänger beigegeben, das den mit dem Stoff weniger Vertrauten die Auffindung der einzelnen Urkunden erleichtern soll. Damit ist zugleich das Material für Mittelitalien abgeschlossen.

Prof. Kehr ist dann sogleich an die Ausarbeitung des V. Bandes, der die Emilia enthalten soll, gegangen. Allerdings sind für dieses Gebiet wie überhaupt für Oberitalien unsere Sammlungen noch nicht überall vollständig. Jene Archive sind die ersten gewesen, welche unsere Mitarbeiter besuchten; sowohl ihre Praxis wie auch ihre Autorität war damals noch nicht derart, daß ihnen alle Archive und alle Fonds, so wie das heute möglich ist, zugänglich gewesen wären. Es sind also in verschiedenen Archiven Oberitaliens noch Revisionen und Ergänzungen nötig. Allein diese werden die Ausgabe der nächsten Bände in keiner Weise hemmen. Für die Emilia hat Prof. Kehr bereits im Herbst 1909 wesentliche Ergänzungen auf einer archivalischen Reise in Modena, Ferrara und Ravenna zusammengebracht, im März 1910 war er in Bologna, während Dr. A. Ruppel im Herbste noch einmal die kleineren Archive der Romagna besuchte. Im kommenden Mai und Juni beabsichtigt Prof. Kehr die Archive von Reggio, Parma und Piacenza zu revidieren. Unterdessen ist der Druck des V. Bandes bereits begonnen worden und wird im Herbst 1910 vollendet werden.

Digitized by Google

Wie früher hat Prof. Kehr die bei diesen und ähnlichen Revisionsarbeiten neu aufgefundenen Urkunden in den Nachrichten der Philologisch-Historischen Klasse herausgegeben. In den Nachträgen zu den Papsturkunden Italiens III bietet er 38 neue Stücke von Alexander II. bis Celestin III., meist aus den Archiven Umbriens, der Marken und der Abruzzen. Die Nachträge IV werden vorzüglich solche aus den Archiven der Emilia enthalten.

II. Der I. Band der von Prof. A. Brackmann in Marburg bearbeiteten Germania pontificia ist im Laufe des vergangenen Jahres zum Abschluß gekommen und befindet sich zur Zeit dieses Berichtes im Druck. Der Band hätte bereits eher abgeschlossen werden können, wenn nicht die Bearbeitung einiger in Privatarchiven befindlichen Urkunden Schwierigkeiten bereitet hätte. Besondere Mühe machten die Urkunden von St. Andrä und St. Georg in Niederösterreich, die zur Zeit von dem Pfarrer in Brunn a. F. bearbeitet werden. Erst der Vermittelung des Vereins für Landeskunde von Niederösterreich und der Beihülfe des Barons von Mitis vom K. K. Haus- Hof- und Staatsarchiv in Wien haben wir photographische Aufnahmen der Papst- und Bischofsurkunden der beiden Stifter zu verdanken, welche den Abschluß der notwendigen Untersuchungen ermöglichten. In dem ungeordneten Archiv von St. Johann in Regensburg gelang es Dr. Bonwetsch nach längerem Suchen das Original der bislang vermißten Urkunde Urbans III. für dieses Stift zu finden. Zahlreiche Archivvorstände haben die Arbeiten auch in diesem Jahre durch Uebersendung von Archivalien nach Marburg unterstützt; namentlich sind wir der Direktion und den Beamten des Allgemeinen Reichsarchivs in München zu Dank verpflichtet; jetzt, da die Arbeiten am I. Bande beendet sind, sprechen wir ihnen unsern besondern Dank für die bereitwillige Förderung unserer Arbeiten aus, deren wir uns von ihrer Seite stets zu erfreuen hatten. Den gleichen Dank schulden wir der Direktion der Universitätsbibliothek zu Göttingen, die Prof. Brackmann eine ausnahmsweise lange Frist für die in großer Zahl entliehenen Bücher bewilligte; nur dadurch ist der Abschluß der Arbeiten ermöglicht worden.

Neben den Arbeiten am I. Bande der Germania pontificia, der die Papsturkunden der Salzburger Erzdiözese umfassen wird, sind auch die Vorarbeiten für den II. Band rüstig vorwärtsgeschritten. Nachdem die bayrischen Archive bereits auf einer Archivreise im Jahre 1907 für diesen Band ausgebeutet waren, hat im vergangenen Sommer Dr. Bonwetsch aus Göttingen die Urkunden des Generallandesarchivs in Karlsruhe bearbeitet und mit dem Staats-

Digitized by Google

archiv in Stuttgart begonnen. Nach dem Abschluß seiner Studien in Wien ist er zur Zeit in Stuttgart selbst damit beschäftigt, die Bearbeitung der Originalurkunden und sonstigen Archivalien des Archivs zu Ende zu führen, woran sich dann ein Besuch der kleineren württembergischen und badischen Archive sowie der Archive Elsaß-Lothringens schließen soll. Es besteht daher die Aussicht, daß auch der II. Band in nicht allzu ferner Zeit zum Abschluß gebracht werden kann.

III. Mit den Vorarbeiten für die Gallia pontificia ist Oberlehrer Dr. Wiederhold in Goslar beschäftigt. Er ist jetzt dabei, die Ergebnisse seiner letzten großen Archivreise im südlichen Frankreich in drei Berichten vorzulegen, von denen der erste eben jetzt als Beiheft der Nachrichten der Philologiseh-Historischen Klasse 1910 ausgegeben worden ist. Der stattliche Band, der über die Archivbestände der Provinzen Berry, Bourbonnais, Nivernais und Auxerrois berichtet, bringt nicht weniger als 169 ungedruckte Papsturkunden von Silvester II. bis Celestin III., ein Ergebnis, das nicht nur dem Sammelfleiße des Herausgebers alle Ehre macht, sondern auch einen überraschenden Aufschluß über die älteren Bestände der Departementalarchive jener Provinzen gibt. Wer hätte so reiche Ausbeute im Lande der Ecole des chartes erwartet?

Außer den genannten Herren ist Dr. H. Graßhoff in Göttingen für unser Unternehmen tätig gewesen. Er hat hauptsächlich bibliographische Arbeiten besorgt und Prof. Kehr beim Drucke des IV. und V. Bandes unterstützt.

Zum Schlusse wiederholen wir den schuldigen Dank allen Förderern und Gönnern unseres Unternehmens, in erster Linie dem Herrn Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten, der dem Dr. Graßhoff das Stipendium erneuerte und durch Gewährung von Urlaub Prof. Brackmann in den Stand setzte, den I. Band der Germania pontificia im Manuskript zu vollenden.

Die Kommission für die Herausgabe der älteren Papsturkunden.

Digitized by Google

Bericht über die ausgesetzten Preisaufgaben.

Für das Jahr 1911 hat die K. G. d. W. folgende Aufgabe gestellt:

Es wird verlangt: Die Geschichte des Buchtitels in der mittelalterlichen Literatur bis zum Festwerden des Titelblattes im Buchdruck des 16. Jahrhunderts. Bei erschöpfender Behandlung eines Teilgebietes kann sich die Ausarbeitung auf Deutschland beschränken, in jedem Falle aber muß sie die mittellateinische Literatur in weitem Umfange heranziehen und in seinen Vorarbeiten wird der Bewerber der eingehenden Rücksicht auf die Literatur der benachbarten Vulgärsprachen, insbesondere die altfranzösische und mittelniederländische, nicht entraten können.

Für das Jahr 1913 stellt die K. G. d. W. folgende Aufgabe:

Die Gesetze der allmählichen Aenderung des Momentes von Magneten sind zu untersuchen.

Die zur Bewerbung um den ausgesetzten Preis bestimmten Arbeiten müssen vor dem 1. Februar 1911 bezw. 1913 an die K. G. d. W. eingeliefert werden, mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, der außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet und innen den Namen und Wohnort des Verfassers. Der Preis beträgt 1000 Mark.

Digitized by Google

Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Ende März 1910.

Sekretäre.

Ernst Ehlers, Dr. med. et ph., Prof., Geh. Reg.-Rat.
Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat.

Ehren-Mitglieder.

Gottlieb Planck, Dr., Prof., Wirklicher Geheimer Rat, Excellenz, zu Göttingen, seit 1901.
Rochus Freiher von Liliencron, Dr. theol. et phil., Wirklicher Geheimer Rat und Prälat, Excellenz, zu Schleswig, seit 1901.
Conrad von Studt, Dr., k. Preuß. Staatsminister, Excellenz, zu Berlin, seit 1901.
Georg Kopp, Dr., Kardinal-Fürstbischof, Eminenz, zu Breslau, seit 1902.
Julius Wellhausen, Dr. theol. jur. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Göttingen, seit 1903.

Ordentliche Mitglieder.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1874, D. z. Sekretär.
Eduard Riecke, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1879. (Zuvor Assessor seit 1872.)
Adolf von Koenen, Dr. ph., Prof., Geh. Bergrat, seit 1881.
Woldemar Voigt, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1883.
Friedrich Merkel, Dr. med., Prof., Geh. Medizinalrat, seit 1885. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1880).
Felix Klein, Dr. ph. Dr. ing., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1887. (Zuvor Assessor seit 1871, korresp. Mitgl. seit 1872).

Digitized by Google

Gottfried Berthold, Dr. ph., Prof., seit 1887.
Albert Peter, Dr. ph., Prof., seit 1889.
Otto Wallach, Dr. med. et ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1890.
David Hilbert, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1895.
Emil Wiechert, Dr. ph., Prof., seit 1903.
Max Verworn, Dr. med. et ph., Prof., seit 1903.
Otto Mügge, Dr. ph., Prof., seit 1909.

Philologisch-historische Klasse.

Hermann Wagner, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1880.
Ferdinand Frensdorff, Dr. jur. und Dr. ph., Prof., Geh. Justizrat, seit 1881.
Wilhelm Meyer, Dr. ph., Prof., seit 1892.
Gustav Cohn, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1893.
Nathanael Bonwetsch, Dr. th., Prof., seit 1893.
Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1893, D. z. Sekretär.
Paul Kehr, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, Direktor des K. Preuß. Historischen Instituts in Rom, seit 1895.
Richard Pietschmann, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, Direktor der K. Universitäts-Bibliothek, seit 1897.
Jacob Wackernagel, Dr. ph., Prof., seit 1902 (zuvor korresp. Mitgl. seit 1901).
Lorenz Morsbach, Dr. ph., Geh. Reg.-Rat, Prof., seit 1902.
Edward Schröder, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1903 (zuvor korresp. Mitgl. seit 1894).
Friedrich Andreas, Dr. ph., Prof., seit 1904.
Gustav Körte, Dr. ph., Prof., seit 1907.
Karl Brandi, Dr. ph., Prof., seit 1909.
Hermann Oldenberg, Dr. ph., Prof., seit 1909 (zuvor korresp. Mitgl. seit 1890).
Paul Wendland, Dr. theol. et ph., Prof., seit 1909.

Assessor.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Bernhard Tollens, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rat, seit 1884.

Auswärtige Mitglieder.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Arthur Auwers, Dr., Prof., Wirkl. Geh. Ober-Reg.-Rat, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit 1882. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1871).

Digitized by Google

Adolf von Baeyer, Dr., Prof., Geh. Rat, zu München, seit 1892. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1879).

Ernst Benecke, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1899).

Gaston Darboux, Dr., Prof., Beständiger Sekretär der Académie des Sciences, zu Paris, seit 1901. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1883).

Richard Dedekind, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Braunschweig, seit 1862. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1859).

Paul Ehrlich, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, Direktor des Instituts für Serumforschung zu Frankfurt a. M., seit 1904.

Julius Elster, Dr., Prof., Oberlehrer am Gymnasium zu Wolfenbüttel, seit 1902.

Emil Fischer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1907. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1901).

Wilhelm Foerster, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin-Westend, seit 1886. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1875).

Sir Archibald Geikie, Präsident der Royal Society, zu London, seit 1906. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1889).

Camillo Golgi, Prof., zu Pavia, seit 1906. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1892).

Robert Helmert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, Direktor des geodät. Institutes zu Potsdam, seit 1898. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1896).

Ewald Hering, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, zu Leipzig, seit 1904.

Joseph Dalton Hooker, Direktor der Königlichen Gärten zu Sunnigdale, seit 1865.

Theodor Liebisch, Dr. ph., Prof., Geh. Bergrat, zu Berlin, seit 1908. (Zuvor Ordentliches Mitglied, seit 1887).

Hendrik Anton Lorentz, Prof., zu Leiden, seit 1906.

Luigi Luciani, Senatore del Regno, Prof., zu Rom, seit 1906.

Walter Nernst, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1905. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1898).

Carl Neumann, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1868. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1864).

Johannes Orth, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1893).

Wilhelm Pfeffer, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1902. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1885).

Henri Poincaré, Prof., zu Paris, seit 1902. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1884).

Digitized by Google

William Lord Rayleigh zu Witham (Essex), Präsident der Royal Society seit 1906. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1886).

Johannes Reinke, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Kiel, seit 1885. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1882).

Gustav Retzius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1904. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1886).

Hermann Amandus Schwarz, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1892. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1875, korresp. Mitgl. seit 1869).

Karl Schwarzschild, Dr. ph., Prof., Direktor des astrophysikalischen Instituts in Potsdam (zuvor ordentl. Mitglied seit 1907).

Charles Scott Sherrington, Prof., zu Liverpool, seit 1906.

Hermann Graf zu Solms-Laubach, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1879).

Eduard Sueß, Dr., Prof., Präsident der K. Akademie der Wissenschaften, zu Wien, seit 1892. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1884).

Gustav Tschermak, Dr., Prof., k. k. Hofrat in Wien, seit 1902. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1884).

Wilhelm Waldeyer, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Med.-Rat, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit 1901. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1877).

Heinrich Weber, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1895. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1892, korresp. Mitgl. seit 1875).

Philologisch-historische Klasse.

Friedrich Bechtel, Dr., Prof., zu Halle, seit 1895. (Zuvor Assessor seit 1882).

Alexander Conze, Dr., vormals Generalsekretär des archäol. Instituts, zu Grunewald-Berlin, seit 1890. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1875).

Leopold Delisle, vormals Administrateur général der Bibl. Nationale, zu Paris, seit 1886. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1866).

Hermann Diels, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1899.

L. Duchesne, Monsg., Director der École française, zu Rom, seit 1891.

Franz Ehrle, Präfekt der vatikanischen Bibliothek, zu Rom, seit 1901.

Friedrich Imhoof-Blumer, Dr., zu Winterthur, seit 1901. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1886).

Ernst von Meier, Dr., Geh. Ober-Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1901.

Digitized by Google

Theodor Nöldeke, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1883. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1864).
Gustav Roethe, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1893).
Wilhelm Schulze, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1898).
Eduard Schwartz, Dr. ph., Prof., Geh. Hofrat, zu Freiburg i. B. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1902).
Emile Senart, Mitglied der Académie des Inscriptions et Belles-Lettres zu Paris, seit 1906.
Wilhelm Thomsen, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1891.
Pasquale Villari, Senatore del Regno d'Italia, zu Florenz, seit 1896.
Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1897. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1892).
Wilhelm Wilmanns, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1901. (Zuvor korresp. Mitgl. seit 1894).
Ludwig Wimmer, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1909.

Korrespondierende Mitglieder.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Svante Arrhenius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1901.
Dietrich Barfurth, Dr., Prof., zu Rostock, seit 1904.
Charles Barrois, Dr., Prof., zu Lille, seit 1901.
Max Bauer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Marburg, seit 1892.
Louis Agricola Bauer, Director of the Department Terrestrial Magnetism, zu Washington, seit 1906.
Friedrich Becke, Dr., Prof., zu Wien, seit 1904.
Robert Bonnet, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, zu Bonn, seit 1904.
Eduard Bornet, Prof., zu Paris, seit 1885.
Joseph Boussinesq, Mitglied der Académie des Sciences, zu Paris, seit 1886.
Alexander von Brill, Dr., Prof., zu Tübingen, seit 1888.
Woldemar Christoffer Brögger, Dr., Direktor der geologischen Reichsanstalt in Christiania, seit 1902.
Heinrich Bruns, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1892.
Otto Bütschli, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Heidelberg, seit 1889.
Georg Cantor, Dr., Prof., zu Halle, seit 1878.
Carl Chun, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1901.
Giacomo Ciamician, Dr., Prof., zu Bologna, seit 1901.
John Mason Clarke, Staatsgeolog zu Albany (Newyork), seit 1906.

Digitized by Google

Sir George Darwin, zu Cambridge (England), seit 1901.
Ulisse Dini, Prof., zu Pisa, seit 1880.
Ludwig Edinger, Dr., Prof., in Frankfurt a. M., seit 1908.
Rudolf Fittig, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1882.
Lazarus Fletcher, Director der Mineralogischen Abteilung des British Museum, zu London, seit 1901.
Erik Ivar Fredholm, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1907.
Robert Fricke, Dr., Prof., zu Braunschweig, seit 1904.
Georg Frobenius, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1886.
Karl von Goebel, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu München, seit 1902.
Paul Gordan, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1870.
Giovanni Battista Grassi, Prof., Senator, Vizesekretär der math.-naturw. Klasse der R. Accademia dei Lincei, zu Rom, seit 1901.
Albert Haller, Dr., Prof., zu Paris, seit 1907.
Viktor Hensen, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, zu Kiel, seit 1892.
Ludimar Herrmann, Dr., Prof., Geh. Med.-Rat, zu Königsberg i. Pr., seit 1886.
William Francis Hillebrand, U. S. Geolog Survey, Washington D. C., seit 1897.
Wilhelm Hittorf, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Münster, seit 1879.
Jacob Heinrich van 'tHoff, Dr. jur. med. ph., Dr. ing., Prof., zu Berlin, seit 1892.
Wilh. Theod. Bernhard Holtz, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1869.
Sir William Huggins, vormals Präsident der Royal Society, zu London, seit 1876.
Adolf Hurwitz, Dr., Prof., zu Zürich, seit 1892.
Alexander von Karpinski, Präsident des Comité géologique, zu St. Petersburg, seit 1892.
Ludwig Kiepert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Hannover, seit 1882.
Leo Königsberger, Dr., Prof., Geh. Rat, zu Heidelberg, seit 1874.
Carl Koppe, Dr., Prof., zu Braunschweig, seit 1901.
E. Ray Lankester, Prof., Director des Natural History Museum zu London, seit 1901.
Auguste Michel Lévy, Mitglied der Académie des Sciences, zu Paris, seit 1901.
Ferdinand Lindemann, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu München, seit 1882.
Sir Joseph Norman Lockyer, Prof., zu London, seit 1876.
Hubert Ludwig, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1901.
Ernst Mach, Dr., Prof., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1887.

Digitized by Google

Franz Carl Joseph Mertens, Dr., Prof., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1877.
Gösta Mittag-Leffler, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1878.
Max Nöther, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1892.
Wilhelm Ostwald, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1901.
William Henry Perkin (jun.), zu Manchester, seit 1906.
Edmond Perrier, Director des Muséum d'Histoire naturelle, zu Paris, seit 1901.
Emile Picard, Prof., Präsident der Académie des Sciences, zu Paris, seit 1884.
Max Planck, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1901.
Alfred Pringsheim, Dr., Prof., zu München, seit 1904.
Heinrich Precht, Dr., Prof., in Neustaßfurt, seit 1908.
Friedrich Prym, Dr., Prof., zu Würzburg, seit 1891.
Georg Quincke, Dr., Prof., Geh. Rat, zu Heidelberg, seit 1866.
Carl Rabl, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1906.
Santiago Ramon y Cajal, Dr., Prof., zu Madrid, seit 1906.
Friedrich von Recklinghausen, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1901.
Theodor Reye, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1877.
Wilhelm Conrad Röntgen, Dr., Prof., Geh. Rat, zu München, seit 1883.
Henry Enfield Roscoe, Prof., zu London, seit 1874.
Harry Rosenbusch, Dr., Prof., Geh. Ober-Bergrat, zu Heidelberg, seit 1882.
Hans Rubens, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1908.
Carl Runge, Dr., Prof., zu Göttingen, seit 1901.
Ernest Rutherford, Prof., zu Manchester, seit 1906.
Franz Eilhard Schulze, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1883.
Arthur Schuster, Dr., Prof., zu Manchester, seit 1901.
Simon Schwendener, Dr. ph. und Dr. med., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1892.
Hugo Seeliger, Dr., Prof., zu München, seit 1901.
Walter Spring, Dr., Prof., zu Lüttich, seit 1901.
Paul Stäckel, Dr., Prof., zu Hannover, seit 1906.
Johann Strüver, Dr., Prof., zu Rom, seit 1874.
Ludwig Sylow, Dr., Prof., zu Christiania, seit 1883.
Johannes Thomae, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Jena, seit 1873.
Féodóssij Tschernyschew, Dr., Direktor des Comité géologique, zu St. Petersburg, seit 1904.
Victor Uhlig, Dr., Prof., zu Wien, seit 1901.

Digitized by Google

Hermann Vöchting, Dr., Prof., zu Tübingen, seit 1888.
Vito Volterra, Prof., Senatore del Regno, seit 1906.
Aurelius Voß, Dr., Prof., zu München, seit 1901.
Emil Warburg, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, Präsident der phys. technisch. Reichsanstalt, zu Charlottenburg, seit 1887.
Eugen Warming, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1888.
Julius Weingarten, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Freiburg i. B., seit 1886.
Alfred Werner, Dr., Prof., zu Zürich, seit 1907.
Willy Wien, Dr., Prof., zu Würzburg, seit 1907.
Julius Wiesner, Dr., Prof., k. k. Hofrat, zu Wien, seit 1902.
Wilhelm Wirtinger, Dr., Prof., zu Wien, seit 1906.
Ferdinand Zirkel, Dr., Prof., Geh. Rat, zu Leipzig, seit 1886.

Philologisch-historische Klasse.

Friedrich von Bezold, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat zu Bonn, seit 1901.
Adalbert Bezzenberger, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Königsberg i. Pr., seit 1884.
Wilhelm von Bippen, Dr., Syndikus der Stadt Bremen, zu Bremen, seit 1894.
P. J. Blok, Dr., Prof., zu Leiden, seit 1906.
Max Bonnet, Dr., Prof., zu Montpellier, seit 1904.
Harry Bresslau, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1906.
Graf Carlo Cipolla, zu Turin, seit 1898.
Maxime Collignon, Dr., Prof. an der faculté des lettres, zu Paris, seit 1894.
Carlo Conti Rossini, zu Paris, seit 1908.
Julius Eggeling, Dr., Prof., zu Edinburgh, seit 1901.
Adolf Erman, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1888.
Arthur J. Evans, Dr., Prof., zu Oxford, seit 1901.
John Faithfull Fleet, Dr., zu London, seit 1885.
Wendelin Förster, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1901.
Wilhelm Fröhner, Dr., zu Paris, seit 1881.
Percy Gardner, Prof., zu Oxford, seit 1886.
George A. Grierson, zu Rathfarnham, seit 1906.
Gustav Groeber, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904.
Albert Grünwedel, Dr. ph., zu Berlin, seit 1905.
Ignazio Guidi, Prof., Sekretär der phil.-historischen Klasse der Accademia dei Lincei, zu Rom, seit 1887.
Henry Harrisse, zu Paris, seit 1892.
G. N. Hatzidakis, Dr., Prof., zu Athen, seit 1901.
Albert Hauck, Dr. th. jur. ph., Prof., Geh. Kirchenrat, zu Leipzig, seit 1894.

Digitized by Google

Joh. Ludwig Heiberg, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1899.
Wolfgang Helbig, Dr., Prof., zu Rom, seit 1882.
Alfred Hillebrandt, Dr., Prof., zu Breslau, seit 1907.
Riccardo de Hinojosa, Dr., Prof., zu Madrid, seit 1891.
Georg Hoffmann, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Kiel, seit 1881.
Oswald Holder-Egger, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1896.
Theophile Homolle, Prof., zu Paris, seit 1901.
Eugen Hultzsch, Dr., Prof., zu Halle a. S., seit 1895.
Hermann Jacobi, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1894.
Julius Jolly, Dr. ph. u. Dr. med., Prof., zu Würzburg, seit 1904.
Finnur Jonsson, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1901.
Adolf Jülicher, Dr. th. und Dr. ph., Prof., zu Marburg, seit 1894.
Bruno Keil, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904.
Konstantinos Kontos, Prof., zu Athen, seit 1892.
Adolf Köcher, Dr., Prof., zu Hannover, seit 1886.
Axel Kock, Dr., Prof., zu Lund, seit 1901.
Karl von Kraus, Dr., Prof., zu Prag, seit 1901.
Charles Rockwell Lanman, Prof., Harvard College, zu Cambridge (Mass.), seit 1905.
Felix Liebermann, Prof., zu Berlin, seit 1908.
Georg Loeschcke, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1901.
Heinrich Lüders, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1907.
Sir Clemens Robert Markham, zu London, seit 1890.
Paul Jonas Meier, Dr., Prof., Direktor des Herzogl. Museums zu Braunschweig, seit 1904.
Antoine Meillet, Prof. am Collège de France, zu Paris, seit 1908.
Giovanni Mercati, Monsg., zu Rom, seit 1902.
Eduard Meyer, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1895.
Leo Meyer, Dr., Prof., k. Russ. Wirkl. Staatsrat, zu Göttingen, seit 1865. (Zuvor Assessor seit 1861).
Adolf Michaelis, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1879.
Hermann Möller, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1894.
Ernesto Monaci, Prof., zu Rom, seit 1901.
Gabriel Monod, Mitglied der Académie des Inscr. et Belles-Lettres, zu Versailles, seit 1901.
Carl Müller, Dr. th., Prof., zu Tübingen, seit 1899.
Friedrich Wilhelm Karl Müller, Dr. ph., zu Berlin, seit 1905.
Arthur Napier, Dr., Prof., zu Oxford, seit 1904.
Heinrich Nissen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1884.
Henri Omont, Direktor der Handschriften-Abteilung an der Bibliothèque Nationale, zu Paris, seit 1906.

Digitized by Google

Paolo Orsi, Dr., Prof., Direktor des Museums zu Syracus, seit 1904.
Joseph Partsch, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Leipzig, seit 1901.
Eugen Petersen, Dr., Prof., zu Halensee-Berlin, seit 1887.
Holger Pedersen, Prof., zu Kopenhagen, seit 1908.
Henry Pirenne, Prof., zu Gent, seit 1906.
Richard Reitzenstein, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1904.
Moritz Ritter, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Bonn, seit 1892.
Carl Robert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Halle, seit 1901.
Goswin Freiherr von der Ropp, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Marburg, seit 1892.
Dietrich Schaefer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1894.
Luigi Schiaparelli, Dr., Prof., zu Florenz, seit 1907.
Carl Schuchhardt, Dr., Prof., Direktor am Museum für Völkerkunde zu Berlin, seit 1904.
Otto Seeck, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Münster i. W., seit 1895.
Elias Steinmeyer, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Erlangen, seit 1894.
Rudolf Thurneysen, Dr., Prof., zu Freiburg i. B., seit 1904.
Johannes Vahlen, Dr. ph. und Dr. jur., Prof., Geh. Reg.-Rat, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1885.
Girolamo Vitelli, Dr., Prof., zu Florenz, seit 1904.
Wilhelm Windelband, Dr., Prof., Geh. Hofrat, zu Heidelberg, seit 1901.
Georg Wissowa, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Halle a. S., seit 1907.
Carl Zeumer, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1906.
Heinrich Zimmer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rat, zu Berlin, seit 1894.

Digitized by Google

Benekesche Preisstiftung.

Die im Jahre 1907 ausgeschriebene Preisaufgabe der Beneke-Stiftung lautete:

„Das Verhältnis des sogenannten Luciantextes der Septuaginta zu der ihm zu Grunde liegenden Überlieferung soll untersucht werden."

Unter dem Motto *Ἐκ μέρους γινώσκομεν* ist rechtzeitig eine Arbeit eingegangen betitelt:

„Das Verhältnis des Luciantextes der Septuaginta zu der ihm zu Grunde liegenden Überlieferung für die Königsbücher untersucht."

Eine solche Einschränkung der Aufgabe war bei ihrer Ausschreibung nicht ausdrücklich freigestellt, sie war aber, wie auch der Verfasser in einem Begleitschreiben bemerkt, in der Natur der Aufgabe begründet und sogar geboten, und zwar schon deshalb, weil der sogenannte Luciantext als solcher zunächst noch näherer Feststellung bedarf.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit (Kap. 1 und 2) sucht der Verfasser daher den Luciantext der Königsbücher zu ermitteln. Er gibt hier sorgfältigen Bericht über die Handschriften, in denen für die Königsbücher die Lucianrezension vorliegt, und kritisiert die beiden Ausgaben, die aus ihnen geflossen sind, nämlich den griechischen Text der Complutensischen Polyglotte und Lagardes Librorum Veteris Testamenti Canonicorum Pars Prior Graece (1883). Lagardes Ausgabe erweist sich dabei als eine sehr unvollkommene Leistung, sie beruht auf einer willkürlichen Beurteilung der Varianten. Sodann untersucht der Verf. die vom Luciantext nur beeinflußten Bibelhandschriften und zählt die aus ihm geflossenen Lektionare und die ihm folgenden Kirchenväter auf.

In Kap. 2 erörtert er den relativen Wert der eigentlichen Lucianhandschriften in einer Klassifikation und Diskussion ihrer

Digitized by Google

Varianten. Für die Auswahl der Varianten betrachtet er als maßgebend 1) die Übereinstimmung mit den Zitaten der Kirchenväter, die dem Luciantext folgen, 2) die Übereinstimmung mit dem Cod. Vat. B und dem Aethiopen. Namentlich gibt er in allen Fällen, wo eine Gruppe der Lucianhandschriften mit dem griechischen Vulgärtext, eine andere mit B und dem Aethiopen stimmt, der letzteren Gruppe den Vorzug. Dieser Grundsatz, dessen Richtigkeit durch die weitere Untersuchung durchaus bestätigt wird, ist wichtig. Denn es leidet keinen Zweifel, daß der vom Cod. B und dem Aethiopen repräsentierte Texttypus im Allgemeinen der ursprünglichen LXX am nächsten kommt. Dieser Typus ist aber, wie das übrige handschriftliche Material beweist, im Laufe der Zeit mehr und mehr durch einen depravierten Vulgärtext verdrängt. Auf der anderen Seite ist auch der Luciantext im Allgemeinen ein sehr stark korrigierter Text, der sowohl vom Cod. B und dem Aethiopen als auch vom griechischen Vulgärtext charakteristisch verschieden ist. Aber in sehr vielen Lesarten stimmen alle Lucianhandschriften mit dem Cod. B und dem Aethiopen gegen den Vulgärtext überein, und wegen der allgemeinen Richtung, in der sich die Textgeschichte bewegt hat, darf diese Übereinstimmung nicht aus späterer Korrektur, sondern nur aus ursprünglicher Verwandtschaft erklärt werden. Obendrein führt der Verfasser weiterhin den Nachweis, daß auch die spezifischen Korrekturen des Luciantextes öfter von Lesarten ausgehen, die nur im Cod. B und im Aethiopen erhalten sind.

Im zweiten Teil der Arbeit (Kap. 3—5) behandelt der Verfasser die Frage nach dem Alter des Luciantextes, d. h. die Frage, ob und in wie weit der Luciantext vor Lucian bezeugt ist. An erster Stelle kommt hierbei Josephus in Betracht, der die Geschichte Israels nach den heiligen Büchern erzählt und hierbei im Allgemeinen freilich dem hebräischen Urtext folgt, daneben aber als Erklärung die Septuaginta benutzt hat. Der von Josephus gelesene Septuagintatext ist deshalb nicht leicht zu bestimmen, weil er sich von dem sprachlichen Ausdruck der Septuaginta möglichst emanzipiert. Indessen können die Transkriptionen der hebräischen Eigennamen, die Josephus gibt, überall mit den in der LXX gegebenen Transkriptionen verglichen werden. Dazu kommt, daß der LXX-Text und in besonderer Weise auch der Luciantext an manchen Stellen sachlich vom hebräischen Text abweicht. Nun hat A. Mez (Die Bibel des Josephus, 1895) die Behauptung aufgestellt, daß Josephus für die Bücher Richter und Samuel einen LXX-Text benutzt habe, welcher im Wesentlichen mit dem Lucian-

Digitized by Google

text übereinstimmte und späterhin nur leicht überarbeitet sei. Hiernach hätte Lucian also in der Hauptsache einen älteren Text reproduziert, der mindestens in das erste nachchristliche Jahrhundert hinaufreichte. Der Verfasser kritisiert diese Behauptung für die Samuelbücher auf Grund des von Mez beigebrachten Materials, für die Königsbücher hat er selbst den Josephus auf sein Verhältnis zum masorethischen Text und zur LXX, speziell zu Lucian, eingehend untersucht. Im Gegensatz zu Mez kommt er zu dem Resultat, daß für das Samuelbuch die Übereinstimmung des Josephus mit Lucian sich auf einige (7—8) Transkriptionen von Namen und zwei Zahlangaben beschränke, und daß für das Königsbuch nur in drei Fällen (einer Übersetzung, einem merkwürdigen Zusatz und in der Abgrenzung des Samuelbuchs vom Königsbuch) eine auffällige Übereinstimmung konstatiert werden könne. Er meint, daß aus alledem nur für einzelne Lesarten des Lucian ein höheres Alter folge, nicht aber für den Luciantext im Ganzen. Die wichtigsten Übereinstimmungen zwischen Josephus und Lucian will er sogar auf Abhängigkeit der Lucianrezension von Josephus zurückführen.

Die letztere Annahme ist jedenfalls unzulässig. Sodann hat der Verfasser in der Arbeit von Mez freilich manche Versehen und Übereilungen nachgewiesen, aber er wird dem von Mez und von ihm selbst festgestellten Tatbestande nicht völlig gerecht. Denn in den meisten Fällen, in denen bei Josephus eine Benutzung der LXX nachgewiesen werden kann, stimmt Josephus sowohl mit Lucian als auch mit B und dem Aethiopen überein. Daneben stimmt Josephus in einigen Fällen mit B und dem Aethiopen gegen Lucian, in anderen mit Lucian gegen B und den Aethiopen. Die letzteren Fälle fallen aber schwerer ins Gewicht. In Betracht kommt hierbei weniger die Übereinstimmung des Josephus mit Lucian in der Aussprache mancher hebräischer Eigennamen, denn in dieser Beziehung ist der Text des B, die griechische Vorlage des Aethiopen und überhaupt die nichtlucianische Überlieferung notorisch nach jüngerer und schlechterer Überlieferung korrigiert. Sehr merkwürdig ist aber, daß Josephus zweimal in Zahlangaben und einmal in einem sonderbaren Zusatz mit Lucian übereinstimmt. Dazu kommt, daß Josephus 1. Sam. 14 4 einen Text las, in dem die ursprüngliche LXX-Lesart mit einer Lucianlesart vermischt war (Altth. VI 108). Diese Mischlesart ist in einer einzigen Handschrift, aber auch der ältesten und besten, dem Cod. B, überliefert.

Mit großer Sorgfalt behandelt der Verfasser in Kap. 4 die Zitate der griechischen Kirchenschriftsteller bis zum Ende des

Digitized by Google

3. Jahrhunderts, in Kap. 5 die Zitate der älteren lateinischen Kirchenschriftsteller und die lateinischen Bibelhandschriften. Der Befund ist hier für das Alter des Luciantextes im Ganzen weniger günstig. Gleichwohl begegnen uns bei Theophilus von Antiochia und bei Hippolytus von Rom höchst charakteristische Lucianlesarten. Die ältesten lateinischen Autoren, Tertullian, Cyprian und Lactantius, lasen einen ganz eigenartigen Bibeltext, dagegen tauchen im 4. und 5. Jahrhundert bei Ambrosius, Augustinus und Julian von Eclanum mehrfach Lucianlesarten auf. Lucifer von Calaris, der um die Mitte des 4. Jahrhunderts im Orient schrieb, benutzte einen Text, in dem Lesarten des B in solchem Grade mit Lucianlesarten gemischt waren, daß Lucifer geradezu als Zeuge für die Rekonstruktion des Luciantextes in Betracht kommt. Lauter Lucianlesarten finden sich am Rande einer alten (9. Jahrh.) Vulgatahandschrift in Leon in Spanien, die zweimal auffällig mit Lucifer übereinstimmen. Allen diesen Erscheinungen gegenüber glaubt der Verfasser daran festhalten zu sollen, daß der Luciantext im Wesentlichen von Lucian geschaffen sei. Er nimmt an, daß Lucifer im Orient einen griechischen Bibeltext benutzt habe, der aus dem Text des B und des Lucian gemischt war, und die Lucianlesarten des Ambrosius und des Augustinus meint er aus frühzeitigem Eindringen der Arbeit des Lucian in das Abendland erklären zu dürfen.

Im dritten Teil der Arbeit (Kap. 6 und 7) untersucht der Verfasser den Luciantext auf sein Verhältnis zu den übrigen LXX-Texten und zum masorethischen. Auf Grund eindringenden Textstudiums analysiert er zunächst (Kap. 6) einen größeren Abschnitt vollständig, für den Rest beschränkt er sich auf die Klassifikation und Diskussion der wichtigsten Erscheinungen (Kap. 7). Er weist nach, daß die Lucianrezension im letzten Grunde überall auf einen Text zurückgeht, der mit B und dem Aethiopen nahe verwandt war. An manchen Stellen ist dieser Typus bei Lucian sogar besser erhalten als bei B und dem Aethiopen. Aber diese Grundlage ist in zwei einander entgegengesetzten Richtungen aufs stärkste alteriert. Einerseits ist der Text in hohem Grade nach dem masorethischen korrigiert. Oft geht diese Korrektur weiter als die gleichartige des Origenes, aber sie ist nicht so gleichmäßig durchgeführt wie diese, und nirgendwo erscheint hierbei der Luciantext als abhängig von Origenes. Mit dieser Korrektur kreuzt sich eine andere, die viel stärker eingegriffen hat. In hohem Grade ist die Gräzität der ursprünglichen Übersetzung teils verbessert, teils verschlechtert, oft ist dabei die Übersetzung durch freie Um-

Digitized by Google

schreibung ersetzt. Sodann ist der Text an sehr vielen Stellen nach Parallelstellen der Königsbücher, aber auch nach den Paralleltexten der Bücher Jesaja, Jeremia und der Chronik geändert. Oft ist die Erzählung auch durch kleine sachliche Zutaten, namentlich im Interesse des Verständnisses, erweitert, anderswo sind sachliche Widersprüche, die die Erzählung aufwies, durch Korrektur beseitigt.

Auf der einen Seite ist also der ursprüngliche LXX-Text in der Lucianrezension stärker als von Origenes mit dem masorethischen Text in Übereinstimmung gebracht, auf der anderen Seite ist er in viel höherem Grade und vielfach offenbar aus bloßer Willkür in Widerspruch zum masorethischen Text versetzt. Diese Doppelnatur des Luciantextes hat der Verfasser in volles Licht gestellt, gleichwohl glaubt er ihn in allem Wesentlichen als das Werk Eines Rezensors und zwar des Presbyters Lucian betrachten zu sollen. In Wahrheit beweist die Doppelnatur des Luciantextes, daß wir bei seiner Analyse nicht allein mit der ursprünglichen Septuaginta und dem Presbyter Lucian zu rechnen haben. Denn es ist anzunehmen, daß Lucian, der Stifter der antiochenischen Schule, bei seiner Rezensionsarbeit wußte, was er wollte. Der Zug der Zeit Lucians ging aber durchaus dahin, den Septuagintatext mit dem masorethischen Text in Übereinstimmung zu bringen, und daß auch Lucian diesem Zuge folgte, bezeugt ein alter Autor, der darüber Bescheid wußte. Deshalb muß der Luciantext da, wo er sich vom masorethischen Text und zugleich von der Septuaginta entfernt, auf einer älteren vorlucianischen Bearbeitung der Septuaginta beruhen. Wahrscheinlich war diese Bearbeitung schon auf dem Boden des Judentums zu Stande gekommen. Hierfür sprechen die Lucianlesarten des Josephus, des Theophilus von Antiochia und des Hippolytus von Rom, und ebenso die zahlreichen Lesarten Lucians, die auf einen vom masorethischen Text abweichenden hebräischen Text zurückgehn.

Indessen fällt dieser Mangel der Arbeit gegenüber dem in ihr Geleisteten wenig ins Gewicht. Mit einer auf diesem Gebiete einzigartigen Gelehrsamkeit, mit bewundernswerter Energie und nie versagender Präzision und Sauberkeit hat der Verfasser die zahllosen Einzelheiten, um die es sich hier handelt, untersucht und klassifiziert. Damit hat er eines der wichtigsten und schwierigsten Probleme der Septuagintaforschung in höchst fruchtbarer Weise behandelt und zu seiner Lösung den Weg gebahnt.

Die Fakultät steht daher nicht an, der Arbeit den in doppelter Höhe ausgesetzten Preis zuzuerkennen.

Digitized by Google

Die Eröffnung des versiegelten Briefes mit dem Motto „*Ἐκ μέρους γινώσκομεν*“ ergab als Verfasser Herrn Dr. theol. et phil. Alfred Rahlfs, a. o. Professor an der theologischen Fakultät der Universität Göttingen.

Für das Jahr 1913 stellt die Fakultät folgende Aufgabe:

„Nachdem eine sichere Abgrenzung der Juraformation gegen die Kreide im nordwestlichen Deutschland durchgeführt ist, wird eine vergleichende Übersicht der Entwicklung des obersten Jura in diesem Gebiet vom Korallenoolith an gewünscht und eine möglichst genaue Parallelisierung mit dem süddeutschen, schweizerischen, französischen und eventuell auch englischen Jura, sowie mit der alpinen Facies.“

Bewerbungsschriften sind in einer der modernen Sprachen abzufassen und bis zum 31. August 1912, auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen, an die Fakultät einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung und innen den Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatt muß ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls ihr ein Preis nicht zuerkannt wird.

Der erste Preis beträgt 1700 Mk., der zweite 680 Mk. Die Erteilung eines Preises ist auf solche Bearbeitungen beschränkt, die von einem einzigen Verfasser herrühren.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigentum ihrer Verfasser.

Die Bekanntmachung der zuerkannten Preise erfolgt am 11. März 1913 in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät in Göttingen.

In den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen von 1908 und 1909, finden sich die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1910 und 31. August 1911 einzusenden sind.

Göttingen, den 1. April 1910.

Die philosophische Fakultät.

Der Dekan:

J. Wackernagel.

Digitized by Google

Verzeichnis
der im Jahre 1909 eingegangenen Druckschriften.

A. Gesellschafts- und Institutspublikationen*).

Aachen Geschichtsverein: Zeitschrift 29. 1907. 30. 1908.
Aarau Historische Gesellschaft des Kantons Aarau: Taschenbuch 1908.
Aberdeen University: Studies 31. 35. 1908.
Adelaide R. Society of South Australia: Transactions 32. 1908.
Agram Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti: Rad 174—177. 1908—09.
— Ljetopis 23. 1909.
— Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika 27. 1908.
— Zbornik za narodni život i obicaje južnih Slavena: 14. 1909.
— Codex diplomaticus regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae (Diplomatički zbornik kraljevine hrvatske, dalmacije i slavonije) 6. 1908.
— Građa za povjest književnosti hrvatske 6. 1909.
— Mažuranić, V., Prinosti za hrvatski pravno-povjestni rječnik 2. 1909.
Aix Université: Annales de la faculté des lettres 2. 1908.
— Annales de la faculté de droit 2 1/2. 1908.
Albany New York State Museum: Bulletin 126. 133. 1909.
— Memoir 9 2. 1909.
Albuquerque University of New Mexico: Bulletin. Educational series 1 3. 1909. Geological series 3 1. 1909. Catalogue series 17 2. 18. 1909.
Altenburg Geschichts- und Altertumsforschende Gesellschaft des Osterlandes: Mitteilungen 12 1. 1909.

---

*) Nur wenn es mit dem Jahrgange der Zeitschrift nicht übereinstimmt, ist das Jahr der Veröffentlichung (in runden Klammern) besonders angegeben worden.

Digitized by Google

Amiens Société des antiquaires de Picardie: Bulletin trimestriel 1908.

Amsterdam K. Akademie van wetenschappen: Verhandelingen. Wis- en natuurkundige afdlg. 1. sect. 10 1. 1909 2. sect. 14 2—4. 15 1. 1908—09. Afdlg. letterkunde 10 2. 1909.

— Verslagen en mededeelingen. Afdlg. letterkunde 4. reeks 9. 1909.

— Verslag van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdlg. 17. 1908—09.

— Jaarboek 1908 (1909).

— Sex carmina in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornata. 1909.

— Amico monita rebus novis adversanti. Carmen Francisci Tranquillini Moltedo Neapolitani in certamine poetico Hoeufftiano magna laude ornatum. Opusculum addendum fasciculo carminum Anno 1909 laudatorum. 1909.

Amsterdam K. Nederlandsch aardrijkskundig genootschap: Tijdschrift II ser. 26. 1908.

Amsterdam Wiskundig genootschap: Nieuw archief voor wiskunde 2. r. 8 4. 9 1. 1909.

— Wiskundige opgaven 10 4. 1908.

— Nieuwe opgaven 10 127—160. 1909.

— Revue semestrielle des publications mathématiques 17. 1909.

Antwerpen Société r. de géographie: Bulletin t. 32 (32 & 33 ann. soc.) 4. 1909. t. 33 (33 & 34 ann. soc.) 1—3. 1909.

Antwerpen Argentinisches Generalkonsulat: Alemann, M.: Am Rio Negro. Ein Zukunftsgebiet germanischer Niederlassung. Berlin 1907.

Athen *Ἐπιστημονικὴ ἑταιρεία*: *Ἀθηνᾶ* 20. 1908 4. 21. 1909 1—3. *Πίναξ τῶν τομῶν Α'—Κ'* 1909.

— *Μαρκέλλου Σιδήτου Περὶ σφυγμῶν* 1907.

Athen *Ἐθνικὸν πανεπιστήμιον*: *Τὰ κατὰ τὴν πρυτανείαν* 1906/07. (1908).

Athen Ksl. Deutsches Archaeologisches Institut. Athenische Abteilung: Mitteilungen 33. 1908 4. 34. 1909 1—3.

Athen École française: Bulletin de correspondance hellénique 33. 1909.

Augsburg Historischer Verein für Schwaben und Neuburg: Zeitschrift 34. 1908. 35. 1909.

Baltimore Johns Hopkins University: Circular n. s. 1908 8—10. 1909 1—7.

— American journal of mathematics 30. 1908 3. 4. 31. 1909 1—3.

— Studies in historical and political science 26. 1908 11. 12. 27. 1909 1—7.

Digitized by Google

Barcelona R. Academia de ciencias y artes: Boletin III. Epoca 1. 1892—1900. 2 1—11. 1801—1909.
— Memorias III. Epoca 1. 1892—1900. 2. 1892—1900. 3. 1905—1907. 4. 1901—1904. 5. 1904—1906. 6. 1907—1908. 7. 1908—1909. 8 1—6. 1909.
— Nómina del Personal 1898/99—1909/10.
— Balari y Jovany, J., Historia de la R. Academia. Memoria inaugural del año académico de 1893 à 1894 (1895).
Barcelona Institut d'estudis catalans: Anuari 1907.
Basel Naturforschende Gesellschaft: Verhandlungen 20 1. 2. 1909.
Basel Historische und antiquarische Gesellschaft: Zeitschrift 8. 1908 2. 9. 1909 1.
Batavia Genootschap van kunsten en wetenschappen: Notulen van de algemeene en directievergaderingen 46. 1908 2—4.
— Verhandelingen 57. 1909.
— Tijdschrift voor indische taal-, land-, en volkenkunde 50 2—6. 51 1—5. 1908—09. Register ... tot het jaar 1907 (1908).
— Dagh-Register 1679. 1909.
— Handleiding bij den plattegrond van het Museum. s. a.
Batavia K. natuurkundige vereeniging in Nederlandsch-Indië: Tijdschrift 68 (X, 12) 1909.
Batavia K. magnetisch en meteorologisch observatorium: Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië 29. 1907 (1908).
— Observations 29. 1906 (1908). 30. Appendix I 1909.
— Erdbebenbericht 8 a. 8 b. 9 a. 9 b. 9 c. 1909.
Bayreuth Historischer Verein für Oberfranken: Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken 24 1. 1909.
Beirut Université Saint-Joseph: Mélanges de la faculté orientale 3 2. 1909.
Bergedorf Hamburger Sternwarte: Astronomische Abhandlungen 1. 1909.
Bergen Museum: Aarbog 1908. 1909 1. 2.
— Aarsberetning 1908 (1909).
— Skrifter n. r. 1 1. 1909.
— Sars, G. O., An account of the crustacea of Norway 5 23—26. 1908.
Berkeley University of California: Publications. Bulletin 3. ser. 29. 1909. — Administrative Bulletin 9. 1909. — The university chronicle 10 3. 4. 1908. 11 1. 2. 1909. — American archaeology and ethnology 7 3. 1908. 8 1—4. 1909. — Botany 3 3—8. 1908—09. — Zoology 4 5—7. 5 1—3. 6 1. 2. 1908—09. — Physiology 12. 13. 1908. 14. 1909. — Semitic philology 2 1. 1909. — Bulletin of

Digitized by Google

the department of geology 5 14—17. 1908—09. — Bulletin of the Agricultural Experiment Station 192—201. 1908.

Berkeley Lick Observatory. Bulletin 145—154. 156.157. 159—170. 1909. Publications 8. 1908.

Berlin K. Akademie der Wissenschaften: Abhandlungen Phil.-hist. Kl. 1908. Physik.-math. Kl. 1908.

— Sitzungsberichte 1908 40—53. 1909 1—39.

— Politische Korrespondenz Friedrichs des Großen 33. 1909.

Berlin Gesamtverein der deutschen Geschichts- und Altertumsvereine: Korrespondenzblatt 56. 1908 11. 12. 57. 1909.

Berlin Verein für die Geschichte Berlins: Alt-Berlin (früher: Mitteilungen) 1909.

— Verzeichnis der Mitglieder 34. 1909.

Berlin Verein für Volkskunde: Zeitschrift 19. 1909.

Berlin Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte: Mitteilungen 19. 1909 1 2.

Berlin Deutsche physikalische Gesellschaft: Verhandlungen 11. 1909 1. 9. 16—23.

Berlin K. Technische Hochschule: Rede 26/I. 1909.

Bern Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesamten Naturwissenschaften (Société Helvétique des sciences naturelles): Verhandlungen (actes) 91. Jahresversammlung (session) Glarus 1908. Bd. 1. 2.

— Geologische Kommission: Geologische Karte der Schweiz No. 7. 8. 1908. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz Lief. 29 2. 1908.

Bern Naturforschende Gesellschaft: Mitteilungen 1908 (1909).

Bern Allgemeine geschichtforschende Gesellschaft der Schweiz: Jahrbuch 33. 1908. 34. 1909.

Bologna R. Accademia delle scienze dell'Istituto: Memorie 6. ser. 5. 1907—08. Cl. di scienze morali Sez. di scienze storico-filologiche ser. I 2 1. 2. Sez. di scienze giuridiche ser. I 2 1. 2. 1907—08.

— Rendiconti delle sessioni n. s. 12. 1907—08 (1908). Cl. di scienze morali ser. I 1 2. 1908. 2 1. 1909.

Bombay Government of Bombay. General Department. Archaeology: Progress-report of the archaeological survey of India, Western circle for the year ending 31. march 1908.

Bonn Naturhistorischer Verein der preußischen Rheinlande und Westfalens: Verhandlungen 65. 1908. 66. 1909.

— Sitzungsberichte 1908. 1909 1.

Digitized by Google

Bonn Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande: Bonner Jahrbücher 117 3. 1908. 118 1. 1909.

Bordeaux Faculté des lettres: Annales 4. sér. 31. ann. 1909. Revue des études anciennes t. 11. Bulletin italien t. 9.

Bordeaux Société des sciences physiques et naturelles: Mémoires 4 1. 2. 1908.

— Procès-verbaux 1907—08 (1909).

Boston American academy of arts and sciences: Proceedings 44. 1908—09. 45 1—3. 1909.

Boston Society of natural history: Proceedings 34 1—4. 1907—09.

— Occasional papers 7 8—10. 1908.

Braunschweig Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig-Wolfenbüttel: Jahrbuch 7. Wolfenbüttel 1908.

— Braunschweigisches Magazin 14. ebd. 1908.

Bremen Naturwissenschaftlicher Verein: Abhandlungen 19 Beil.: Schauinsland: Darwin und seine Lehre 1909.

— Jahresbericht 44. 1908/09 (1909).

Bremen Historische Gesellschaft des Künstlervereins: Bremisches Jahrbuch 22. 1909.

Breslau Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur: Jahresbericht 86. 1908 (1909).

Brooklyn Institute of arts and sciences: (Museum) Science bulletin 1 15. 16. New York 1909.

— Cold Spring Harbor Monographs 7. 1909.

Brünn Naturforschender Verein: Verhandlungen 46. 1907.

Brüssel Académie r. de Belgique: Mémoires Cl. des sciences collection in 8° 2 4. 5. 1909. collection in 4° 2 1—3. 1809/09. Cl. des lettres et des sciences morales et politiques et Cl. des beaux-arts collection in 8° 2. sér. 4 2. 5 1. 1909.. collection in 4° 3. 4 1. 1909.

— Bulletin de la classe des sciences 1908 9—12. 1909 1—8.

— Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts 1908 9—12. 1909 1—8.

— Annuaire 75. 1909.

— Notices biographiques et bibliographiques 1907—1909. 5. éd. 1909.

— Recueil des chartes de l'Abbaye de Stavelot-Malmedy p. p. Halkin et Roland P. 1. 1909 (2 Expl.).

— Commission r. d'histoire: Documents concernant la principauté de Liège (1230—1532) spécialement au début du 16. siècle. Extrait des papiers du Cardinal Jérome Aléandre. Publ. p. A. Cauchie et A. van Hove 1908.

Digitized by Google

Brüssel Société des Bollandistes: Analecta Bollandiana 28. 1909.

Brüssel Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie: Bulletin. Procès-verbaux a. 22. (t. 22.) 1908 8—11. a. 23. t. 23.) 1909 1—6.

Bryn Mawr College: Dissertations for the degree of doctor of philosophy, Hall, Edith H.: The decorative art of Crete in the Bronze Age 1907.

Budapest Magyar tudományos akadémia: Almanach 1909.

— De Saussure Czézárnak II. Rakóczi Ferencz fejedelem udvari nemesének Törökországi levelei 1730—39-ből es Följegyzései 1740-ből . . . közli Thaly Kálmán. 1909.

— Békefi, R.: A. Pecsi egyetem 1909.

— Szadeczkij, L.: A Szekely határőrség szervezése 1762—64-ben. Okirattarral 1761—1790 (1909).

— Takats, S.: A magyar gyalogsáy megalakulása. 1908.

— Kiss, I.: A magyar kelytartótanács I Ferdinánd Korában es 1549—1551 évi. Leveles könyve 1908.

— Kalevala. A finu ereditiből fordította Vikár Bela 1909.

— Rapport sur les travaux en 1908 (1909).

— Ertekezések a nyelv- es szeptudományi osztálya köréből 20 8—10. 1908. 21 1. 2. 1909.

— Nyelvtudományi közlemények 38. 1908.

— Ertekezések a társadalmi tudományok köréből 13 10. 14 1. 2. 1909.

— Ertekezések a történeti tudományok köréből 22 3. 1909.

— Archaeologiai értesitö 28. 1908 3—5. 29. 1909 1. 2.

— Nyelvtudományi 2 2. 1909.

— Mathematikai és természettudományi közlemények vonatkozólag a hazai viszonyokra 30 4. 5. 1909.

— Mathematikai és természettudományi értesitö 26. 1908 3—5. 27. 1909 1. 2.

— Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 24. 1906.

— Monumenta Hungariae Historica. Diplomataria 34. 1909.

— Editiones criticae scriptorum Graecorum et Romanorum: Civis Epyllium pseudovergilianum ed. Nemethy 1909.

— Tőrök- Magyarkori Történelmi Emlékek II. oszt. Irók. Tőrök Történetirók 4. 1908.

Budapest K. Ungar. Geologische Anstalt: Földtani közlöny (Geologische Mitteilungen) 38. 1908 11. 12. 39. 1909 1—5.

— Mitteilungen aus dem Jahrbuche I7 1. 1908.

— Jahresbericht 1907—1909.

Digitized by Google

Budapest Astrophysicai Observatorium: A. M. kir. Konkoly-Alapitványú kisebb kiadványai 1—13. 1906—1907.

Buenos Aires Sociedad científica Argentina: Anales 66 2—6. 67. 68 1. 1909.

Buenos Aires Museo nacional: Anales 3. ser. 10. 1909.

Bukarest Academia Română: Analele Part. administrat. și desbater 30. 1907—08 (1908).

— Memoriile Secț. literare 2. ser. 30. 1907—08 (1908). Secț. istorice 2. ser. 30. 1907—08 (1908). Secț. sciintifice 2. ser. 30. 1907—08 (1908).

— Gesetze, Satzungen, Geschäftsordnungen, Beschlüsse 1908.

— Bianu, J., Catalogul manuscriptelor românești Tom. 2. Num. 301—568. 1909.

— Discursuri de recepțiune. 30. Mrazek L. cu răspuns de Anghel Saligny: Despere formarea zăcămintelor de Petrol din România 1907. — Grecescu cu răspuns de C. I. Istrati: O schitare din istoria botanicei 1908.

— Russo, A., Scrieri publ. de Petre v. Hanes 1908.

— Crăinicianu, Gh., Literatura medicală românească 1907.

— Tocilescu, Gr. G., Monumentele epigrafice și sculpturali ale Muzeului national de antichitati din Bucuresci. P. 2. 1908.

— Bianu, J., și N. Hodoș: Bibliografia românească veche 1508—1830. T. 2. fasc. 4. 1909.

Cambridge, Brit. Philosophical society: Transactions 21 2. 1908.

— Proceedings 15 1. 2. 1909.

Cambridge, Mass. Harvard College: Harvard Oriental Series 11. 1908.

Cambridge, Mass. Museum of comparative zoology at Harvard College: Memoirs 27 3. 34 2. 35 2. 37. 38 1. 1907—09.

— Bulletin 52 7—12. 53 3. 4. 1909.

— Annual report of the curator 1907/08 (1909).

Catania (R. Università) Istituto di storia del diritto Romano: Annuario 9 2/10. 1907—08.

Catania Società di storia patria per la Sicilia orientale: Archivio storico per la Sicilia orientale 5 3. 1908. 6. 1909.

Catania Accademia Gioenia di scienze naturali: Bollettino delle sedute 2. ser. 5—9. 1909.

— Atti 4. ser. 20. 1907. 5. ser. 1. 1908.

Charkow Имп. Университетъ (Université Imp.): Записки (Annales) 1908 4. 1909 1—3.

Charkow Математической Одщестьо: Сообщения 10. 11. 1897—1909.

Digitized by Google

Charlottenburg Physikalisch-Technische Reichsanstalt: Die Tätigkeit 1908 (1909).

Chemnitz K. Sächsisches Meteorologisches Institut: Dekaden-Monatsberichte 1908. Jg. 11 (1909).

— Deutsches meteorologisches Jahrbuch 1905. (Jg. 23) (1909).

Cherbourg Société nationale des sciences naturelles et mathématiques: Mémoires 36. 1906/07.

Chicago University: The astrophysical journal 28 5. 1908. 29. 30. 1—4. 1909.

— The journal of geology 16. 1908 8. 17. 1909.

— The American journal of sociology 14 4—6. 15 1—3. 1909.

— The journal of political economy 16 10. 17. 1908.

Chicago John Crerar Library: Annual report 14. 1908 (1909).

Chicago Field Columbian Museum: Publication 129. 1908. 132—135. 1909.

Chicago Open Court publishing co.: The open court 23. 1909.

— The monist 19. 1909.

Christiania Videnskabs-Selskabet: Forhandlinger 1908 (1909).

Chur Historisch-antiquarische Gesellschaft von Graubünden: Jahresbericht 38. 1908 (1909).

Chur Naturforschende Gesellschaft Graubündens: Jahresbericht 51. 1908/9. (1909).

Cincinnati University: Record 1. ser. 5. 6 2. 1909.

— University studies 2. ser. 4 2—4. 1908. 5 1—3. 1909.

Cincinnati Lloyd Library: Bulletin 11. 1909.

Clermont-Ferrand Académie des sciences, belles lettres et arts: Mémoires 2. sér. 20. 1907. 21. 1909.

— Bulletin historique et scientifique de l'Auvergne 2. sér. 1897—1908.

Clermont-Ferrand Société des amis de l'Université: Revue d'Auvergne et bulletin de l'Université 17—23. 1900—1906. 24. 1907 2—6. 25. 1908 1. 2. 5. 6.

— Clermont-Ferrand et le Puy de Dôme publié à l'occasion du Congrès de l'Association pour l'avancement des sciences. 1908.

Concarneau Laboratoire de zoologie et de physiologie maritimes: Travaux scientifiques 1 2/5. 1909.

Davenport Academy of sciences: Proceedings 12. 1907 pag. 95—222.

Delft Technische Hoogeschool: Lijst der periodieken 2. uitg. 1909.

— Dissertationen 1909 van Dijk, Wijnberg.

Des Moines Jowa geological survey: Annual report 18. 1907 (1908).

Dorpat Имп. Юревск. Университетъ (Imp. Universitas Jurievensis olim Dorpatensis): **Ученыя записки** (acta et commentationes) 16. 1908.

Digitized by Google

Dortmund Historischer Verein für Dortmund und die Grafschaft Mark: Beiträge zur Geschichte Dortmunds und der Grafschaft Mark 17. 1909.

Dresden K. Sächsischer Altertumsverein: Neues Archiv für Sächsische Geschichte und Altertumskunde 30. 1909.

— Jahresbericht 84. 1908/9 (1909).

Dresden Verein für Geschichte Dresdens: Mitteilungen 21. 1908.

— Dresdner Geschichtsblätter 17. 1908.

— Beutel, G., Bildnisse hervorragender Dresdner Reihe 1. 1908.

Drontheim K. Norske videnskabers selskab: Skrifter 1908 (1909).

Dublin R. Irish Academy: Proceedings 3. ser. 27. 1907. A 10—12. B 6—11. C 9—18.

Dublin R. Dublin Society: The scientific proceedings n. s. 11 29—32. 12 1—23. 1909.

— The economic proceedings 1 13—16. 1908—09.

— The scientific transactions 7. 1908. 8. 9. 1909.

Dürkheim Naturwissenschaftlicher Verein „Pollichia": Mitteilungen 23. 1908. 24. 1909.

Düsseldorf Düsseldorfer Geschichtsverein: Beiträge zur Geschichte des Niederrheins 22. 1908/09.

— Heyderhoff, J.: J. Fr. Benzenberg, der erste Rheinische Liberale. Vereinsgabe 1909.

Edinburgh R. Society: Transactions 46 2. 3. 1909.

— Proceedings 29 2—8. 1909.

Edinburgh R. Physical Society: Proceedings 17 1. 4—6. 1908—09.

Edinburgh Mathematical society: Proceedings 27. 1908/09 (1909).

Eichstätt Historischer Verein: Sammelblatt 23. 1908 (1909).

Eisenberg Geschichts- und Altertumsforschender Verein: Mitteilungen 4 4/5. (24/25) 1909.

Elberfeld Bergischer Geschichtsverein: Zeitschrift 41. 1908.

Erfurt Verein für die Geschichte und Altertumskunde von Erfurt: Mitteilungen 29. 1908.

Erfurt K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften: Jahrbücher 34. 1908.

Erlangen Physikalisch-Medizinische Societät: Sitzungsberichte 39. 1907 (1908). 40. 1908 (1909).

— Festschrift der Physikalisch-Medizinischen Societät zu Erlangen zur Feier ihres hundertjährigen Bestehens 1908.

Florenz Biblioteca nazionale centrale: Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa 97—108. 1909.

Frankfurt a. M. Physikalischer Verein: Jahresbericht 1907/08 (1909).

Digitized by Google

Frankfurt a. M. (Physikalischer Verein) Der Neubau des Physikalischen Vereins und seine Eröffnungsfeier am 11. Januar 1908. 1908.

Freiburg i. B. Kirchengeschichtlicher Verein für Geschichte, christliche Kunst, Altertums- und Literaturkunde des Erzbistums Freiburg: Freiburger Diözesan-Archiv N. F. 10 (37). 1909.

Genf Société d'histoire et d'archéologie de Genève: Bulletin 3 s. 4. 1908—09.

Genf Société de physique et d'histoire naturelle de Genève: Mémoires 36 1. 1909.

Genf Conservatoire et jardin botanique: Annuaire 11/12. 1908.

Genf Institut national: Mémoires 19. 1901—09 (1909).

Giessen Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde: Bericht Med. Abtlg. N. F. 3. 4. 1908. Naturwiss. Abt. N. F. 2. 1907—08 (1908).

Giessen Oberhessischer Geschichtsverein: Mitteilungen 16. 1908.

Glasgow University: A. Catalogue of the manuscripts in the Library of the Hunterian Museum. Planned and begun by the late John Young. Contin. and compl. by P. H. Aitkin 1908.

Görlitz Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften: Neues Lausitzisches Magazin 85. 1909.

— Codex diplomaticus Lusatiae superioris 35. 1909.

— W. Steitz: Friedrich von Uechtritz als dramatischer Dichter 1909.

— R. Doehler: Geschichte der Rittergüter und Dörfer Lomnitz und Bohra im Görlitzer und Laubaner Kreise 1908.

— W. Scheibe: Die baugeschichtliche Entwicklung von Kamenz 1908.

Göteborg Högskola: Årsskrift 13. 1907. 14. 1908.

Göteborg K. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhället: Nya Handlingar 4. f. h. 10. 1907 m. Bihang 1907. 11. 1908 m. Bihang 1908.

Granville, Ohio Denison University: Bulletin of the scientific laboratories 14 1—6. 1908—09.

Graz Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark: Mitteilungen 45. 1908.

Graz Historischer Verein für Steiermark: Zeitschrift 6. 1908.

— Beiträge zur Erforschung steirischer Geschichte 36. 1908.

— Jubiläums-Festschrift zur Erinnerung an das Jahr 1809. 1909.

Greifswald Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein: Pommersche Jahrbücher 10. 1909.

Greifswald Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern und Rügen: Mitteilungen 40. 1908 (1909).

Digitized by Google

Haag K. Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië: Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië 7. volgr. 8 (62). 9 (63) 1/2. 1909.

— Catalogus der Koloniale Bibliothek 1. Opgave van aanwinsten 1909.

Haarlem Hollandsche maatschappij der wetenschappen: Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles 2. sér. 14. 1909.

Haarlem Musée Teyler: Archives 2. sér. 11 3. 1909.

— Catalogue du Cabinet Numismatique de la Fondation Teyler 2. éd. 1909.

Halifax Nova Scotian Institute of natural science: Proceedings and Transactions 11 3. 4. 1904—05. 12 1. 1906.

Halle Ksl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher: Abhandlungen (Nova acta) 88. 89. 1908.

— Leopoldina 44. 1908 12. 45. 1909.

Halle Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen: Zeitschrift für Naturwissenschaften 80 3—6. 81 1—4. 1908—09.

Halle Deutsche Morgenländische Gesellschaft: Zeitschrift 62. 1908 4. 63. 1909 1—3.

Hamburg Mathematische Gesellschaft: Mitteilungen 4 9. 1909.

Hamburg Naturwissenschaftlicher Verein: Verhandlungen N. F. 17. 1908 (1909).

Hamburg Sternwarte: Jahresbericht 1907 (1908). 1908 (1909).

Hamburg Deutsche Seewarte: Jahresbericht über die Tätigkeit 31. 1908.

Hamburg Verein für Hamburgische Geschichte: Mitteilungen 28. 1908.

— Zeitschrift 14 1. 1908.

Hanau Wetterauische Gesellschaft für die gesamte Naturkunde: Lucanus, C.: Festschrift zur Feier des hundertjährigen Bestehens 1908.

Hannover Niedersächsischer geologischer Verein: Jahresbericht 1. 1908 (1909).

Hanoï École française d'extrême-orient: Bulletin 8 3/4. 9 1—3. 1909.

Heidelberg Grhzgl. Sternwarte (Astrometrisches Institut): Mitteilungen 13—18. 1908—1909.

— Veröffentlichungen 5. 1909.

Heidelberg Historisch-Philosophischer Verein: Neue Heidelberger Jahrbücher 16 1. 1909.

Heidelberg Naturhistorisch-medizinischer Verein: Verhandlungen 8 5. 9. 10 2. 1908—09.

Digitized by Google

Helsingfors Finska vetenskaps societeten: Acta 33. 1908. 34. 1907. 37 1. 5. 1909.
— Öfversigt af Förhandlingar 48—51. 1905/06—1908/09.
— Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk 64—66. 1907—08.
— État des glaciers et des neiges en Finland pendant l'hiver 1896/97 (1908). 1897/98 (1909).
— Hydrographisch-biologische Untersuchungen 1—5. 1907—1909.
— Festschrift Herrn Prof. Dr. Palmén zu seinem 60. Geburtstag gewidmet von Schülern und Kollegen 2 Bde. 1905—1907.
Helsingfors Societas pro fauna et flora Fennica: Acta 29—32. 1904—1909.
— Meddelanden 33. 1907. 34. 1908.
Helsingfors Sällskapet för Finlands geografi: Fennia 23—27. 1905—1909.
— Gebhard, H.: Atlas de statistique sociale sur les communes rurales de Finlande en 1901. 1908.
Helsingfors Meteorologische Zentralanstalt: Meteorologisches Jahrbuch für Finland 2. 1902 (1909).
Helsingfors Subkomitén för den obesuttna befolkningen: Statistisk undersökning af socialekonomiska förhållanden i Finlands landskommuner år 1901. III. H. Gebhard: Den ondlade jordarealen och dess fördelning 1908.
Hermannstadt Verein für Siebenbürgische Landeskunde: Archiv N. F. 36 1. 2. 4. 1909.
Hermannstadt Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften: Verhandlungen und Mitteilungen 58. 1908 (1909).
Jassy Universitatea: Annales scientifiques 5 3. 4. 1908. 6 1. 1909.
Jefferson City Missouri Bureau of geology and mines: 2. ser. Vol. 5—8. 9 1. 2. s. a.
Ithaca Cornell University: The journal of physical chemistry 13. 1909.
Kahla Verein für Geschichte und Altertumskunde: Mitteilungen 7 1. 1909.
Kalkutta Geological survey of India: Memoirs 37 1—3. 1909. Palaeontologia Indica 15. ser. 6 1. 2. 1909. New ser. 2 4. 5. 3 3. 1908.
— Records 37 2—4. 1908—09. 38 1—3. 1909.
Kalkutta Archaeological survey of India: Annual report 1905—06 (1909).
Kalkutta Archaeological survey of India, Eastern circle: Annual report 1906—07. 1907—08.
Kalkutta Mathematical society: Bulletin 1 1. 1909.
Kalkutta Board of scientific advice for India: Annual report 1906—07 (1908). 1907—08 (1909).

Digitized by Google

Kopstedt R. Society of South-Africa (früher: South African philosophical society): Transactions 1 1. 1909.

Kasan Имп. Университетъ: Ученыя записки 75. 1908 12. 76. 1909 1—11.

— Извѣстія физико-математическаго общества (Bulletin de la société physico-mathématique) 2. сер. (sér.) 16 2. 1908.

Kássel Verein für hessische Geschichte und Landeskunde: Zeitschrift N. F. 32. 1909.

Kassel Verein für Naturkunde: Abhandlungen und Bericht über das 72. und 73. Vereinsjahr 1907—09.

Kempten Historischer Verein zur Förderung der gesamten Heimatkunde des Allgäus: Satzungen 1909.

— Geschäftsordnung 1909.

— Allgäuer Geschichtsfreund 1909.

— Beiträge zum Allgäuer Geschichtsfreund 1. Erhard, O.: Der Bauernkrieg in der gefürsteten Grafschaft Kempten 1909.

Kiel Gesellschaft für Schleswig-Holsteinische Geschichte: Zeitschrift 39. 1909.

Klagenfurt Geschichtsverein für Kärnthen: Jahresbericht 1907 u. Voranschlag 1908 (1908).

— Carinthia 98. 1908.

Köln Historischer Verein für den Niederrhein: Annalen 87. 1909.

Königsberg i. Pr. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft: Schriften 49. 1908.

Kopenhagen Det K. Danske Videnskabernes Selskab: Skrifter. Histor. og filosof. Afdlg. 7. R. 1 3. 1909. — Naturvidensk. og mathem. Afdlg. 7. R. 6 3. 7 1. 8 1—3. 1909.

— Oversigt over Forhandlinger (Bulletin) 1908 6. 1909 1—5.

Krakau Akademia umiejętnosci: Anzeiger (Bulletin international) Philol. Kl. & Histor.-philos. Kl. (Cl. de philol. & Cl. d'hist. et de philos.) 1908 6—10. 1909 1—5. Mathem.-naturwiss. Kl. (Cl. des sciences mathém. et natur.) 1908 9. 1909 1—8.

— Catalogue of the Polish scientific literature. Katalog literatury naukowej Polskij wydawany przez komisyę bibliograficzną wydziału matematyczno — przyrodniczego 8. 1908 1/2. 9. 1909 1—4.

Kyoto Imp. University, College of science and engineering: Memoirs 4. 1908.

Lahore Superintendent of the archaeological survey, Northern circle: Annual Pogress-Report for the year ending 31. march. 1908.

Digitized by Google

Laibach Musealverein für Krain (Muzejsko društvo za Kranjsko): Carniola 1. 1908.
— Izvestja 18. 1908.
Leiden Maatschappij der Nederlandsche letterkunde: Handelingen en mededeelingen 1908/09 (1909). Bijl.: Levensberichten der afgestorven medeleden 1909.
— Tijdschrift voor nederlandsche taal- en letterkunde 27 (n. r. 19) 1908. 28 (n. r. 20) 1909 1. 2.
— Nederlandsche volksboeken 11. 1908.
Leiden Sternwarte: Verslag van den staat 1906—1908 (1909).
Leipzig K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften: Abhandlungen Philol.-histor. Kl. 26 3—5. 27. 1909. Mathem.-phys. Kl. 30 5. 6. 31. 32 1. 1909.
— Berichte über die Verhandlungen Philol.-histor. Kl. 60. 1908 4—8. 61. 1909 1. 2. Mathem.-phys. Kl. 60. 1908 6—8. 61. 1909 1—3.
Leipzig Fürstl. Jablonowskische Gesellschaft: Preisschriften 38. 1909.
Leipzig Naturforschende Gesellschaft: Sitzungsberichte 34. 1907 (1908). 35. 1908 (1909).
Leisnig Geschichts- und Altertumsverein: Mitteilungen 13. 1908.
Lemberg Ukrainische Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften: Chronik 1908 1. 2.
— Записки 1909 1—4.
— Зырник математично-природописно-лїкарскої-секциї 12. 1908.
Lemberg Towarzystwo ludoznawczy: Lud 14. 1908 4. 15. 1909 1—3.
Lemberg Société polonaise pour l'avancement des sciences: Bulletin 1—8. 1901—1908.
Lincoln University of Nebrasca: Studies 8 2—4. 1908. 9 1—3. 1909.
Linz Museum Francisco-Carolinum: Jahres-Bericht 67. 1909.
Lissabon Société portugaise de sciences naturelles: Bulletin 2. 1908.
Liverpool Biological society: Proceedings and transactions 23. 1908/09 (1909).
London R. Society: Philosophical transactions A 209 pag. 205—478. 210 pag. 1—34. 1909. B 200 pag. 241—521. 1909.
— Proceedings A 81 no. 550. 1908. 82 no. 551—558. 83 no. 559. 560. 1909. B 80 no. 544. 1908. 81 no. 545—551. 82 no. 552. 1909.
— Year Book 13. 1909.
— Reports to the Evolution Committee 4. 1908.
— National Antarctic Expedition 1901—1904. Magnetic observations 1909.
— Beattie, J. C.: Report of a magnetic survey of South Africa 1909.

Digitized by Google

London Mathematical society: Proceedings 2. ser. 6. 1908 $_{7}$. 7. 1909. 8. 1910 $_{1}$.

London R. astronomical society: Monthly notices 69 $_{3-9}$. 70 $_{1}$. 1909.

— Memoirs 57 $_{3.4}$. Appendix $_{2}$. 1908. 58. 1908. 59 $_{1-3}$. 1908—09.

London R. microscopial society: Journal 1909.

London Linnean society: Transactions 2. ser. Botany 7 $_{10-12}$. 1908—09. Zoology 11 $_{1-5}$. 1908—09. 12 $_{4/5}$. 1909.

— Proceedings 1908/09 (1909).

— Journal Botany 38 no. 268—271. 1909. Zoology 30 no. 199. 200. 31 no. 205. 206. 1909.

— List 1909/10 (1909).

London Zoological society: Transactions 19 $_{1-3}$. 1909.

— Proceedings of the general meetings for scientific business 1908 $_{4}$. 1909 $_{1-3}$.

London Guy's Hospital: Reports 62. 1909.

London Sir William Huggins's Observatory: Publications 2. 1909.

London Secretary of the Admiralty: Report of His Majesty's Astronomer at the Cape of Good Hope 1906 (1907).

London Colonial Office: Report on Plague in the Gold Coast in 1908. By W. J. Simpson 1909.

London India Office: Baluchistan district gazetteer series Index to Vol. 1—8. Ajmer 1908.

— Bengal district gazetteers. Calcutta. — Puri 1908. Bankura 1908. Khulna 1908. Sambalpur 1909. Monghyr 1909. Chittagong Hill Tracts 1909.

— Madras district gazetteers. Madras. — Malabar and Anjengo 1908.

— Central provinces district gazetteers. Allahabad. — Hoshangabad Vol. A. 1908. Nagpur Vol. A. 1909. Yeotmal Vol. A. 1908. Corrigenda and Addenda 1—53. 1908—09.

— N(orth) W(est) F(rontier) Province. District gazetteers. Peshawar. — Peshawar Vol. B. Statistical tables 1904 (1908). Dera Ismail Khen Vol. B. Statistical tables 1904 (1908). Kurram Agency 1908.

— District gazetteers of the united provinces of Agra and Oudh. Allahabad. Vol. 14. 1908. 26. 29. 1909.

— Punjab district gazetteers. Lahore. Vol. 2 A. 1904 (1908). 3 A. 1904 (1908). 4 B. 1904 (1908). 6 B. 1904 (1908). 7 A. B. 8 A. B. 1904 (1908). 10 B. 1904 (1908). 12 A. 1904 (1908). 14 A. B. 1904 (1908). 15 A. 1904 (1907). 16 A. 1907 (1909). 16 B. 1904 (1908). 17 A. 1904 (1909) B. 1904 (1908). 20 B. 1904. 21 B. 1904 (1908). 25 B. 1904 (1908). 28 B. 1907 (1909). 32 B.

Digitized by Google

1904 (1908) 33 B. 1904 (1908). 35 B. 1904 (1905). 36 A. 36 A. 1904 (1908).

London India Office: Local gazetteer. The Andaman and Nicobar Islands. Calcutta 1908.

— Rajputana gazetteers. Vol. 2 A. B. 3 A. B. Allahabad 1908—09.

— Burrard, S. G. and H. H. Heyden: A sketch of the geography and geology of the Himalaya mountains and Tibet P. 4. Calcutta 1908.

Lübeck Verein für Lübeckische Geschichte und Altertumskunde: Zeitschrift 11 1/2. 1909.

Lüttich Société géologique de Belgique: Annales 35 4. 36. 1909.

Lund Universität: Acta N. S. Afd. 1. T. 1—4. 1905—1908. Afd. 2. T. 4. 1908.

Luxemburg Institut g.-duc.: Publications de la Section historique 56. 57. 1909.

Luzern Historischer Verein der fünf Orte Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden und Zug: Geschichtsfreund 64. 1909.

Lyon Université: Annales n. s. I. Sciences, Médecine 22. 1908. 24. 1909. Droit, Lettres 20. 1908.

— Bulletin historique du diocèse de Lyon 8. 1907 48. 9. 1908. 10. 1909.

Lyon Société d'agriculture: Annales 8. sér. 1907 (1908).

Madison Academy of sciences, arts and letters: Transactions 16. 1909.

Madison Wisconsin geological and natural history survey: Bulletin 20. 1908. 14 Suppl. 1909.

Madison Washburn Observatory of the University of Wisconsin: Publications 12. 1908.

Madrid R. Academia de la historia: Boletín 54. 55 1—5. 1909.

Madrid R. Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales: Revista 7 5—12. 8 1. 1909.

— Memorias 26 1. 2. 1908.

Magdeburg Verein für Geschichte und Altertumskunde des Herzogtums und Erzstifts Magdeburg: Geschichtsblätter für Stadt und Land Magdeburg 43. 1908.

Magdeburg Museum für Natur- und Heimatkunde: Abhandlungen und Berichte 1. 1906—08.

Mailand R. Istituto Lombardo di scienze e lettere: Atti della fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi 22. 1909.

— Rendiconti 41. 1908 17—20. 42. 1909 1—16.

Manchester Literary and philosophical society: Memoirs and proceedings 53. 1909.

Digitized by Google

Manchester University: Publications. Economic series 11. 12. 1909. Historical series 8. 1909.
— Lectures No. 9. 1908. 10. 1909.
Mannheim Altertumsverein: Mannheimer Geschichtsblätter 10. 1909.
— Vereinsgabe für 1908. Katalog der vom Mannheimer Altertumsverein anläßlich seines fünfzigjährigen Jubiläums ... veranstalteten Ausstellung von Werken der Kleinporträtkunst und kunstgewerblicher Erzeugnisse aus der Zeit von 1750—1850. 1909.
Maredsous Abbaye: Revue Bénédictine 26. 1909.
Marseille Faculté des sciences: Annales 17. 1909.
Meiningen Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte und Landeskunde: Schriften 58. 59. 1909.
Meissen Verein für Geschichte der Stadt Meissen: Mitteilungen 7 4. 1907.
Melbourne R. Society of Victoria: Proceedings 21 2. 22 1. 1909.
Melbourne Secretary for Mines and Water Supply: Annual report 1908.
Metz Gesellschaft für lothringische Geschichte und Altertumskunde: Jahrbuch 20. 1908.
Mexiko Instituto geológico: Observatorio meteorológico central. Boletín mensual 1904 abril. nov. dic. 1905 enero. 1908 agosto-dic. 1909 enero-abril.
— Parergones 2 7—10. 1908—09. 3 1. 2. 1909.
Mexiko Sociedad científia „Antonio Alzate": Memorias (Mémoires) 25. 1907 4—12. 26. 1907—08 6—12 y Revista (Revue) 26. 1907—08 10—12.
Mexiko Secretaria de Fomento, Colonizacion e Industria: Boletín 26. 1908.
Missoula University of Montana: Bulletin 50—54. 58. 1908—09.
Mölln Verein für die Geschichte des Herzogtums Lauenburg: Archiv (Vaterländisches Archiv f. d. Herzogtum Lauenburg N. F. 12) 2. 1909.
Montpellier Académie des sciences et lettres: Bulletin mensuel 1909 1—3.
Moskau Société imp. des naturalistes: Bulletin 1907 4. 1908 1. 2.
Moskau Математической общество: Математическій сборникъ 27 1. 1909.
Moskau Метеорологической обсерваторія Имп. Университета: Наблюденія 1905. 1906. 1907 (1908).
München K. Bayer. Akademie der Wissenschaften: Sitzungsberichte Philos.-philol. u. Histor. Kl. 1908 7—11. 1909 1—6. Mathem.-physik. Kl. 1908 2. 1909 1—14.

Digitized by Google

— Abhandlungen Histor. Kl. 24 3. 1909. Philos.-philol. Kl. 23 3. 24 3. 1909. Philos.-philol. u. Histor. Kl. 25 1. 1909. Mathem.-physik. Kl. 23 3. 24 2. 1909. Suppl.-Bd. 1 1—6. 2 1. 1909.

— Almanach zum 150jährigen Stiftungsfest 1909.

— Grauert, H.: Dante und die Idee des Weltfriedens. Festrede am 14. XII. 1907 (1909).

— Prutz, H.: Der Anteil der geistlichen Ritterorden am geistigen Leben ihrer Zeit. Festrede am 14. XI. 1908 (1909).

— Heigel, K. Th.: Die Münchner Akademie von 1759—1909. Festrede geh. zur Feier des 150jährigen Stiftungstages am 10. März 1909.

— Neue Annalen der K. Sternwarte 4. 1909.

— Veröffentlichungen des Erdmagnetischen Observatoriums 2. 1909.

München Hof- und Staats-Bibliothek: Catalogus codicum manu scriptorum T. 5. 1909.

München Technische Hochschule: 75 Dissertationen 1907/08.

München Historischer Verein von Oberbayern: Oberbayerisches Archiv für vaterländische Geschichte 52 3. 1907. 53 1. 1908. 54 1. 1909.

— Altbayerische Monatschrift 7. 1907. 8. 1908. 9 1/2. 1909.

Neapel Societá R.: Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche 3. ser. 14 (a. 47) 1908 8—12. 15 (a. 48) 1909 1—7.

Neisse Philomathie: Bericht 34. 1906—08.

Neuburg a. D. Historischer Verein: Neuburger Kollektaneenblatt für die Geschichte Bayerns insbesondere des ehemaligen Herzogtums Neuburg 70. 1906.

New Haven Connecticut Academy of arts and sciences: Transactions 14 pag. 18—290. 1908. 15. 1909. (To the University of Leipzig on the occasion of the 500th Anniversary of its foundation from Yale University and the Connecticut Academy of arts and sciences.)

New Haven American oriental society: Journal 29. 30 1. 1909.

New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history): Annals 18 3. 1909.

New York American mathematical society: Bulletin 15 4—10. 16 1—3. 1909.

— Annual register 1909.

New York American geographical society: Bulletin 40. 1908 12. 41. 1909 1—11.

Nizza Observatoire: Annales 11. 13 1. 1908.

Digitized by Google

Nürnberg Germanisches Nationalmuseum: Anzeiger (& Mitteilungen) 1908.

Nürnberg Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg: Jahresbericht 31. 1908 (1909).

Odessa Новороссійской Общество Естествоиспытателей: Записки 30. 1907. 31. 1908.

Ottawa Canada Department of Mines. Geological Survey: No. 980/1081. 983. 1013. 1021. 1035. 1050. 1072. 1073. 1075. 1085. 1909. Maps No. 604. 669. 770. 915. 1909.

— Contributions to Canadian Palaeontology Vol. 3 (4°) P. 4 The Vertebrata of the Oligocene of the Cypress Hills, Saskatchewan. By L. M. Lambe 1908.

— Mines Branch. Annual report of the mineral production of Canada. During the Calendar-Year 1906 (1909).

Palermo Circolo matematico: Rendiconti 27. 28. 1909. Supplemento 3. 1908 5/6.

— Indice delle pubblicazioni No. 2. (Rendiconti 1—28. Supplemento 1—3.) 1909.

— Annuario 1909.

Palermo Società di scienze naturali ed economiche: Giornale di scienze naturali ed economiche 26. 1908. 27. 1909.

Paris Institut de France: Annuaire 1909.

— Pâris, Edm.: Souvenirs de Marine 6. 1908.

Paris Société mathématique de France: Bulletin 37. 1909.

Paris Musée Guimet: Annales 31 1. 1907. 32 2. 1908. Bibliothèque d'études 25. 1908.

— Revue de l'histoire des religions a. 29. 1908 t. 57 2. 3. 58.

Peshawar Archaeological survey of India. Frontier circle: Annual report 1908—09.

Philadelphia American philosophical society: Proceedings 47. 1908 190. 48. 1909 191. 192.

— The Record of the Celebration of the 200th Anniversary of the birthday of Benjamin Franklin Vol. 2—6. 1908.

Philadelphia Academy of natural sciences: Proceedings 60. 1908 3. 61. 1909 1.

Philadelphia American academy of political and social science: Annals 33. 34. 1909.

Philadelphia Geographical society: Bulletin 7. 1909.

Philadelphia University of Pennsylvania: Bulletin 9. ser. 5 2. 1909. Catalogue 1908/09 (1909). Proceedings of University Day 1909.

Pisa Società Toscana di scienze: Atti Memorie 24. 1908. Processi verbali 18. 1908/09 1—4.

Digitized by Google

Pisa R. Scuola normale superiore: Annali. Filosofia e filologia 21. 1908. Scienze fisiche e matematiche 10. 1908.

Portici R. Scuola superiore d'agricoltura: Bollettino del laboratorio di zoologia generale e agraria 3. 1909.

Porto Academia polytechnica: Annaes scientificos 3 3. 4. 1908. 4. 1909.

Posen Historische Gesellschaft für die Provinz Posen: Zeitschrift 23. 1908.

— Historische Monatsblätter für die Provinz Posen 9. 1908.

Potsdam Astrophysikalisches Observatorium: Publikationen 19 1. 20 2—4. 1909.

— Photographische Himmelskarte. Ergänzungen und Berichtigungen zu Bd. 1—4. 1908.

Potsdam K. Preuß. Geodätisches Institut: Zentralbureau der internationalen Erdmessung. Veröffentlichungen N. F. 17. 18. 1909.

Prag K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften: Jahresbericht 1908 (1909).

— Sitzungsberichte Kl. f. Philos., Geschichte u. Philol. 1908 (1909). Mathem.-naturwiss. Kl. 1908 (1909).

Prag Landesarchiv des Königreichs Böhmen: Mitteilungen 2. 1908.

Prag Export-Verein für Böhmen, Mähren und Schlesien: Jahresbericht 17. 1908. Anhang: Kongreß österreichischer Export-Vereine am 15. u. 16. Juni 1908 in Prag (1909).

Prag Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen: Lotos 56. 1908 1—10.

Prag Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen: Mitteilungen 47. 1909.

Prag K. K. Sternwarte: Magnetische und meteorologische Beobachtungen 69. 1908 (1909).

Pressburg Verein für Natur- und Heilkunde: Verhandlungen 18. 1906 (1908). 19. 1907 (1909).

— 1856—1909. Emlekmü kiadja a Pozsonyi orvos-természettudományi egyesület fennállásának ötvenedik evfordulója alhalmából.

Pusa Department of agriculture in India: Memoirs Chemical series 1 7. 1909. Entomological ser. 2 7. 1909. Botanical ser. 2 6—8. 1909.

Rennes Société scientifique et médicale de l'ouest: Bulletin 17. 1908 2—4.

Rennes Faculté des lettres de l'Université: Annales de Bretagne 23 4. 1908. 24. 1908—09..

Riga Naturforschender Verein: Korrespondenzblatt 51. 1908.

Digitized by Google

Rom R. Accademia dei Lincei: Atti. Cl. di scienze fis., matem. e natur. Rendiconti 5. ser. vol. 17. 1908. 2. sem. 11. 12. vol. 18. 1909. 1. sem. 2. sem. 1—11. Memorie 5. ser. vol. 7. 1908 1—10. Cl. di scienze mor., stor. e filol. Rendiconti 5. ser. vol. 17. 1908 7—12. vol. 18. 1909 1—3. Memorie vol. 12. 13. 1906. 14. 1—2. 1909. Notizie degli scavi di antichità 5. ser. vol. 5. 1908 9—12. 6. 1909 1—8. Rendiconto dell' adunanza solenne 1909.

Rom R. Società Romana di storia patria: Archivio 31 3/4. 1908. 32 1/2. 1909.

Rom Società italiana per il progresso delle scienze: Riunione 2. 1908.

Rom Ministero della p. istruzione: Bolletino d'arte 2. 1908 12. 3. 1909 1—11.

Rostock Verein für Rostocks Altertümer: Beiträge zur Geschichte der Stadt Rostock 5 1. 2. 1909.

Saint Louis Missouri botanical garden: Annual report 19. 1908.

Salzwedel Altmärkischer Verein für vaterländische Geschichte und Industrie: Jahresbericht 36. 1909.

San Francisco Citizens' Health Committee: Eradicating Plague from San Francisco. Report of the C. H. C. and an account of its work 1909.

San Francisco California Academy of sciences: Proceedings 4. ser. 3 41—43. 1908.

Sankt Gallen Historischer Verein: Mitteilungen 30 2. 1908.

— Neujahrsblatt 1908. 1909.

Sankt Petersburg Имп. Академія наукъ (Académie imp. des sciences): Извѣстія (Bulletin). 1909.

— Извѣстія отдѣленія русскаго языка и словесности 13. 1908 2—4.

— Записки (Memoires): По историко-филологическому отдѣленію (Cl. hist. philol.) 8. sér. 8. 9 1. 1906—08. По физико-математическому отдѣленію (Cl. physico-mathém.) 8. sér. 18 7. 8. 10—13. 21 3. 22. 23 1—6. 1908.

— Сборникъ отдѣленія русскаго языка и словесности 84. 85. 1908.

— *Βυζαντινὰ χρονικὰ* 14 2/3. 1908.

— Observatoire physique central Nicolas. Annales Année 1905. 1906 p. 1. 2 1. 2. Publications 2. sér. 16 2. 18 3. 1908. 5. Extrait 1908. 19. Extrait 1908.

— Ежегодникъ зоологическаго музея (Annuaire du musée zoologique) 13 4. 1908. 14 1. 2. 1909.

— Missions scientifiques pour la mesure d'un arc du méridien au Spitzberg entreprises en 1899—1901 sous les auspices des gou-

Digitized by Google

vernements Russe et Suédois. Mission Russe T. I. Sect. II Travaux aux diverses stations. B. Observations de A. S. Wassiliew 1. 1909. T. II. Sect. IX. Physique terrestre. Météorologie. Histoire naturelle. B. Géologie 2. 1908.

— **Извѣстія постоянной центральной сейсмической комиссіи** 3 1. 2. 1908—09.

— Lorentz, Friedr.: Slovinzisches Wörterbuch 1. 1908.

Sankt Petersburg Имп. Русск. географическое общество: Извѣстія 44 9. 45. 1909 1—10.

— **Отчетъ** 1908 (1909).

— **Извѣстія туркестанскаго отдѣла** 4 7. 1907.

Sankt Petersburg Духовная академія: Церковный вестникъ 34. 1908 44—52. 35. 1909 1—43. **Прилож.: Христіанское чтеніе** 88. 1908 **августъ—дек.** 89. 1909. **январь—сент.**

Sankt Petersburg Société des chemins de fer Chinois de l'Est: Observations météorologiques en Mandchouri fasc. I. Observations faites à la Station météorologique de Kharbin 1898—1906 (1909).

Sao Paolo Sociedad scientifica: Revista 2. 1907 3—12. 3. 1908 9—12.

Sarajevo Bosnisch-herzegovinische Landesregierung: Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien-Herzegovina 1906 u. 1907. Wien (1908).

Siena R. Accademia dei rozzi: Bullettino Senese di storia patria 16 1. 1909.

Stavanger Museum: Aarshefte 19. 1908 (1909).

Stockholm K. Svenska vetenskaps-akademien: Handlingar n. f. 43 7—12. 44. 45 1. 2. 1909.

— Årsbok (7). 1909.

— Meddelanden från Nobelinstitut 1 12—15. 1909.

— Arkiv för matematik, astronomi och fysik 5. 1909.

— Arkiv för kemi, mineralogi och geologi 3 3. 1909.

— Arkiv för botanik 8. 9 1. 1909.

— Arkiv för zoologi 5. 1909.

— Les Prix Nobel 1906 (1908).

— Meteorologiska iakttagelser (Observations météorologiques Suédoises) 50 (2. sér. 36) 1908 u. Bihang 1. 1908.

— Lefnadsteckningar 4 4. 1909.

— C. v. Linné: Skrifter 4. 1908.

Stockholm K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademi: Fornvännen 2. 1907. 3. 1908.

— Antikvarisk Tidskrift 18 2. 1909.

Digitized by Google

Strassburg Historisch-literarischer Zweigverein des Vogesen-Clubs: Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Literatur Elsass-Lothringens 25. 1909.

Stuttgart Württ. Kommission für Landesgeschichte: Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte N. F. 18. 1909.

Sydney Geological survey of New South Wales: Records 8 4. 1909.

Sydney Australasian Association for the advancement of sciences: Report of the 11th meeting at Adelaide 1907.

Thorn Coppernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst: Mitteilungen 16. 1908.

Tokio Medizinische Fakultät der K. Japan. Universität: Mitteilungen 8 1. 2. 1908.

Tokio Imp. University: The Calendar 2569—70 (1909—10).

— Journal of the College of science 24. 1908. 26. 27 1—6. 1909.

Tokio Sugaku-Butsurigakkwa (Physico-mathematical society): Kizi-Gayo (Proceedings) 4 20—22. 5 1—8. 1909.

Tokio Earthquake investigation committee: Bulletin 2 3. 3 1. 2. 1909.

Tokio Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mitteilungen 11 4. 1908. 12 1. 1909.

Toronto Canadian Institute: Transactions 8 3. 1909.

Toulouse Faculté des sciences de l'Université: Annales 2. sér. 10. 1908 2. 3.

Tromsø Museum: Aarshefter 29. 1906.

Triest J. R. Osservatorio Marittimo: Rapporto contenente le osservazioni di Trieste e di alcune altre stationi Adriatiche 22. 1905 (1909).

Turin R. Accademia delle scienze: Atti 44. 1908/09.

— Memorie 59. 1909.

Uccle Observatoire r. de Belgique: Annales astronomiques 10. 11 1. 2. 1907.

— Annuaire astronomique pour 1909 (1908).

— Annuaire météorologique 1909 (1908).

Upsala R. Societas scientiarum: Nova Acta Ser. IV. Vol. 2 1. 1907.

Upsala Observatoire météorologique de l'Université: Bulletin mensuel 40. 1908 (1908—09).

Urbana Illinois State Geological Survey: Bulletin 9. 1908.

Utrecht K. Nederlandsch Meteorologisch Instituut: Meteorologisch jaarboek 59 A. B. 1907.

— Mededeelingen en Verhandelingen 102 6. 7. 1908—09.

Warschau Towarzystwo naukowego: Sprawozdania z posiedzeń 1. 1908. 2. 1909 1—7.

— Prace III Wydział nauk mat. i przyrod 1. 1908.

Digitized by Google

Washington Philosophical society: Bulletin 15 103—131. 1909.
Washington Carnegie institution: Publication 85 s. 4. 87 Atlas. 93. 96—99. 102—104. 106. 107. 110—114. 117. 118. 1908—09.
— Yearbook 7. 1908 (1909).
— Department of Terrestrial Magnetism. Annual report of the director. 1908.
Washington Smithsonian Institution: Bulletin of the United States National Museum 62—65. 67. 1909.
— Proceedings of the United States National Museum 34—36. 1909.
— Report of the United States National Museum 1907 (1908). 1908 (1909).
— Contributions from the United States Natianal Herbarium 12 5—10. 13 1. 1909.
— Becker, G. F. and C. E. van Orstrand: Hyperbolic functions 1909. (Smithsonian Mathematical Tables.).
Washington U. S. coast and geodetic survey: Report of the superintendent 1907/08 (1908).
Washington U. S. Naval observatory: Report of the superintendent for the fiscal year 1908.
Washington U. S. geological survey: Bulletin 341. 347. 349. 351—385. 387. 388. 394. 1908—09.
— Annual report 29. 1908.
— Professional paper 58—61. 63. 1908—1909.
— Water supply and irrigation papers 223—226. 228—231. 234. 1909.
— Mineral resources of the United States 1907 1. 2. (1908).
— Geological atlas of the United States 151—159. 1907—08.
Washington Department of agriculture: Monthly weather review 36 10—13. 37 1—6. 1909.
— Bulletin of the Mount Weather Observatory 1 4. 2 1. 2. 1909.
Washington U. S. Department of commerce and labour: Hypsometry. Precise leveling in the U. S. 1903—1907. With a readjustment of the level net and resulting observations by J. F. Hayford and L. Pike 1909.
— Hayford, J. F.: The figure of the earth and isostasy from measurements in the United States 1909.
Washington Library of Congress: Bulletin Card Section 15. 2. ed. 1909.
— Hastings, Ch. H.: Library of Congress. Printed cards how to order and use them 1909.
Washington Bureau of standards: Bulletin 5 3. 1909.

Digitized by Google

Wien Ksl. Akademie der Wissenschaften: Almanach 58. 1908.
— Denkschriften Philos.-histor. Kl. 53 1. 2. 1908.
— Sitzungsberichte Philos.-histor. Kl. 158 4—6. 160 2—8. 161 3—5. 7—9. 162 1. 163 1. 2. 1908—09. Register zu Bd. 151—160. 1909. Mathem.-naturwiss. Kl. Abt. 1. 1908. 117 5—10. 1909. 118 1—6. Abt. 2 a. 1908. 117 7—10. 1909. 118 1—5. Abt. 2 b. 1908. 117 7—10. 1909. 118 1—7. Abt. 3. 1908. 117 6—10. 1909. 118 1. 2.
— Archiv für österreichische Geschichte 97. 1909. 99 1. 1908.
— Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichts-Quellen. Hrsg. von der Historischen Kommission der Ksl. Akademie. 2. Abtlg. Diplomataria et Acta 61. 62. 1909.
— Mitteilungen der Erdbeben-Kommission N. F. 32—36. 1908—09.
Wien Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse: Schriften 49. 1908/06 (1909).
Wien K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft: Verhandlungen 58. 1908.
Wien K. K. Oesterreichische Kommission für die Internationale Erdmessung: Verhandlungen Protokoll über die 1907 und 1908 abgehaltenen Sitzungen (1908).
Wien K. K. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik: Jahrbücher 1907. N. F. 44 & Anhg. 1909.
— Meteorologische Zeitschrift 25. 1908 12. 26. 1909 1—11.
— Allgemeiner Bericht und Chronologie der in Oesterreich beobachteten Erdbeben 4. 1909.
— Klimatographie von Oesterreich 1. 1904. 2 A. 1908. 3. 4. 1909.
Wien K. K. Geologische Reichsanstalt: Verhandlungen 1908 15—18. 1909 1—9.
— Abhandlungen 21 1. 1908.
— Jahrbuch 1908 3. 4. 1909 1. 2.
Wien K. K. Militär-Geographisches Institut: Astronomisch-geodätische Arbeiten 22. 1908.
Wien Export-Akademie des K. K. Handels-Ministeriums: Kolisch, L. Portugiesisches Lesebuch 1. 1909.
Wien v. Keuffnersche Sternwarte: Publikationen 6 5. 6. 1908—09.
— L. de Ball: Die Theorie der Drehung der Erde 1908. (Aus: Denkschriften der Ksl. Akademie der Wissenschaften Bd. 81.)
Wiesbaden Verein für Nassauische Altertumskunde und Geschichtsforschung: Annalen 38. 1908 (1909).
— Mitteilungen an seine Mitglieder 1908/09.
Wiesbaden Nassauischer Verein für Naturkunde: Jahrbücher 62. 1909.
Worms Altertumsverein: Vom Rhein 7. 1908. 8. 1909.

Digitized by Google

Würzburg Historischer Verein von Unterfranken und Aschaffenburg: Archiv 50. 1908.
— Jahresbericht 1907 (1908).
Würzburg Physikalisch-medizinische Gesellschaft: Verhandlungen N. F. 40 2—5. 1909.
— Sitzungsberichte 1907 s. 1908 1—5.
Zürich Antiquarische Gesellschaft: Mitteilungen 27 1. 1909.
Zürich Naturforschende Gesellschaft: Vierteljahrsschrift 53. 1908. 54. 1909 1 2.
Zürich Schweiz. Landesmuseum: Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde (Indicateur d'antiquités Suisses) N. F. 10. 1908 3. 4. 11. 1909 1. 2. u. Beil.
— Jahresbericht 17. 1908 (1909).
Zürich Sternwarte des Eidgenössischen Polytechnikums: Publikationen 4. 1909.

B. Anderweitig eingegangene Druckschriften.

Acta mathematica hrsg. v. G. Mittag-Leffler 32. Stockholm 1909.
Actes du 15e Congrès international des orientalistes. Session de Copenhague 1908. Copenhague 1909.
Barbetto E.: Cours de trigonométrie à l'usage des candidats aux écoles spéciales. 2. mille Gand 1905.
— Sur l'équivalence des équations. (Extrait de l'Enseignement Mathématique Ann. 10. 1908 No. 4.
Bauer L. A.: The magnetic work of the United States Coast and Geodetic Survey. s. a.
— Magnetic Observatories of the United States Coast and Geodetic Survey in Operation July 1, 1902. (With J. A. Fleming.)
— Magnetic Dip and Intensity Observations January, 1897, to June 30, 1902. (Preface by L. A. Bauer.)
— Results of Magnetic Observations made by the Coast and Geodetic Survey between July 1, 1902, and June 30, 1903; between July 1, 1903, and June 30, 1904; between July 1, 1904, and June 30, 1905; between July 1, 1905, and June 30, 1906.
— Distribution of the Magnetic Declination in the United States for January 1, 1905, with Isogonic Chart and Secular Change Tables.

Digitized by Google

Bauer L. A.: Recent Results of Terrestrial Magnetic Observations. (A Paper read before the Society of Arts of the Massachusetts Institute of Technology March 28, 1907.)

— Some Results of the Magnetic Survey of the United States s. a.

— United States Magnetic Tables and Magnetic Charts for 1905.

— The earliest values of the magnetic declination 1908.

Benfey, Meta: Theodor Benfey. Zum Andenken für seine Kinder und Enkel. Als Handschrift gedruckt (1909).

Brill, A.: Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Leipzig und Berlin 1909.

Brioschi, Franc.: Opere matematiche 5. Milano 1909.

Botàny of the Faröes based upon Danish investigations. Kjøbenhavn . . . London 1901—06.

Bourdon, P.: L'abrogation de la Pragmatique et les règles de la chancellerie de Pie II. Rome 1908.

Catenenstudien hrsg. von H. Lietzmannn. 1. O. Lang: Die Catene des Vaticanus Gr. 762 zum 1. Korintherbrief. Leipzig 1909.

Χατζιδάκις: *Βιβλιοκρισίαι Ιω. Βασιλικοῦ καὶ* K. Dieterich *καὶ νέα ἀντιλεγόμενα πρὸς τὸν* K. Krumbacher (Aus: *Ἀθηνᾶ* T. 20. 1908.)

Congrès international de botanique: 3. Congrès. Circulaires 3. 4 et Annexes. Bruxelles 1909.

Conti Rossini, C.: 45 Sonderabdrücke orientalistischen und geschichtlich-geographischen Inhalts.

Τεσσαρακονταέτηρις τῆς καθηγεσίας Κ. Σ. Κόντου φιλολογικαὶ διατριβαί. Ἀθήνησιν 1909.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 2, 3 H. 1. 3, 1 H. 3. 3, 2 H. 4. 5, 3 H. 1. 2. 6, 1 A H. 3. Leipzig 1909. (2 Expl.).

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées t. 1. vol. 1. fasc. 4. vol. 4. fasc. 2. 3. t. 2. vol. 1. fasc. 1. Paris & Leipzig 1909.

Swedish **explorations** in Spitzbergen 1758—1908. Stockholm 1908 (Repr. from Ymer 1903).

Flora Batava . . . Afbeelding en beschrijving van nederlandsch gewassen. Aangevangen door J. Kops, voortgeset door F. W. van Eeden. Afl. 357. 358. Leiden 1908.

Fritsche, H.: Die mittlere Temperatur der Luft im Meeresniveau dargestellt als Funktion der geographischen Länge, Breite und Jahreszeit. Meteorologische Publikation 1. Riga 1909.

Fuchs, L.: Gesamte Mathematische Werke 3. Berlin 1909.

Gyldén, H.: Traité analytique des orbits absolues des huit planètes principales 2. Berlin. Stockholm 1909.

Digitized by Google

Haton de la Goupillière: Mémoires divers 2. éd. Paris 1909.
— Potentiel du temps de parcours. Louvain 1909. Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles.
— La loi des aires dans le mouvement avec liaisons Lisbonne 1909. Extrait du Journal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes 2. ser. t. VII.
— Centre de gravité du temps de parcours. Coimbra 1906. Annaes da Academia polytechnica do Porto. Extracto do t. I. 1906.
— Rapport sur un mémoire de M. Haton de la Goupillière, intitulé: „Développoïdes directes et inverses d'ordres successifs" par M. Tuiseux. Extrait des Comptes rendus de l'Académie des Sciences t. 81. 1875.
— Rapport sur un Mémoire ayant pour titre: „Problème inverse des brachistochrones par M. Haton de la Goupillière"; par M. Bouquet. Extrait ibd. t. 82. 1876.
— Rapport sur un Mémoire de M. Haton de la Goupillière intitulé: Recherche de la brachistochrone d'un corps pesant, en égard aux résistances passives, par M. Phillips. Extr. ibd. t. 84. 1877.
— Rapport sur un Mémoire de M. Haton de la Goupillière, relatif aux lignes engendrées dans le mouvement d'une figure plane. (Commissaires: MM. Chasles, Phillips, Resal, de la Gournerie rapporteur.) Extrait ibd. t. 86. 1878.
— Sur un cas d'intégration de l'équation des brachistochrones. Extrait ibd. t. 135. 1902.

Heim, Karl: Das Weltbild der Zukunft. Berlin 1904.

Helmert, F. R.: Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der Plattschen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und den Verlauf der Schwerestörung vom Inneren der Kontinente und Ozeane nach den Küsten. (Aus: Sitzungs-Berichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften 1909).

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. 37. Jg. 1906 3. Bd. 38. Jg. 1907 1. 2. Berlin 1909.

Keidel, G. C.: Romance and other studies. No. 2. A manual of Aesopic Fable Literature fasc. 1. 1896.

Krug, Edmundo: Der São Gonçalo-Tanz unserer Caboclos. Sao Paolo 1908.
— Die Ribeira von Iguape ebd. 1908.

Laiglesia, F. de: Estudios históricos (1515—1555) Madrid 1908.

Light, The greater 10 3—12. 11 1. 2. Philadelphia 1909.

Maccàri, L.: La „Perikeiromene" di Menandro. Trani 1909.

Middelberg, E.: Geologische- en technische aanteckeningen over de goudindustrie in Suriname. Amsterdam 1908.

Digitized by Google

Mitteilungen, Astronomische, hrsg. von A. Wolfer 100. Zürich 1909.

Moret, Marie A., Veuve de J.-B. André-Godin. Guise 1908.

Nature (vol. 79—80) no. 2044—2093. London 1909.

Pfandl, L.: Hippolyte Lucas, sein Leben und seine dramatischen Werke. München. Diss. phil. 1908.

Plutarque: De la musique ... éd. critique et explicative par H. Weil et Th. Reinach Paris 1900.

Poulsen, Fr.: Recherches sur quelques questions relatives à la topographie de Delphes. 1908.

Rava, L.: Il Nuovo Consiglio Superiore di Antichità e Belle Arti. Roma 1909.

— L'VIII^a. Esposizione internazionale d'Arte in Venezia. Discorso inaugurale. ibd. 1909.

— La Legge per le Antichità e Belle Arti 20 giugno 1909, n. 364 nella Discussione alla Camera dei Deputati e al Senato del Regno. Estratto dai Resoconti Stenografici. ibd. 1909.

— La Legge per il Consiglio Superiore, gli Uffici e il Personale delle Antichità e Belle Arti. Discorso al Senato del Regno. ibd. 1907.

— Per le Antichità e Belle Arti. Legge 20 giugno 1909 n. 364. ibd. 1909. Estratto dal „Bollettino Ufficiale".

Revue historique 34. ann. t. 100. 101. Paris 1909.

Rosenbusch, H.: Elemente der Gesteinslehre 3. Aufl. Stuttgart 1910.

Schubert, J.: Das Klima von Ostpreußen Eberswalde 1908.

— und A. Dengler: Das Klima des Harzgebirges ebd. 1909.

Sellerio, A.: Le curve limite di poligonali che si deformano con legge assegnata. (Aus: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo T. 28. 1909).

Spring, W.: Sur la couleur du glycol éthylénique et de la glycérine. (Extrait des Archives des sciences physiques et naturelles 1908.)

— Notice complémentaire sur l'origine des nuances vertes des eaux de la nature. (Extrait ibd.).

— Einige Beobachtungen über die Waschwirkung der Seifen (Aus: Zeitschr. f. Chemie u. Industrie der Kolloide 4. 1909.)

Thesaurus linguae latinae vol. 3. fasc. 4. 5. vol. 4. fasc. 6. 7. Suppl. Nomina propria fasc. 1. Lipsiae 1909.

Vadasz, M. E.: Die unterliassische Fauna von Alsórákos im Komitat Nagykukülö. Budapest 1908. (Aus: Mitteilungen a. d. Jahrbuche der Kgl. Ungar. Geologischen Reichsanstalt XVI, 5.)

Digitized by Google

Veronese, G.: La geometria non- archimedea. Roma 1909.

Vöchting, H.: Untersuchungen zur experimentellen Anatomie und Pathologie des Pflanzenkörpers. Tübingen 1908.

Wallach, O.: Terpene und Campher. Leipzig 1909.

Yahuda, A. S.: Über die Unechtheit des samaritanischen Josuabuches. 1908.

Zocco-Rosa, A.: D'une nouvelle palingénésie des Institutions de Justinien (Montpellier) (Extrait des Mélanges Fitting.)

Digitized by Google

Friedrich Kohlrausch.

Von

Eduard Riecke.

Am 18. Januar dieses Jahres ist Friedrich Kohlrausch unerwartet durch einen Herzschlag dahingerafft worden. Er hat unserer Gesellschaft seit 1867 als Assessor, seit 1879 als auswärtiges Mitglied angehört; ein Schüler Wilhelm Webers hat er hier sein erstes akademisches Lehramt verwaltet. Manchem unter uns ist er persönlich näher getreten, und er selber hat Göttingen stets eine treue Anhänglichkeit bewahrt. Die Trauer um den Mann, der auf den Fortschritt unserer Wissenschaft einen so bedeutenden Einfluß geübt hat, wird vertieft durch den Schmerz über den Verlust des Menschen, der sich durch die Lauterkeit seines Charakters die Achtung aller gewonnen hat, die mit ihm in Berührung kamen. Der Aufforderung, heute zum Andenken an Friedrich Kohlrausch zu sprechen, bin ich um so lieber gefolgt, als ich damit dem Danke Ausdruck geben kann, den ich selber dem Verstorbenen schulde. In dem letzten Jahre seines Göttinger Aufenthaltes war ich sein Privatassistent; er stellte mir das Thema zu meiner ersten wissenschaftlichen Arbeit; er schlug mich bei seinem Abgange von Göttingen Wilhelm Weber zur Besetzung der freiwerdenden Assistentenstelle am physikalischen Institute vor, und ermöglichte mir dadurch den Eintritt in die akademische Laufbahn.

Wenn ich im folgenden den Versuch mache, die Stellung, welche Kohlrausch in der Entwicklung unserer Wissenschaft einnimmt, zu schildern, so möchte ich mich dabei auf einige allgemeinere Betrachtungen stützen; wollen Sie mir also zunächst eine gewisse Abschweifung von meiner Aufgabe gestatten.

Der Boden, aus dem die Physik erwächst, aus dem sie immer neues Leben schöpft, der sie trägt und begrenzt, wird gebildet

Digitized by Google

durch die unendliche Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, die sich in der uns umgebenden Welt von Körpern abspielen. Der Astronom beobachtet den Lauf der Sterne, die Bewegungen in der Atmosphäre der Sonne, der Geophysiker folgt dem Gange der Magnetnadel, er verzeichnet die leisesten Schwingungen der Erde; alles Erscheinungen, die sich ohne unser Zutun, ganz unabhängig von menschlichem Denken und Versuchen abspielen. Der Physiker aber greift mit bewußter Hand in den Gang der Erscheinungen ein; mit Hebeln und mit Schrauben ringt er der Natur Geheimnisse ab, die sie von selber nicht offenbart. Zu jenen Vorgängen, die sich ohne unser Zutun abspielen, hat er eine Fülle von Tatsachen gefügt, welche das eigene Werk der Wissenschaft sind. Die Physik ist eine experimentelle Wissenschaft; Tatsachen der Beobachtung bilden ihren unveräußerlichen und unveränderlichen Besitz. Aber schon wenn wir die Tatsachen beschreiben, fügen wir ihnen ein fremdes Element hinzu. Wir sprechen von Kräften, mit denen die Körper aufeinander wirken, von Arbeiten, die sie verrichten, von Arbeitsvorräten und Arbeitsfähigkeit in der Natur; man hat auf die Körperwelt die Vorstellungen der Anpassung an äußere Bedingungen, der Ermüdung übertragen, man hat von einem Gedächtnis der Materie gesprochen; Vorstellungen, die unserem eigenen Empfindungsleben entstammen, und die wir in willkürlicher Weise auf die unbeseelte Natur übertragen. So lange man sich mit vagen und willkürlichen Analogien begnügt, kann von einer wissenschaftlichen Physik nicht die Rede sein. Ihre Aufgabe ist es, die verwickelten Erscheinungen aufzulösen in ihre einfachen Elemente, für die Elementarerscheinungen aber Gesetze aufzustellen, so daß eine Vorhersage der Erscheinungen möglich wird, welche unter gegebenen Verhältnissen eintreten müssen, auch wenn jene Erscheinungen und jene Verhältnisse noch nie den Gegenstand einer Beobachtung gebildet haben. In diesem Sinne hat zuerst Galilei die Aufgabe der Physik gefaßt; er machte keine Spekulationen darüber, warum die Körper fallen, sondern untersuchte, wie sie fallen, d. h. er suchte nach dem Zusammenhange zwischen den beiden Größen, die bei der Fallbewegung den Gegenstand der Beobachtung bilden können, den Fallräumen und den Fallzeiten. So wird es also zur nächsten Aufgabe der Physik, bei allen Erscheinungen, die ihr angehören, die charakteristischen, der Messung zugänglichen Größen aufzusuchen, und dann die zwischen ihren Maßzahlen bestehenden Beziehungen zu ermitteln. Der Entdeckung der Tatsachen, mag sie nun der täglichen Erfahrung, dem Genius eines Einzelnen oder dem Zufall

Digitized by Google

zu verdanken sein, folgt die Maßbestimmung, die Festlegung der charakteristischen Elemente durch genaue Messungen. Jede Messung beruht auf einer Vergleichung der zu messenden Größe mit einer ihr gleichartigen, willkürlich als Norm genommenen. Die Vergleichung geschieht durch Beobachtung. Beobachten aber können wir nur mit dem Auge und dem Ohr. Das Auge läßt uns Unterschiede der Richtung und der Länge erkennen, das Ohr Unterschiede von Zeiten. Die sinnlichen Hülfsmittel der Maßbestimmung sind also überaus einfach und ihre Schwierigkeit liegt nur in der verwirrenden Menge verschiedenartiger Größen, mit denen die Physik zu tun hat. Daß diese Schwierigkeit, an der die Physik noch im Anfange des vorigen Jahrhunderts krankte, überwunden ist, verdanken wir dem dritten Zweige der physikalischen Forschung, der theoretischen Physik. Die Aufgabe der theoretischen Physik ist es, die Gesetze der einfachen, fundamentalen Tatsachen so zu fassen und zu erweitern, daß die Gesetze großer Gruppen von zusammengehörenden Erscheinungen auf ein gemeinsames Fundamentalgesetz zurückgeführt werden können. Neuen Erscheinungen gegenüber sucht die Theorie nach Analogien mit bekannten; sie entwickelt auf diesem Wege Vorstellungen, welche über das unmittelbar wahrnehmbare hinausgehend gewissermaßen verborgene Teile der Erscheinungen zu erraten suchen, und es gelingt ihr auf diesem Wege, so schwankend seine Unterlagen oft scheinen, weite Gebiete in einheitlicher Weise zusammenzufassen, Gesetze aufzustellen, welche durch die Erfahrung in oft überraschender Weise bestätigt werden. Denn gelten kann eine physikalische Theorie natürlich nur soweit, als sie die Berührung mit dem Boden der Erfahrung nicht verliert. Daß aber eine gute Theorie eine wahrhaft schöpferische Kraft zu entfalten vermag, dafür bietet ein glänzendes Beispiel die an Maxwells elektromagnetische Theorie des Lichts sich anschließende experimentelle Entwicklung. Aber nicht in der gesonderten Bearbeitung der einzelnen Gebiete werden wir die vornehmste Aufgabe der theoretischen Physik sehen; je weiter die Erkenntnis fortschreitet, um so enger werden die Beziehungen zwischen den einzelnen Teilen der Physik, um so unbestimmter ihre Grenzen. Als die höchste Aufgabe der theoretischen Physik erscheint daher die Ermittlung der allgemeinen Gesetze, welche alle physikalischen Erscheinungen beherrschen, die Entwicklung eines Systems von Vorstellungen, welches die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen umfaßt.

Auf Grund der vorhergehenden Bemerkungen unterscheiden wir drei verschiedene Tätigkeiten auf deren Zusammenwirken der

Digitized by Google

Bau der Physik sich gründet. Die Entdeckung, die Maßbestimmung, die theoretische Entwicklung. Diese drei Tätigkeiten laufen nicht gleichmäßig neben einander her; auf Perioden der Entdeckung folgen Zeiten, in denen die Aufgaben der Maßbestimmung oder der Theorie in den Vordergrund treten. Es ist von Interesse, sich den Charakter der Zeit zu vergegenwärtigen, in der Kohlrausch dem Studium der Physik sich zuwandte. Das Ende des 18. und das erste Drittel des 19. Jahrhunderts waren Zeiten glänzender Entdeckungen gewesen; durch sie wurde die Physik um die Gebiete des Galvanismus und der Elektrodynamik, der Dielektrizität, des Diamagnetismus, der Magnetooptik, der Interferenz des Lichtes, der Wärmestrahlung bereichert. Dieser Periode einer mächtigen Bewegung folgte in der Mitte des vergangenen Jahrhunderts eine gewisse Stille. Die einzige Entdeckung von großer Tragweite war die der Spektralanalyse; aber sie wirkte zunächst auf die Chemie; die Physik hat sich ihrer erst später bemächtigt. Im Vordergrunde standen Aufgaben der Theorie und der Maßbestimmung. In dem Satze von der Erhaltung der Energie war ein alle physikalischen Erscheinungen beherrschendes Prinzip gefunden; das Prinzip der Entropie bestimmte die Richtung, in welcher der Zustand eines gegebenen Systems von Körpern sich ändert, während seine Energie konstant bleibt. Die Seite der Maßbestimmung war in hervorragender Weise vertreten durch Weber, welcher die Entdeckungen Faradays auf den Gebieten der Elektrodynamik und des Diamagnetismus zum Gegenstande exakter Messungen machte. Darüber hinaus machte er den Versuch, das ganze Gebiet der elektrodynamischen und elektrostatischen Erscheinungen durch ein einheitliches, allumfassendes Gesetz der elektrischen Fernwirkung darzustellen. Der Gegensatz, in dem Webers Theorie zu den von Faraday und Maxwell vertretenen Ideenkreisen stand, gab zu lebhaften Kämpfen Veranlassung. Sie haben der Wissenschaft im ganzen wenig Frucht gebracht, und die Entwicklung ist über sie hinweggegangen. Die zeitliche Ausbreitung der Kraft, eine der fundamentalen Folgerungen von Maxwells Theorie, wurde durch Hertz experimentell bewiesen; wir wissen heute, daß das Webersche Gesetz nicht ein fundamentales Gesetz der Wechselwirkung ist, sondern eine innerhalb eines beschränkten Gebietes brauchbare Interpolationsformel. Unberührt aber von dem Wechsel der Anschauungen ist das System der Weberschen Maßbestimmungen geblieben, das noch heute das Fundament für unsere elektrischen Messungen bildet.

Wie nun der Schwerpunkt der physikalischen Forschung im

Digitized by Google

Laufe der Zeit sich bald nach dem einen, bald nach dem anderen der drei sie tragenden Pfeiler verschiebt, so sind die entsprechenden geistigen Anlagen und Fähigkeiten auch bei den einzelnen Physikern in sehr verschiedenem Maße entwickelt. Faraday wird uns immer als das Ideal des Entdeckers erscheinen; bei Weber bewundern wir die feine Kunst der Maaßbestimmung, bei Maxwell die kühne, aber zu den größten Erfolgen führende theoretische Konzeption. Kohlrauschs Begabung lag wesentlich auf dem Gebiete der Maßbestimmungen. Hier fand er ein reiches Feld der Tätigkeit durch Weber vorbereitet, ein größeres hat er mit eigener Kraft hinzuerobert. Das wird anschaulich werden, wenn ich nun dazu übergehe, die wissenschaftliche Laufbahn von Friedrich Kohlrausch in kurzen Zügen zu schildern.

Kohlrausch war geboren in Rinteln als Sohn des verdienstvollen Physikers Rudolf Kohlrausch, der damals Gymnasiallehrer in Rinteln war. Im Jahre 1857 kam der Vater, der zuletzt in Marburg neben seinem Schulamte noch die Stelle eines außerordentlichen Professors der Physik an der Universität bekleidet hatte, als ordentlicher Professor der Physik nach Erlangen. Aber schon im folgenden Jahre verlor Kohlrausch den Vater; sein Leben lang hat er ihm eine treue kindliche Pietät bewahrt, er ist für sein Andenken eingetreten, wo immer die Verdienste Rudolf Kohlrauschs nicht die ihnen gebührende Würdigung fanden. Seine Studienzeit hat Kohlrausch teils in Erlangen, teils in Göttingen verlebt. Er promivierte in Göttingen mit einer Arbeit über elastische Nachwirkung im Anschluß an Webers Untersuchungen über die Elastizität der Seidenfäden. Nachher war er eine Zeit lang Assistent an der Göttinger Sternwarte; er fand so auf dem klassischen Boden exakter Maßbestimmungen Gelegenheit, seine natürliche Anlage zu vertiefen und Erfahrungen zu sammeln, die ihm bei seinem späteren Lebenswerke zu gute kamen. Von Göttingen ging Kohlrausch zunächst nach Frankfurt als Dozent des physikalischen Vereins. Was sich dort dem jungen Physiker in damaliger Zeit an experimentellen Einrichtungen bot, hat er später in launiger Weise geschildert; er hat aber auch hervorgehoben, wie nützlich es für ihn war, daß er gezwungen wurde, sich so viele Hülfsmittel mit eigener Hand zu schaffen, die man in einem modernen physikalischen Institut so selbstverständlich hinnimmt, wie das tägliche Brot. Von Frankfurt kam Kohlrausch im Jahre 1866 als außerordentlicher Professor und Assistent Wilhelm Webers nach Göttingen zurück. Die Räume und die instrumentellen Hülfsmittel des Göttinger Institutes waren bescheiden genug; aber

Digitized by Google

Weber hatte durch seine wissenschaftliche Tätigkeit eine Reihe von Einrichtungen und Apparaten geschaffen, die an anderen Orten nicht zu finden waren. Das von Weber stammende Kapital hat in den vier Jahren, welche Kohlrausch in Göttingen weilte, reiche Zinsen getragen. Dabei hat sich Kohlrausch nicht darauf beschränkt, Fragen, zu deren Lösung Weber den Weg geebnet hatte, zum Abschlusse zu bringen; er hat mit den vorhandenen Hülfsmitteln neue Probleme von großer Tragweite in Angriff genommen. Die Göttinger Jahre sind für Kohlrausch von bleibender Bedeutung geworden; für die größere Zahl der Arbeiten, die ihn sein späteres Leben hindurch beschäftigt haben, wurde hier der Grund gelegt. In Kohlrauschs Natur lag es nicht, mit raschem Impulse von einem Probleme zum anderen sich zu wenden; mit seiner bedächtigen niedersächsischen Art kehrte er zu dem einmal ergriffenen Problem immer wieder zurück, um den Ergebnissen seiner Forschung eine immer größere Sicherheit und Klarheit zu geben. Die in Göttingen begonnenen Arbeiten über elastische Nachwirkung, Leitvermögen der Elektrolyte, absolute Widerstandsmessung, elektrochemisches Aequivalent haben ihn zum Teil sein Leben lang beschäftigt, wenn auch Jahre vergehen konnten, in denen nicht davon die Rede war.

Als ich Ostern 1869 nach Göttingen kam, hatte Kohlrausch die Arbeit über die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes bei elektrolytischer Leitung eben beendet. Es war die erste in der großen Reihe von Arbeiten über das Leitvermögen der Elektrolyte, die bis in die letzten Jahre seiner wissenschaftlichen Tätigkeit hinaufreichen. Diese dürfen wir, wohl auch in seinem eigenen Sinne, als das Hauptwerk seines Lebens bezeichnen, und so ist es gerechtfertigt, wenn ich das Problem, um das es sich handelt so kurz als möglich zu erläutern suche. Sie alle wissen von den galvanoplastischen Prozessen, die wir benutzen, um Ueberzuge von Silber, Kupfer, Nickel herzustellen. In eine mit einer Lösung von Kupfervitriol gefüllte Wanne hängt man zwei Kupferbleche und leitet mit ihrer Hülfe den Strom einer galvanischen Batterie durch die Lösung. An dem mit dem negativen Pole der Batterie verbundenen Bleche wird dann metallisches Kupfer abgeschieden; an dem anderen Bleche, durch welches die positive Elektrizität in die Lösung einströmt, wird Kupfer oxydiert und Kupfervitriol gebildet. Der Durchgang der Elektrizität durch die Lösung ist also verbunden mit einer chemischen Zersetzung, die wir als Elektrolyse bezeichnen; ihre Produkte aber treten nur an den Eintrittsstellen der positiven und der negativen Elektrizität zu Tage, an

Digitized by Google

den sogenannten Elektroden. Die Gesetze dieser Abscheidung wurden von Faraday aufgestellt; die abgeschiedenen chemischen Bestandteile nannte er Ionen; er zeigte, daß die Mengen der abgeschiedenen Ionen proportional sind der Zeit, während welcher ein bestimmter Strom durch die Lösung geht, und proportional der Stärke dieses Stroms; er zeigte ferner, daß die Mengen der verschiedenen von demselben Strome gleichzeitig abgeschiedenen Ionen sich verhalten, wie ihre chemischen Aequivalente. Faraday machte aber noch eine andere, in der Folge sehr wichtige Beobachtung. Er fand, daß der Durchgang des Stromes durch eine Lösung mit einer Verschiebung des gelösten Elektrolyten, mit einer Wanderung oder Ueberführung der Ionen von der einen zur anderen Seite verbunden ist. Infolge hiervon wird z. B. die Lösung des Kupfervitrioles an der positiven Elektrode verdünnt, an der negativen konzentriert. Die quantitativen Verhältnisse dieser Ueberführung wurden später von Hittorff in einer klassischen Experimentaluntersuchung für eine große Zahl elektrolytischer Lösungen bestimmt. Für die Vorstellungen, die wir uns von der Natur der elektrolytischen Leitung gebildet haben, ist noch eine weitere Tatsache von grundlegender Bedeutung geworden. Es hat sich gezeigt, daß die kleinste elektrische Kraft genügt, um einen galvanischen Strom in einer elektrolytischen Lösung zu erzeugen. Daraus mußte notwendig geschlossen werden, daß die Ionen in der Lösung schon von Haus aus vorhanden sind, daß die Zerlegung der chemischen Verbindung in ihre Ionen nicht erst eine Wirkung der elektrischen Kraft sein kann. Man kam also zu der Vorstellung von einer elektrolytischen Dissoziation in den Lösungen. Die Moleküle der gelösten chemischen Verbindungen sind zu einem größeren oder kleineren Teile in die sie zusammensetzenden Atome oder Radikale zerlegt; die Zerlegung unterscheidet sich aber von einer gewöhnlichen chemischen Zersetzung dadurch, daß ihre Produkte, die Ionen, elektrisch geladen sind, und zwar naturgemäß mit gleichen Mengen positiver und negativer Elektrizität. Damit haben wir den Kreis dessen erschöpft, was Kohlrausch an experimentellen Tatsachen, empirischen Gesetzen und theoretischen Vorstellungen von anderen übernehmen konnte. In einer Frage von fundamentaler Bedeutung aber herrschte noch vollkommene Unkenntnis und die größte Verwirrung. Bei den metallischen Leitern besteht zwischen der den Strom treibenden elektrischen Kraft und der Stärke des Stroms eine sehr einfache Beziehung; das Verhältnis zwischen der Kraft und dem Strome ist bei einem gegebenen Leiter konstant, und man bezeichnet seinen Wert als den

Digitized by Google

Widerstand des Leiters. Ob dieses Gesetz auch bei den elektrolytischen Leitern gilt, wußte man nicht, es fehlte jede sichere Kenntnis von den Widerstandsverhältnissen der Elektrolyte. Der Grund war folgender. Die oben erwähnten Konzentrationsänderungen im Inneren stromdurchflossener Lösungen geben Veranlassung zu inneren elektrischen Kräften, welche der äußeren Kraft der Batterie entgegenwirken, den Strom vermindern und so einen Widerstand vortäuschen, der mit dem Verhältnisse zwischen der äußeren elektrischen Kraft und der Stromstärke nichts zu tun hat. Noch in stärkerem Maße treten solche Gegenkräfte auf, wenn an den Elektroden gasförmige Zersetzungsprodukte sich entwickeln, wie dies z. B. der Fall ist, wenn man Schwefelsäure zwischen Platinblechen durch den Strom zersetzt. Wollte man zu einer genauen Kenntnis des wirklichen Widerstandes einer Lösung gelangen, so mußte man den Einfluß jener Gegenkräfte eliminieren. Kohlrausch hat das dadurch erreicht, daß er an Stelle von Strömen, welche stets in derselben Richtung durch die elektrolytische Lösung fließen, sogenannte Wechselströme verwandte, Ströme, welche in jeder Sekunde einige hundert Male von der einen zur entgegengesetzten Richtung übergehen. Dadurch wird die Ansammlung der Zersetzungsprodukte oder der Produkte der Ueberführung an den Elektroden vermieden und jener scheinbare Widerstand von dem wirklichen abgetrennt. Man erhält den wahren Widerstand des Leiters unabhängig von den elektrischen Gegenkräften. So konnte Kohlrausch in einwandfreier Weise zeigen, daß auch bei den flüssigen Leitern das Verhältnis zwischen elektrischer Kraft und galvanischem Strom ein konstantes ist, daß die Gesetze des Widerstandes für elektrolytische Leiter ganz ebenso gelten, wie für Metalle. Ich habe im Frühjahr 1869 noch die umständlichen, schwer zu handhabenden Versuchseinrichtungen gesehen, deren sich Kohlrausch bei dieser bedeutungsvollen Arbeit bediente. Zur Erzeugung der Wechselströme benutzte er die von Weber konstruierte Induktionssirene; es war dies eine Savartsche Sirene, auf deren Achse ein kleiner Magnet befestigt war, umgeben von einer fest aufgestellten Drahtspule. Beim Anblasen der Sirene drehte sich der Magnet mit dieser und erzeugte in der Drahtspule einen Wechselstrom. Die Konstanz der Rotationsgeschwindigkeit wurde durch den Vergleich des Sirenentons mit dem Tone einer Orgelpfeife geprüft. Zur Strommessung diente eines der Dynamometer, das von Weber in der noch gemeinsam mit Rudolf Kohlrausch begonnenen Arbeit über elektrische Wechselströme benutzt worden war. Eine Widerstandsbestimmung eines

Digitized by Google

Elektrolyten ist jetzt eine elementare Aufgabe, die jeder Praktikant in unseren physikalischen Uebungen ausführt. Die Arbeit langer Jahre, eine Erfahrung, wie sie nur eine beinahe ununterbrochene Beschäftigung mit dem Gegenstande verleiht, war nötig, bis Kohlrausch seiner Methode ihre heutige Eleganz und Einfachheit verleihen konnte.

In dem ersten Semester, das ich in Göttingen zubrachte, behandelte Kohlrausch in einer Seminarstunde die Gaußsche Methode zur Bestimmung der horizontalen Intensität des Erdmagnetismus. Die im Gauß-Weberschen erdmagnetischen Observatorium angestellten Uebungen bildeten für Kohlrausch selber die Vorbereitung zu einer im Sommer 1869 mit größter Sorgfalt ausgeführten Bestimmung der Horizontalintensität. Die mühevolle Arbeit war notwendig ganz abgesehen von der Bedeutung, welche sie für unsere Kenntnis von den zeitlichen Aenderungen des Erdmagnetismus besitzt. Denn Kohlrausch hatte schon andere Aufgaben in Angriff genommen, zu deren Lösung eine genaue Kenntnis der Intensität des Erdmagnetismus durchaus erfordert wurde. Die erste bestand in der Wiederholung der absoluten Widerstandsmessung nach der Methode und mit den Apparaten Wilhelm Webers. Bei der Einführung des sogenannten absoluten Widerstandsmaßes war Weber dem Vorbilde gefolgt, das Gauß auf dem Gebiete des Erdmagnetismus in der Abhandlung „intensitas vis magneticae ad mensuram absolutam revocata“ gegeben hatte. Gauß hat in dieser grundlegenden Arbeit gezeigt, daß man die Intensität der magnetischen Kraft so definieren kann, daß zu ihrer Bestimmung nichts weiter nötig ist, als die Messung von Längen, Gewichten und Zeiten, ohne daß irgend ein spezifisches, willkürlich gewähltes Element in die Beobachtungen eingeht. Den entsprechenden Schritt auf dem Gebiete der Elektrizität tat Weber. Man kann die Stärke eines elektrischen Stromes messen durch die Menge von Kupfer, die er aus einer Kupfervitriollösung, die Menge von Wasserstoff, die er aus Schwefelsäure abscheidet. Jede auf eine solche Beobachtung gegründete Definition der Stromeinheit enthält ein willkürliches Element, den besonderen Elektrolyten, dessen Zerlegung dabei benutzt wird. Weber zeigte, daß man die Wirkung des Stroms auf die Magnetnadel benutzen kann, um die Stromstärke so zu definieren, daß man zu ihrer Bestimmung nur die Messung von Längen, Gewichten und Zeiten nötig hat, ohne die Heranziehung eines willkürlich gewählten Faktors. Die so definierte Einheit der Stromstärke ist dann eine absolute.. In derselben Weise hat er absolute Einheiten für die elektrische Kraft und für

Digitized by Google

den elektrischen Widerstand aufgestellt. Diese absoluten Einheiten haben den großen Vorzug der Reproduzierbarkeit. Das m oder cm, die Masse eines Grammstückes, die Sekunde sind an allen Orten der Erde dieselben. Die Konstruktion absoluter elektrischer Einheiten erfordert aber nichts weiter, als daß die Mittel vorhanden sind, um Längen nach cm, Massen nach g, Zeiten nach Sekunden zu messen; sie kann also an allen Orten der Erde in übereinstimmender Weise ausgeführt werden. Nun hatte Siemens schon früher für den Widerstand eine willkürliche Einheit eingeführt, welche die Eigenschaft der Reproduzierbarkeit ohne Zweifel besaß, den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt. So groß aber auch der Fortschritt war, der für die messende Physik durch die Einführung jener Quecksilbereinheit erreicht wurde, beruhigen konnte man sich dabei nicht. Denn wenn in der ganzen Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus das absolute System der Messung durchgeführt war, konnte für die Messung des Widerstandes nicht ein anderes, völlig heterogenes Prinzip beibehalten werden. Wohl aber war es nötig, den Wert der Quecksilbereinheit in dem absoluten Maße Webers zu bestimmen; man konnte dann auch die Länge berechnen, die man einer Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt geben muß, damit ihr Widerstand gleich der absoluten Einheit des Widerstandes ist. Auch diese Aufgabe, welche Weber noch nicht erledigt hatte, wurde von Kohlrausch gelöst. Das Resultat seiner Messung wich von der fast gleichzeitigen Bestimmung, welche in England auf Veranlassung der British Association ausgeführt worden war, ab. Es stellte sich später heraus, daß ein wesentlicher Teil der Differenz auf einem Fehler beruhte, den Weber bei der Messung der von den Windungen einer Induktorspule umschlossenen Fläche begangen hatte. Aber gerade der Umstand, daß so sorgfältige und genaue Messungen zu verschiedenen Resultaten geführt hatten, übte auf die Untersuchungen selber einen mächtigen Impuls; das Problem verschwand nicht mehr von der Tagesordnung, bis eine vollkommene Uebereinstimmung der von verschiedenen Seiten und nach verschiedenen Methoden unternommenen Messungen erreicht war. An der Vollendung der Aufgabe hat Kohlrausch unermüdlich mitgearbeitet noch zu einer Zeit, wo, wie er selber meinte, mit einer absoluten Widerstandsmessung keine Lorbeeren mehr zu verdienen waren.

Eine zweite Aufgabe, welche Kohlrausch in Göttingen gestützt auf seine erdmagnetischen Arbeiten in Angriff nahm, war die Bestimmung des elektrochemischen Aequivalentes des Silbers, die

Digitized by Google

Wägung derjenigen Menge von Silber, die aus einer Silberlösung abgeschieden wird, wenn ein Strom durch die Lösung geht, dessen Stärke gleich der Einheit des Weberschen absoluten Maßes ist. Auf die fundamentale Frage, ob dieses elektrochemische Aequivalent eine absolut unveränderliche Größe, oder ob es abhängig ist von äußeren Verhältnissen, z. B. von der Temperatur, ist Kohlrausch in der letzten Periode seines Lebens, in der Muße seines Marburger Aufenthaltes zurückgekommen. Seine letzte Arbeit galt ihrer experimentellen Prüfung. Jene erste Bestimmung des Aequivalentes wurde gleichfalls in dem erdmagnetischen Observatorium ausgeführt, das damals für solche Untersuchungen die denkbar günstigsten Verhältnisse bot. Zur Strommessung diente eine neue von Kohlrausch konstruierte Tangentenbussole. Sie war ursprünglich dazu bestimmt, in Verbindung mit einem Bifilargalvanometer die horizontale Intensisät des Erdmagnetismus durch rein galvanische Messungen zu bestimmen.

Im Herbst 1870 folgte Kohlrausch einem Rufe an das Polytechnikum in Zürich. Er hat sich dort nicht wohl gefühlt; dazu mögen die politischen Verhältnisse beigetragen haben; stand doch damals die Masse des schweizerischen Volkes dem Erwachen Deutschlands mit unverhohlenem Mißbehagen gegenüber. In der Züricher Zeit unternahm Kohlrausch einen Vorstoß in das Gebiet der Thermoelektrizität; angeregt durch eine Mitteilung des Physiologen Hermann entwickelte er die Vorstellung, daß die Erscheinungen der Thermoelektrizität bedingt seien dadurch, daß jeder elektrische Strom einen Wärmestrom, jeder Wärmestrom einen elektrischen Strom mit sich führe, eine Vorstellung, die später von anderen weiter ausgeführt und begründet worden ist. Im Herbst 1871 folgte Kohlrausch einem Rufe an die technische Hochschule in Darmstadt. Er blieb dort bis zum Jahre 1875, kam dann nach Würzburg als Nachfolger Kundts, um diesen auch in Straßburg wieder zu ersetzen, nachdem Kundt die Berliner Professur übernommen hatte. Nach dem Tode von Helmholtz wurde Kohlrausch im Jahre 1895 die Präsidentschaft der physikalisch-technischen Reichsanstalt übertragen, eine Stellung, zu der er durch seine ganze wissenschaftliche Tätigkeit in erster Linie berufen war.

In dem Laufe dieser Jahre vollendete sich der monumentale Bau, den Kohlrausch durch seine Arbeiten über das Leitvermögen der Elektrolyte geschaffen hat. In dem Briefe an Nernst, in dem er seinem Danke für die Verleihung der Bunsenmedaille Ausdruck gab, hat Kohlrausch selber in unübertrefflicher Weise geschildert, wie seine Arbeit von den anfänglichen, schwer zu handhabenden

Digitized by Google

Versuchsanordnungen aus zu immer größerer Einfachheit und Genauigkeit fortschritt. Zuerst wurde die Induktionssirene durch den von Kohlrausch konstruierten Rotationsinduktor ersetzt. Die weitere Erfahrung zeigte, daß auch der Induktor mit Wagnerschem Hammer zur Erzeugung der Wechselströme zu gebrauchen war. Immer aber wurde zr den Strommessungen noch das Dynamometer benützt, dessen Ablenkungen mit Spiegel und Skale zu beobachten waren. Noch in der Darmstädter Zeit klagte Kohlrausch über die Schwierigkeiten, die das Dynamometer gelegentlich bereitete. Den größten Fortschritt der experimentellen Methode bedeutete daher die Einführung des Telephons zur Beobachtung der Wechselströme.

Es liegt in der Natur der Sache, daß Kohlrausch den größten Teil der Jahre, die er der Untersuchung der elektrolytischen Leitung gewidmet hat, auf die Beschaffung eines Beobachtungsmateriales verwandte, wie es in solcher Vollkommenheit und in so reicher Fülle nur selten von einem einzelnen Forscher gesammelt worden ist. Der Erfolg hat aber die mühevolle Arbeit reich gelohnt. Ihre erste Frucht war das Gesetz von der unabhängigen Wanderung der Ionen, durch das die ganze Mannigfaltigkeit der Erscheinungen in so einfacher und übersichtlicher Weise dargestellt werden konnte. Wenigstens in nicht zu konzentrierten Lösungen bewegen sich die einzelnen Ionen vollkommen unabhängig von einander lediglich unter der Wirkung der treibenden elektrischen Kraft und der gegenwirkenden Reibung, welcher die Ionen bei ihrer Fortbewegung durch das Lösungswasser unterworfen sind. Die Ionen müssen dann eine konstante Geschwindigkeit annehmen, welche der treibenden elektrischen Kraft proportional ist. Bestimmt man die Geschwindigkeiten, welche bei den verschiedenen Ionen durch die Einheit der elektrischen Kraft erzeugt werden, so stellen die erhaltenen Zahlen charakteristische Eigenschaften der einzelnen Ionen dar, die man als ihre Beweglichkeiten bezeichnet. Kennt man diese Beweglichkeiten, so kann man die elektrischen Leitfähigkeiten von Lösungen, in denen Ionen in beliebiger Anzahl und Kombination vorhanden sind, berechnen und außerdem die durch Ueberführung bedingten Konzentrationsänderungen. Umgekehrt konnte Kohlrausch, indem er seine Leitfähigkeitsbestimmungen mit den Hittorfschen Messungen der Ueberführung verband, die Beweglichkeiten für die ganze Zahl der in Betracht kommenden Ionen bestimmen. Auf Grund der von Kohlrausch entwickelten Theorie der elektrolytischen Leitung ergibt sich die Leitfähigkeit eines Elektrolyten, in dem irgend zwei

Digitized by Google

Gattungen von Ionen vorhanden sind, durch die Addition ihrer Beweglichkeiten; die Ueberführung dagegen hängt in einfacher Weise von dem Verhältnisse der Beweglichkeiten ab. Die Untersuchung des Leitvermögens der Elektrolyte mußte von selber auf die Frage nach der Leitung des Wassers führen. War diese nur die Folge von Verunreinigungen oder haftete sie dem Wasser als solchem an? Dem experimentellen Geschick, der hohen Kunst genauester Beobachtung, die Kohlrausch in unermüdlicher Arbeit sich zu eigen gemacht hatte, gelang die Entscheidung der Frage, deren Schwierigkeiten die meisten Beobachter zurückgeschreckt hätte. Denn das Wasser erwies sich als ein höchst unreinlicher Körper, und es kostete unsägliche Mühe es auch nur vorübergehend rein zu erhalten. Das Ergebnis der Untersuchung war, daß auch das Wasser, freilich in äußerst geringem Grade, in Ionen gespalten ist, und daß es dementsprechend eine wenn auch sehr geringe elektrolytische Leitfähigkeit besitzt. Der von Kohlrausch aus seinen Beobachtungen berechnete Dissoziationsgrad des Wassers stimmt aufs beste überein mit dem aus der Hydrolyse und aus der elektromotorischen Kraft der Wasserstoffkonzentrationskette folgenden.

In der Berliner Zeit war das wissenschaftliche Interesse Kohlrauschs vorzugsweise dem Einflusse der Temperatur auf das Leitvermögen der Elektrolyte zugewandt, insbesondere der merkwürdigen Beziehung, welche den Temperaturkoeffizienten des Leitvermögens mit der Beweglichkeit der Ionen verbindet; der größeren Wanderungsgeschwindigkeit entspricht der kleinere Temperaturkoeffizient, so daß die Unterschiede der Beweglichkeiten mit wachsender Temperatur kleiner werden. Eine theoretische Deutung dieser Tatsache besitzen wir zur Zeit noch nicht. Kohlrausch selber war überzeugt, daß die von ihm empirisch ermittelten Gesetze bei ihrer weiteren Verfolgung einen Weg eröffnen würden zu tieferem Verständnis des Wesens des elektrolytischen Widerstandes und des Wesens der Lösungen überhaupt.

Näher auf die Arbeiten Kohlrauschs auf den Gebieten des Erdmagnetismus, der Elastizität, der Wärme und Elektrizitätsleitung in Metallen, der Kapillarität einzugehen, muß ich mir versagen. Dagegen darf ich nicht unterlassen, auf die konstruktive Tätigkeit hinzuweisen, die Kohlrausch meist im Zusammenhang mit seinen wissenschaftlichen Arbeiten ausgeübt hat. Wir verdanken ihm nicht bloß auf dem Gebiete der Elektrolyse neue experimentelle Einrichtungen. Die Idee zu dem viel gebrauchten Totalreflektometer stammt noch aus der Göttinger Zeit. In Würz-

Digitized by Google

burg waren es vor allem die Gebiete des Magnetismus und der Galvanometrie, welche er durch die Konstruktion von Apparaten bereichert hat. Er hatte dort in Eugen Hartmann einen Mechaniker gefunden, der mit Verständnis und Geschick auf seine Ideen einging. Kohlrausch stellte sich aber auch selber gerne an die Drehbank, und noch in der Präsidentenwohnung in Charlottenburg fand diese ihre Stelle.

In diesem Zusammenhange möge auch des neuen Institutes gedacht werden, das Kohlrausch in Würzburg eingerichtet hat. Der Bau fiel in die Zeit, da der Aufschwung der physikalischen Studien, der nicht zum wenigsten der Rückwirkung der Technik zu verdanken war, eben begonnen hatte. Der beste Beweis für die Umsicht, mit der Kohlrausch den Bau und die Einrichtung des Instituts geleitet hat, liegt in der Tatsache, daß das Institut den gesteigerten Ansprüchen, welche die folgenden Jahrzehnte stellten, bis auf den heutigen Tag gewachsen blieb.

Kohlrausch war aber nicht bloß der Mann der wissenschaftlichen Forschung; er war ein Lehrer und ein Lehrer großen Stils, dessen Wirkung weit hinausging über den Kreis derer, die als Hörer zu seinen Füßen saßen, oder in seinem Laboratorium arbeiteten. Physikalische Uebungen gab es auch vor Kohlrausch; aber es fehlte an einem konsequenten Lehrgange. Man pflegte Handfertigkeitsübungen zu verbinden mit Beobachtungen, die nach ziemlich subjektiven Rücksichten ausgewählt waren; dazu kamen wohl noch Vorlesungsversuche, welche die Praktikanten mit mehr oder weniger Erfolg wiederholten. Eine systematische Ausgestaltung der Uebungen war ein Erfordernis der Zeit; sie würde sich vollzogen haben auch ohne Kohlrausch; so wie sie gekommen ist, trägt sie aber den Stempel, den er ihr aufgedrückt hat. Wir können damit wohl zufrieden sein; der Sohn und Enkel eines Schulmannes besaß den zur Lösung der Aufgabe nötigen pädagogischen Takt. Er verstand es in einem das ganze Gebiet umfassenden Lehrgange die Schüler zu genauer Beobachtung zu erziehen, sie mit Vertrauen zu den Methoden und den damit erhaltenen Resultaten zu erfüllen, ihnen Achtung beizubringen vor der Macht der Zahlen, vor denen jede Theorie sich beugen muß. Der Leitfaden der praktischen Physik in seiner ersten Auflage lediglich zum Gebrauch in dem Göttinger Praktikum bestimmt, wuchs freilich bald über den Rahmen eines elementaren Uebungsbuches hinaus. Als Lehrbuch der praktischen Physik bildet es weit über die Grenzen Deutschlands hinaus den Führer und Berater jedes wissenschaftlich arbeitenden Physikers. Aus dem die Gesamtheit

Digitized by Google

der wissenschaftlichen Methoden, eine unerschöpfliche Menge einzelner Erfahrungen umschließenden Lehrbuche hat sich aber auch der bescheideneren Zielen dienende Leitfaden in einem an seine ursprüngliche Gestalt erinnernden Umfange wieder herausgeschält.

Im Rückblick auf ein wohlangewandtes an Arbeit und Erfolgen reiches Leben konnte Kohlrausch im Jahre 1905 von der Präsidentschaft der Reichsanstalt zurücktreten. Noch 5 Jahre eines behaglichen Alters hat er in Marburg und in Jugenheim an der Bergstraße, dem Sommersitze seiner Familie, zugebracht. War es im eigenen Hause auch still geworden — nur eine Tochter weilte noch bei den Eltern — so sorgten die Familien des Sohnes und dreier Töchter für Freude und Leben. Daß die Muße der Marburger Tage dem Unermüdlichen nur ein Sporn war, um mit neuem Eifer und neuer Kraft den Arbeiten seines Lebens sich zuzuwenden, davon zeugen vor allem die Arbeiten über das elektrochemische Aequivalent und die neue Auflage seines Lehrbuches. Die Erinnerung an Kohlrausch wird dauern, so lange es eine physikalische Wissenschaft gibt, und so lange umfangreiche Zweige der Technik auf ihrer Grundlage ruhen.

Digitized by Google

Theodor Wilhelm Engelmann.

Von

Max Verworn.

Es hat einen eigenen Reiz, den Faktoren nachzuspüren, welche die Entwicklungsgeschichte einer Wissenschaft bestimmen. Aber das Unternehmen ist ebenso schwierig, wie es reizvoll ist, denn es bedeutet nichts geringeres, als die Faktoren zu analysieren, welche die Entwicklungsrichtung der menschlichen Erkenntnis überhaupt bedingen. An eine exakte Durchführung einer solchen Aufgabe ist selbstverständlich heute noch nicht zu denken. Aber man kann doch immerhin einzelne allgemeinere Momente namhaft machen, die bestimmend auf den Kurs der wissenschaftlichen Forschung einwirken. Maßgebend für die Richtung dieses Kurses ist natürlich in erster Linie das Ziel, das die Forschung weit ausschauend verfolgt. Indessen sind es keineswegs immer grade Bahnen, welche die Entwicklung unserer Erkenntnis nach solchen Zielen einschlägt. Das zeigt die Geschichte einer jeden Wissenschaft zur Genüge. Vielmehr macht die Entwicklung oft genug große Umwege, um häufig doch wieder in die alte Richtung einzumünden. Es ist nicht blos das Endziel bestimmend für den Weg. Der Kurs wird auch im höchsten Maße beeinflußt durch die gewonnenen Erkenntnisse selbst. Eine neue Entdeckung, eine fruchtbare Methode gibt der weiteren Entwicklung oft eine durchaus andere Richtung, denn hierbei wird ein Faktor wirksam, den man sonst nur aus der Psychologie des trivialen Alltagslebens kennt und dessen Wirksamkeit auf den lichten Höhen reiner Forschung man nicht ohne weiteres erwarten möchte. Das ist die Mode. Die Mode beherrscht die Forschung nicht weniger als die Kleidung. Eine bedeutsame Entdeckung macht Aufsehen. Die ganze große Schar derer, welche die For-

Digitized by Google

schung aus egoistischem Interesse zur Erlangung persönlicher Erfolge betreiben, wendet sich in der Hoffnung auf eigene Erfolge der neuen und aussichtsreichen Entdeckung zu. Noch ein anderer Umstand fördert einen solchen Zufluß des Interesses. Alle Forschung besteht in einem Ueberwinden von Widerständen und die Widerstände sind häufig sehr groß. Ist aber durch eine neue Methode, durch eine folgenschwere Entdeckung an irgend einer Stelle der Widerstand überwunden, so wird die weitere Arbeit hier leicht und es erfordert weniger Energieaufwand, um vorwärts zu kommen. So wendet sich die Masse nach dieser Seite. Wenn das Boot aber auf einer Seite stärker gerudert wird, so geht sein Kurs nicht mehr in grader Richtung aufs Ziel. Es treibt weit ab, bis die Entfernung vom Ziel allzu augenfällig wird und offensichtlich eine Korrektur verlangt.

Das ist ein Bild von der Geschichte der Physiologie seit dem Tode Johannes Müllers. Eine gewaltige Forscherpersönlichkeit, wie sie die Geschichte der Physiologie kaum sonst noch hervorgebracht hat, weder früher, noch später, hatte mit kraftvoller Hand dem Boote seinen Kurs gegeben. Johannes Müller war der Physiologe gewesen. Frei von jeder Einseitigkeit hatte er das ganze Gebiet des Lebens mit der Schärfe seines Geistes durchdrungen, ein „Biologe“ im eigentlichen Sinne des Wortes. Wie hätte er sonst zugleich ein hervorragender Zoologe, ein bedeutender Pathologe und schließlich ein scharfblickender Geologe sein können! Nach seinem Tode gaben wichtige Erfindungen und Entdeckungen physikalischer und chemischer Natur bald dem Kurse der Physiologie weitgehende Ablenkungen. Die Einführung der graphischen Methode durch Ludwig, ihre hohe Entwicklung durch Marey, die Anwendung physikalischer Methodik auf die Sinnesphysiologie durch Helmholtz, auf die Muskel- und Nervenphysiologie durch Du Bois-Reymond und manche andere physikalische Errungenschaft übte auf die Mehrzahl der Physiologen einen so gewaltigen Reiz aus, daß viele über der Freude an der physikalischen Methodik das Ziel der physiologischen Forschung vollständig vergaßen. Auf der anderen Seite rief die durch Wöhlers Synthese des Harnstoffs und Liebigs Untersuchungen über die Ernährung angeregte physiologisch-chemische Forschung einen so mächtigen Zustrom des Interesses nach der Beschäftigung mit chemischen Fragen hervor, daß unter Hoppe-Seylers Bestrebungen sogar die physiologische Chemie sich ganz von der Physiologie loszulösen im Begriffe stand. Das verbindende Glied zwischen beiden Richtungen, das lebendige Objekt, war schließlich kaum noch als Ziel

Digitized by Google

der Forschung zu erkennen. Beide Richtungen standen fremd und indifferent nebeneinander, ohne sich zu verstehen und hatten vor ihren speziellen Problemen das große gemeinsame Ziel aus dem Auge verloren. Wo blieb da die Biologie? Die Anatomie und Entwicklungsgeschichte, die noch zur Zeit Johannes Müllers untrennbar mit der Physiologie verbunden war, wurde durch die Teilung der Lehrstühle von der Physiologie getrennt. Damit war auch äußerlich zum Ausdruck gebracht, daß die Physiologie ihre Fühlung mit dem lebendigen Objekt mehr und mehr aufzugeben im Begriff stand. Das war in den 60er bis 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts.

Dennoch gab es einige wenige Physiologen, die auch in jener Zeit über der Methode das Problem nicht vergaßen. Nennt man die wenigen Männer, so darf ein Name nicht fehlen: Theodor Wilhelm Engelmann.

Engelmann war noch auf der Schule, als Johannes Müller seine Augen schloß. Aber schon der Schüler hatte eine ausgesprochene Neigung und große Begeisterung für biologische Dinge, die besonders durch die Anregung seines Onkels Victor Carus in Leipzig und die ausgezeichneten Arbeiten des Infusorien-Monographen Stein in Prag erweckt worden war. Das mikroskopische Studium des Infusorienlebens, dessen erstaunliche Aeusserungen seit der Benutzung zusammengesetzter Mikroskope bis heute jeden Beobachter immer von neuem unwiderstehlich gefesselt haben, übte auf den jungen Engelmann einen solchen Reiz aus, daß er bereits als 16jähriger Gymnasiast die ersten wissenschaftlichen Früchte dieser Arbeiten den Fachgenossen in der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie darbieten konnte, und der junge Student, der eben die Universität bezogen hatte, ließ seiner ersten Arbeit bald andere aus demselben Forschungsgebiete folgen. Dieser Ausgangspunkt seiner Studien ist für die ganze wissenschaftliche Entwicklung maßgebend geworden. Seine Infusorienstudien haben ihm die biologische Grundstimmung für alle späteren Arbeiten gegeben. Sie haben ihm seine Probleme geliefert und ihn verhindert, in der physikalischen oder chemischen Methodik unterzugehen. Die speziellen Fragen des Infusorienlebens erweiterten sich für ihn sehr bald zu den großen allgemeinen Problemen der Bewegung, der Reizwirkungen, der Erregbarkeit, der Erregungsleitung lebendiger Systeme überhaupt, und diese Probleme sind es gewesen, die sich, für den Tieferblickenden deutlich erkennbar, durch die zahllosen speziellen Untersuchungen seiner physiologischen Lebensarbeit als leitende Fäden hindurchzogen. Nicht daß

Digitized by Google

Engelmann die Methodik in ihrer hohen Bedeutung unterschätzte. Er verfiel keineswegs in diesen entgegengesetzten Fehler, der in der Physiologie von heute nur zu schrankenlosen Spekulationen und unbefriedigenden Phantasien führen könnte. Im Gegenteil, Engelmann hat uns als Apparat-Konstrukteur mit einer ganzen Anzahl sehr praktischer und wertvoller großer und kleiner Apparate beschenkt, die er für die speziellen Zwecke seiner eigenen Experimentaluntersuchungen ersann. Er war ein sehr guter Physiker. Aber die Methodik war ihm doch immer nur Mittel zum Zweck und niemals verlor er über der Apparat-Konstruktion das physiologische Problem aus den Augen. So gestaltete sich seine Forschung zu dem Typus wahrhaft harmonischen Zusammenwirkens von Problem und Methode. Der Kurs von Engelmanns Forschungsboot ging graden Wegs auf das Ziel der Physiologie.

Die physiologischen Studien Engelmanns an freilebenden Infusorien-, Rhizopoden-, Bakterien- und Algenzellen haben uns eine Fülle von wichtigen und interessanten Erfahrungen über das Leben der Zelle geliefert. Engelmann ist der erste Physiologe gewesen, der für das Studium physiologischer Probleme in ausgedehntem Maße einzellige Organismen benutzte. Neben ihm hat in jener Zeit nur noch Kühne die Bedeutung dieser Versuchsobjekte richtig erkannt. Heute ist diese Erkenntnis in der Physiologie glücklicher Weise etwas weiter zum Durchbruch gekommen. Immerhin gibt es auch heute noch Physiologen, die der Fülle der lebendigen Objekte wie den großen Problemen des Lebens so fremd gegenüberstehen, daß sie in der Benutzung von einzelligen Infusorien und Rhizopoden zu physiologischen Untersuchungen nichts weiter erkennen, als eine Art von „Insektenbelustigungen", wie man sie im XVIII. Jahrhundert unter dem Mikroskop in wissenschaftlichen wie Laienkreisen so gern zur Unterhaltung veranstaltete. Eine solche kurzsichtige Auffassung ist nur da möglich, wo jede Kenntnis von dem enormen Fortschritt fehlt, den grade die Physiologie der Reizwirkungen auf Grund der Erfahrungen an der einzelnen Zelle gemacht hat. Engelmann hat diesen Fortschritt durch seine Studien zuerst angebahnt, indem er die Wirkungen der verschiedenen Reizqualitäten, wie des Lichtes, der Wärme, der Elektrizität, der chemischen Agentien auf die Bewegungen der Zelle untersuchte. So hat er eine ganze Anzahl von bewegungsrichtenden Reizwirkungen feststellen können, wie die Phototaxis und die Chemotaxis vieler Infusorienformen. Die Chemotaxis, deren ungeheure Verbreitung und fundamentale biologische Bedeutung wir heute nicht blos in der Physiologie der

Digitized by Google

Tiere und Pflanzen, sondern auch in der Pathologie des Organismenkörpers auf Schritt und Tritt wahrnehmen, ist von Engelmann zuerst bei Bakterien und zwar für Sauerstoff nachgewiesen worden. Ja diese Entdeckung hat Engelmann wiederum in genialer Weise zu einer biologischen Methode für den Nachweis kleinster Sauerstoffmengen verwendet! Die positive Chemotaxis der Bakterien nach Sauerstoff ist ein so feines Reagens, daß man damit unter dem Mikroskop die Stellen, an denen auch nur Spuren von freiem Sauerstoff vorhanden sind, ohne weiteres zu erkennen vermag. Das leistet selbst die empfindlichste chemische Reaktionsmethode nicht. Besonders zahlreich sind die Untersuchungen Engelmanns über die Wirkungen des Lichtreizes. Hier hat er für seine Zwecke eine Reihe höchst sinnvoller optischer Apparate konstruiert. Bei diesen Untersuchungen konnte er mittels der eben genannten Bakterienmethode den exakten Nachweis führen, daß es bei gleicher Lichtintensität nicht, wie die Botaniker früher meinten, die gelben, sondern die roten Strahlen des Spektrums sind, welche am stärksten die kohlensäurespaltende Wirkung in der grünen Pflanzenzelle auslösen, und daß diese Spaltung tatsächlich in den grünen Chlorophyllkörpern der Pflanzenzelle erfolgt. Das Studium der Beziehungen zwischen Pflanzenfarbstoff und Licht hat ihn dann noch in den letzten Jahren zu einer weiteren wichtigen Entdeckung geführt, indem er mit seinem Schüler Gaidukov fand, daß die Farbe des Chromophylls von der Farbe des einwirkenden Lichtes abhängig ist und sich dieser im Sinne der Komplementärfarbe anpaßt, eine Tatsache, die Engelmann als das Gesetz der „komplementären chromatischen Adaptation" bezeichnet hat.

Die allgemeinen Probleme, welche die Beschäftigung mit den einzelligen Organismen bei Engelmann angeregt hatte, wuchsen unter seinen Händen sehr bald über den Kreis dieser Versuchsobjekte hinaus. Hatte er für seine pflanzenphysiologischen Untersuchungen noch einzellige Algen besonders brauchbar gefunden, so gelangte er bei seinen Studien über die Bewegung der lebendigen Substanz von den nackten Protoplasmamassen der Rhizopodenzellen zu dem Studium der Kontraktilität überhaupt und ging demselben nach bei Flimmerepithelien, bei Netzhautzellen, glatten und quergestreiften Muskelfasern. So wurde Engelmanns Arbeitsweise eine im wirklichen Sinne vergleichend physiologische Forschungsweise. Das ist um so mehr zu betonen, als nach Johannes Müllers Tode zugleich mit der Vernachlässigung des biologischen Ziels in der Physiologie auch die vergleichende

Digitized by Google

Behandlung der physiologischen Probleme dem Physiologen völlig abhanden kam, obwohl Johannes Müller sein ganzes Leben hindurch praktisch und theoretisch den Standpunkt vertreten hatte, daß die Physiologie wie die Anatomie immer eine vergleichende sein müsse. Engelmann war, wenngleich nicht mehr Schüler Johannes Müllers, dennoch nahezu der einzige vergleichende Physiologe im wirklichen Sinne. Man hat in neuerer Zeit, wo man nach größeren Umwegen in der Physiologie wieder mehr das Bedürfnis empfunden hat, in den Kurs Johannes Müllers einzulenken, auch wieder mehr nach „vergleichender Physiologie" verlangt. Aber man hat mit diesem Schlagwort vielfach gräulichen Mißbrauch getrieben, indem man wieder Problem und Methode mit einander verwechselt hat. Die vergleichende Physiologie besteht nicht darin, daß man irgend ein anderes Tier, als die üblichen Versuchstiere der Physiologie zum Objekt seiner Studien macht, etwa irgend ein wirbelloses Seetier, das Einem Jahreszeit und Zufall bei vorübergehendem Aufenthalt an einer zoologischen Station in die Hand spielt. Die vergleichende Physiologie ist keine eigene Wissenschaft, sondern lediglich eine Methode, die an sich kein anderes Problem enthält, als die Physiologie überhaupt und die sich auf alle Probleme der Physiologie mit großem Vorteil anwenden läßt. Für jeden klaren Kopf ist das eigentlich selbstverständlich. Man sollte daher bei dem heutigen Mißverständnis besser nicht von „vergleichender Physiologie", sondern lieber von der „vergleichenden Methode in der Physiologie" sprechen. Engelmanns Forschung war in diesem Sinne vergleichend physiologisch. Er ging von einem Problem aus, das er vergleichend an verschiedenen lebendigen Objekten behandelte. So hat er einen weiten und vorurteilsfreien Blick gewonnen. So hat er Zusammenhänge erkannt, wo andere keine ahnten. So hat er das Gemeinschaftliche, das Allgemeine aus der Fülle des Speziellen herausgefunden. Seine zahlreichen Untersuchungen über die kontraktilen Substanzen legen Zeugnis dafür ab. Er erkannte, daß der Kontraktilität aller lebendigen Substanzen ein gemeinsames Prinzip zu Grunde liegen müsse, und er suchte dieses Prinzip herauszuschälen. Auf dem gleichen Wege nahm er die Frage nach den Beziehungen zwischen Erregbarkeit, Reizerfolg und Erregungsleitung in Angriff. Einzellige Organismen, Flimmerepithelien, Skelettmuskeln und in den letzten Jahrzehnten das Herz mußten ihm als Versuchsobjekte dienen. Dieses Problem war es, das ihn auch auf die Streitfrage führte, ob die Impulse der Herztätigkeit „myogenen" oder „neurogenen" Ursprungs sind, eine Frage, in der er bekannt-

Digitized by Google

lich zum Vorkämpfer der Theorie vom „myogenen" Ursprung wurde. Der alte Streit neigt sich heute mehr zu Gunsten der „Neurogeniker". Das schmälert Engelmanns Verdienst in keiner Weise, denn seine Untersuchungen und die seiner Schüler haben in dieser Frage so außerordentlich wertvolle Tatsachen geliefert — ich nenne nur die Erfahrungen über das von Marey entdeckte Refraktärstadium, über die Extrasystole, über die kompensatorische Pause etc. —, daß sein Name für immer mit der Geschichte der Herzphysiologie verbunden bleiben wird. Auch seine Anschauungen über das Prinzip der Kontraktionsbewegungen und über die Beziehungen zwischen Irritabilität, Kontraktilität und Erregungsleitung werden wohl in manchen Punkten Korrekturen erfahren. Aber welcher fruchtbare Forscher könnte von sich sagen, daß seine Theorieen ewig bestehen werden? Das Leben der meisten Theorieen währt 20 Jahre, und wenn es hoch kommt, so sind es 50, und wenn es köstlich gewesen ist, so hat es Anregung gegeben und Fortschritt erzeugt. Und das ist nicht wenig!

Engelmann hatte eine glückliche Jugend. Am 14. November 1843 zu Leipzig als Sohn des Verlagsbuchhändlers Wilhelm Engelmann geboren, war er von vornherein vor allen materiellen Sorgen geschützt und konnte ungehindert seinen Neigungen nachgehen, die eine liebevolle und anregende Erziehung in ihm erweckte. So entwickelte sich aus dem Knaben und Jüngling ein Forscher, der bei allen seinen Arbeiten immer und ganz allein von der Begeisterung und Liebe für seine Probleme geleitet wurde. Alles Streben nach persönlichen Erfolgen und äußerem Glanz war seiner reinen, durchaus auf ideale Ziele gerichteten Seele vollkommen fern. Dazu besaß er eine liebenswürdige, durch ihre natürliche Ungezwungenheit und ihren anspruchslosen Humor jeden Menschen gewinnende Natur. Eine große Rolle in seinem Leben spielte die Musik. Seine Freundschaft mit Brahms und Clara Schumann ist bekannt.

Mit Göttingen hat Engelmann mehrfache Beziehungen gehabt. Seine Mutter war die Schwester des Göttinger Klinikers K. E. Hasse. In Göttingen hat er zeitweilig studiert. Hier hat er auch, wie er angibt, von seinem Onkel Hasse starke Anregung empfangen. Unserer Gesellschaft gehörte er seit 1884 als korrespondierendes Mitglied an.

Seine wissenschaftliche Laufbahn war glänzend. Noch bevor er sein Doktorexamen in Leipzig absolviert hatte, wurde er als Assistent an das physiologische Institut nach Utrecht zu Donders berufen, wo er später Professor neben Donders und schließlich

Digitized by Google

Donders' Nachfolger wurde. Dreißig Jahre hat er an der holländischen Hochschule gelehrt und gearbeitet, bis ihn im Jahre 1897 der Ruf auf den Lehrstuhl Du Bois-Reymonds nach Berlin zog. Hier waren ihm noch einige Jahre erfolgreichster Arbeit und edelsten Lebensgenusses beschieden in dem alten Du Bois-Reymondschen Institut an der Ecke der Dorotheen- und Wilhelmstraße, das er sich bei seiner Uebersiedelung nach seinen Wünschen eingerichtet hatte. Dann aber trat ein bis dahin erträgliches Leiden plötzlich mit ernsten Wirkungen hervor. Ein alter Diabetes begann sein Zerstörungswerk. So glücklich Engelmanns Jugend gewesen war, so bitter war der Kelch des Leidens in seinem Alter. Aber trotz klarer Voraussicht seines langsamen Verfalls, den er Schritt für Schritt verfolgte, verlor er seinen Humor keinen Augenblick. Mit wunderbarem Heldenmut sah er sich vor seinen eigenen Augen sterben, bis ihn der 20. Mai vorigen Jahres von seinen Qualen erlöste. Sein Andenken aber wird unter uns bleiben.

Digitized by Google

Digitized by Google

Bericht

über die öffentliche Sitzung am 12. November 1910.

Herr Paul Wendland las: Die Aufgaben der platonischen Forschung.

Digitized by Google

Die Aufgaben der platonischen Forschung.

Von

Paul Wendland.

Vorgetragen in der öffentlichen Sitzung vom 12. November 1910.

Wie schwierig die Aufgabe ist, vergangene Wirklichkeit zu neuem Leben zu wecken, das echte Bild geschichtlicher Persönlichkeiten wieder zu gewinnen, kommt auch denen, die sich geschichtlicher Forschung widmen, nicht immer zu klarem Bewußtsein. Und doch gilt es nicht nur von den Männern der Tat, die wir meist nur durch fremde Augen sehen, sondern auch von den geistigen Heroen, die in ihren Werken zu uns reden. Die höchsten Schöpfungen des Genius sind herrlich wie am ersten Tage; aber die Bilder, die sie in den Seelen der Menschen wecken, wechseln. Die Größe eines Geistes, der alle Saiten des menschlichen Wesens erklingen läßt, pflegt im Laufe der Generationen immer nur in einzelnen seiner Ausstrahlungen aufgefaßt zu werden. Und die Kraft der Wirkungen, die wir von solchen Genien empfangen, beruht wesentlich auch darauf, daß mit den unmittelbaren Eindrücken, die uns ihre Werke mitteilen, sich unwillkürlich etwas verbindet von all den Anregungen, Vorstellungen, Stimmungen, Werturteilen, die sie in einer Jahrhunderte umspannenden Wirksamkeit ausgelöst haben. Es ist als ob ein unsichtbarer Geisterchor uns umgäbe, wenn wir den Offenbarungen des Genius lauschen, und seine Stimme leise mitklingen ließe. Das gilt von biblischen Schriften wie von Homer und Platon, gilt in um so größerem Maße, je weiter der Abstand ist, der uns von ihnen trennt, je tiefer und unauslöschlicher darum die Spuren sind, die sie in der Geistesgeschichte der Menschheit hinterlassen haben.

Digitized by Google

Nach Platons Tode lebt in seiner Schule zunächst die Theologie und Zahlenspekulation des greisen Philosophen fort. Mit ihrer Wendung zur Skepsis erneuert dann die Akademie den jugendlichen Plato der „sokratischen" Dialoge mit ihrer kritischen, zu keinem positiven Ergebnis führenden Haltung. Der Stoiker Poseidonios belebt von neuem die weltabgewandte Mystik Platons, die das ganze niedergehende Altertum beherrscht, bis endlich im Übergange zum Mittelalter die Harmonisierung mit Aristoteles den echten Geist Platos durch die Scholastik erdrückt.

So haben bis in die Gegenwart die Auffassungen des Philosophen und damit auch die Aufgaben platonischer Forschung sich gewandelt. Die systematische Darstellung des Lehrganzen galt noch vor kurzem als das letzte Ziel der platonischen Forschungen. Schleiermacher, der durch die Würdigung der einzelnen Dialoge als Kunstwerke der geschichtlichen Forschung Bahn gebrochen hat, wollte einen inneren Zusammenhang der Dialoge erkennen, den er in einem vorgefaßten, die einzelnen Schriften wie Glieder zu einem organischen Ganzen verbindenden Plane des Meisters begründet sah. Diese durch unsere idealistische Philosophie verstärkte Voraussetzung, daß der Philosoph mit einem fest geschlossenen Systeme sich habe einführen müssen, die Vorstellung, Plato dürfe nicht „als ein Skribent erscheinen, dessen wissenschaftliche Überzeugungen in den wesentlichsten Fragen wankend und unbeständig waren, der einmal erkannte Wahrheiten verließ", hat die Forschung lange Zeit beherrscht. Und auch nachdem sie sich selbst durch die radikalen Konsequenzen ihrer Durchführung genügend widerlegt hatte, wirkten die alten Vorurteile aufs Stärkste auch noch bei den Forschern nach, die die systematisierende Richtung längst durch die Erkenntnis einer in den Dialogen sich offenbarenden fortschreitenden Entwickelung gemildert hatten.

Man darf jetzt zuversichtlich sagen, daß die zusammenfassende Darstellung des Systemes, mag sie auch aus didaktischen Rücksichten unentbehrlich sein, rein wissenschaftlich betrachtet, eine falsch gestellte und darum unlösbare Aufgabe ist. Gewiß verträgt der Denker keine atomisierende Betrachtung, die Dialektik, Psychologie und Mystik, Ethik sich unabhängig nebeneinander entwickeln und erst spät in notdürftige Verbindung treten läßt. Das Zusammenstreben der Tendenzen zur Einheit, die Konstanz der Hauptrichtungen des Denkens und ihr inniger Zusammenhang ist unverkennbar. Aber die Wandlungen sind viel zu erheblich, als daß sich die Anschauungen der drei Hauptperioden auf eine Fläche projicieren ließen. Die einheitliche Weltanschauung ist nirgend

Digitized by Google

der Ausgangspunkt, sondern das Ziel, dem die Entwickelung sich annähert. Die tiefste Einheit der Motive und Triebkräfte ist nur in der Persönlichkeit zu fassen, und der Weg zum Verständnis der Philosophie führt auch hier durch das Menschentum. Die Klippen und Gefahren, die die Systematisierung bedrohen, hat auch der umsichtigste Forscher nicht vermeiden können: Schwierigkeit der richtigen Wertung der Varianten, harmonistische Umdeutung und Ausgleichung von Differenzen, Verblassung des Bildes durch Ausscheidung von Zügen, die in den zu engen Rahmen nicht passen, Ausfüllung der Lücken des fiktiven Systemes durch Fragestellungen und Antworten, die gar nicht platonisch sind.

Ich hebe aus der Zellerschen Darstellung einige Punkte hervor, an denen die Schwierigkeiten einer systematischen Darstellung besonders deutlich hervortreten. Mit glänzendem Scharfsinn hat der jugendliche Zeller in seinen Platonischen Studien 1839 den Abstand der Gesetze von den früheren Dialogen Platons erkannt und daraus den kühnen Schluß der Unechtheit der Gesetze gezogen. Er hat dies Verdikt später zurückgenommen; aber in das System konnten die Gesetze nicht eingehen, und so ist ihnen ein besonderes Kapitel gewidmet worden. Falsch beurteilt hat Zeller die Dialoge der Übergangsperiode, Parmenides, Sophistes, Politikos, in denen Platon die eigene Lehre einer Revision und einschneidenden Kritik unterwirft, deren Folge sich in der neuen Geltung (Timaios) oder in dem völligen Zurücktreten (Gesetze, Philebos) der Ideen offenbart. Die Anerkennung solcher Selbstkritik mußte der systematisierenden Richtung widerstreben, und so bezog Zeller mit andern die Kritik vielmehr auf die Megariker, deren Bild nun mit ganz neuen, meines Erachtens falschen Zügen bereichert wurde.

Die neuere Forschung will in Platon nicht mehr den Erfinder eines Systemes, sondern den ganzen lebendigen Menschen in allen seinen Beziehungen zu Familie und Staat, zu politischer, philosophischer, litterarischer Entwickelung seiner Zeit, mit dem Reichtum der sein geistiges Leben bestimmenden Motive sehen. Wir sind bei Plato in der beispiellos glücklichen Lage, wohl alle Schriften zu besitzen, die er für die Öffentlichkeit bestimmt hat. Daß wir dennoch von aristotelischer Weltanschauung ein sehr viel klareres und vollständigeres Bild haben, erklärt sich nicht nur aus dem verschiedenen Charakter der Persönlichkeiten, sondern auch der Schriften. Ein System läßt sich mit Sicherheit nur herausarbeiten bei den Denkern, die die Form der systematischen Lehrschrift angewandt haben. Dieselbe Aufgabe muß scheitern, oder sie ist doch nur annähernd lösbar bei Platon, Paulus, Luther.

Digitized by Google

Goethe, deren Schriften gar nicht auf systematische Darstellung angelegt sind. Beim echten und lebendigen Dialoge ist es ein fast ebenso gefährliches Unterfangen wie beim Drama, die wahren Meinungen des Dichters sicher herausstellen zu wollen.

Platons Dialoge geben uns nur einen enger oder weiter bemessenen Ausschnitt aus dem Kreise der ihn beschäftigenden Probleme. Man mag von dem Exkurse des Phaidros über den alle schriftstellerische Darstellung weit überragenden Wert des dialektischen Unterrichtes noch so viel auf Rechnung momentaner Stimmung setzen; dennoch darf man ihm mit Sicherheit entnehmen, daß Plato dem lebendigen Wort eine sehr viel größere Wirkung als den Schriften zutraut und den Schwerpunkt seiner Arbeit in der Lehrtätigkeit gefunden hat, daß ihm die Schriften nur Nebenprodukte der Schularbeit, nur Parergon waren. Wir haben Tatsachen genug, an denen wir nachweisen können, wie unvollständig das Bild ist, das uns die Schriften allein vom Umfange der platonischen Philosophie geben.

Der gelegentlich im Staate und in den Gesetzen gegebene Aufriß der Wissenschaften ist kein leerer Rahmen gewesen; er hat wirklich in der philosophierenden Gemeinschaft der Schule seinen Inhalt gefunden. Am Theätet ist jüngst gezeigt worden, mit welchem Interesse Platon die mathematischen Entdeckungen seiner Zeit verfolgte. Er selbst hat die analytische Methode in die Mathematik eingeführt. Mit den bedeutendsten Mathematikern seiner Zeit hat er im lebhaften Verkehr und wissenschaftlichen Austausch gestanden und gibt die aus diesen Beziehungen gewonnenen Erfahrungen wieder, wenn er im Staate die Mathematik als Gehilfin ihre Ergebnisse der Dialektik übergeben läßt. Der Astronom Eudoxos wußte, warum er, der fertige und selbstständige Forscher, sich der Akademie anschloß, und er hat dann nach den Postulaten der platonischen Spekulation seine Sphärentheorie ausgebildet. Die Naturphilosophie des Timaios setzt mindestens lebhafte Fühlung mit naturwissenschaftlicher und medizinischer Litteratur voraus, und ein Bruchstück des Komikers Epikrates zeigt uns den akademischen Kreis mit zoologischen und botanischen Klassifizierungen beschäftigt. Die in ihrem Kerne sehr alten platonischen *Διαιρέσεις* geben einen Einblick in die Fülle der Gegenstände, die den dialektischen Schulübungen synthetischer und analytischer Begriffsbestimmungen zugrunde gelegt wurden. Je mehr die jetzt lebhaft betriebene Forschung die Geschichte der Fachwissenschaften aufhellt, je sorgfältiger die Fäden, welche von den Forschungen einzelner Platoniker, des Aristoteles und der von

Digitized by Google

ihm organisierten Schule auf platonische Anregungen zurückführen, verfolgt werden, um so klarere Beziehungen platonischer Aussagen auf die wissenschaftliche Einzelforschung seiner Zeit werden festgestellt werden, und um so mehr werden wir uns einem Vollbilde der platonischen Lebensarbeit annähern.

Alle diese Zeugnisse bestätigen den Eindruck, den der empfängliche Leser von den Dialogen erhält. Die Persönlichkeit, die hinter diesen Schriften steht, ist noch sehr viel größer und geistig reicher, als sie sich schriftstellerisch darstellt; eine Fülle von Andeutungen öffnet dem tiefer Eindringenden immer neue Perspektiven auf einen geistigen Besitzstand, dessen Weite die das Unausgesprochene ergänzende Phantasie nur ahnen kann. Der Schriftsteller ist nicht der ganze Platon. Die eigenste und höchste Lebensaufgabe war ihm seinen Staat zu schaffen, und die tiefe Tragik dieses Menschenlebens ist, daß alle die heißersehnten und leidenschaftlich betriebenen Versuche, sein Ideal zu verwirklichen, gescheitert sind. So wurde die philosophierende Gemeinschaft mit Schülern und Mitforschern sein weniger selbstgewählter als ihm durch Resignation aufgenötigter Lebensinhalt. Und wesentlich aus dieser Gemeinschaft ist ihm die dialogische Schriftstellerei als Abglanz und förderndes Mittel jener lebendigen erzieherischen Dialektik, jener Wirkung von Mensch zu Mensch erwachsen.

Form und Gehalt der platonischen Philosophie lassen sich gar nicht von einander scheiden. Es liegt nicht so, daß man nur das Mythische als rhetorischen Schmuck auszuscheiden oder umzudeuten brauchte, um sich des reinen, lehrhaften Gehaltes der Dialoge zu bemächtigen. Die Versuche, der Ideenlehre einen rein erkenntnistheoretischen noch heute giltigen Sinn abzugewinnen, vollziehen, so lehrreich und anregend sie als Fortbildungen der platonischen Philosophie, auch für die Forschung, sein können, doch eine Scheidung des mythisch Phantastischen und des Begrifflichen, die der lebendigen Persönlichkeit, in der der dialektische Philosoph und der Dichter vereint sind, fremd ist. Und die schon im Altertum so verschieden lautenden Antworten auf die Frage, ob die Aussagen über Dreigeteiltheit und Einheit der Seele sich ausschließen oder ob die Annahme eines einmaligen Schöpfungsaktes Platons letzte und wahre Meinung sei, erklären sich daraus, daß in Platon der Dichter und Prophet zu Worte kommt, wo es gilt, von den tiefsten Geheimnissen des Lebens und der Welt den Schleier zu lüften und in die der Wissenschaft unzugänglichen Tiefen zu blicken.

Es mag ja noch heute Dogmatiker geben, die gern alle platonische Poesie hingäben, wenn sie dafür die eine Lehrschrift in

Digitized by Google

Händen halten könnten, die nach dem Wunsche ihres Herzens und nach dem Maße ihres Verständnisses zugeschnitten wäre. Nur um so dringender muß der Historiker die Frage nach den Beziehungen von Gehalt und Form in der griechischen Philosophie aufwerfen, um so sorgfältiger der Entwickelung der litterarischen Formen, die den ältesten Denkern überhaupt zur Verfügung standen, nachgehen. Der neue Inhalt des ionischen Denkens hat bald die Form epischer Dichtung, in die er anfangs gefaßt wurde, gesprengt und die ihm gemäßere Form eines Prosabuches gefunden, für die nur die volkstümliche, aber kunstmäßigen Formen zustrebende Erzählungskunst ein wenig vorgearbeitet hatte. In Anlehnung an alte Spruchweisheit reihen Heraklit und auch noch der Ethiker Demokrit, der in lockerer Fügung der Gedanken mit dem Reichtum seiner Lebenserfahrungen den ganzen poetischen Reiz seiner Sprache entfaltet, Maximen und Reflexionen aphoristisch aneinander. Das innere geistige Band, beherrschende Grundsätze, die wie Leitmotive immer wieder anklingen, fehlen nicht. Das erhebt sie hoch über die volkstümliche Spruchweisheit. Aber die Logik des Gedankens ist der Logik der Sprache vorausgeeilt. Die Sprache ist noch nicht geschmeidig genug, um die Gruppierung der Gedanken, Über- und Unterordnung der Glieder zum klaren Ausdruck zu bringen. In den reliefartig hervortretenden Stichwörtern gewahrt man Spuren einer absichtsvollen Gruppierung. Aber es fehlt die Architektonik der Periode wie der nach planmäßiger Disposition organisierte Aufbau des Ganzen. In dogmatischem oder auch prophetischem Tone werden die letzten Ergebnisse des Denkens herausgestellt.

Und doch haben gleichzeitig Dialektik und Rhetorik daran gearbeitet, den wissenschaftlichen Prosastil zu schaffen. Die bedeutende Rolle, die beide im antiken Geistesleben gespielt haben, läßt sich modernem Verständnisse nicht leicht nahe bringen, und bisher hat die Forschung erst den maßgebenden Einfluß der rhetorischen Kunstlehren und Kunstformen ganz aufgehellt. Die Fortschritte der im Verse uns spröde und ungelenk anmutenden Syllogistik des Parmenides zu der natürlichen Verkettung ganzer Gedankenreihen in den Prosabüchern des Zenon und Melissos lassen sich noch deutlich erkennen. Der allgemein agonistische Zug des griechischen Lebens, die überwiegende Bedeutung des lebendigen Wortes und der Diskussion für die Verbreitung der Gedanken, mit der das Lesebuch noch nicht konkurrieren kann, vor allem wohl der wunderbar rapide Übergang von alter Naivetät zu den höchsten Stufen der Bildung, der eine Freude an allen Paradoxien

Digitized by Google

und ein selbstgewisses Vertrauen auf die Leistungen formaler Virtuosität, eine optimistische Hochschätzung des Wortes erzeugt, endlich die Richtung der Forschung auf den Menschen als Objekt wirken im Zeitalter der Aufklärung zusammen, um eine üppig wuchernde Dialektik zu entfalten, die in sophistischer Eristik und Antithetik ins Kraut schießt und uns selbst in einigen platonischen Dialogen befremdet. Wer an den schwierigsten Dialogen Platons die intensive Energie, mit der alle Möglichkeiten durchdacht und bis ans Ende verfolgt werden, von allen Seitenwegen zur Erörterung des Hauptproblemes sicher zurückgelenkt, die verschiedenen Fäden auf ein Ziel geführt werden, nacherlebt und die Wirkungen dieses Stahlbades erfahren hat, wird die Bedeutung dieser subtilen Dialektik für die Fortschritte des griechischen Denkens und für die Erziehung und geistige Gymnastik richtiger werten, als wenn sie ihm in dem Zustande der Starrheit entgegen tritt, in den sie des Aristoteles Systematik, die ungezähmten Triebe bändigend, gebracht hat.

Die Bedingungen der systematischen Lehrschrift waren jetzt gegeben, und die Sammlung hippokratischer Schriften lehrt uns ihre Vorstufen am besten erkennen. Methoden und Wege der Forschung erscheinen jetzt ebenso interessant und mitteilenswert wie die letzten Wahrheiten, zu denen sie führten. Aber in die scheinbar natürliche und geradlinige Entwickelung zur ausgereiften Lehrschrift ist die Kunstform des Dialoges dazwischen getreten. Unter dem überwältigenden Eindruck des an Sokrates begangenen Justizmordes haben Platon wie andere Genossen des sokratischen Kreises begonnen, das lebendige Bild der Individualität und der Wirksamkeit des im Tode verklärten Sokrates in der Form des Dialoges, der sein innerstes Wesen am besten zum Ausdruck bringen konnte, sich und der Mitwelt lebendig zu erhalten. So sehr die Sokratik, weil sie nicht System sondern individuelle Methode war, zur Ergänzung drängte und von allen Schülern unter dem Eindruck anderer Anregungen, die sie neben oder vor dem Verkehre mit Sokrates empfangen hatten, fortgebildet wurde, dennoch bekannten sie sich alle treu zu ihrem Meister und führten ihren ganzen geistigen Lebensgehalt in dankbarer Pietät auf ihn zurück, wie auch Aristoteles trotz des Bewußtseins der Distanz sich fortgesetzt als Platoniker betrachtet. Die sokratische Methode lebt in der Akademie fort. Forschung ist dialektische Erörterung, und Dialektik ist zugleich eine durch die Bande des Eros geknüpfte innige Seelengemeinschaft. Die Denkarbeit ist wesentlich dialogisch.

Die Bedingungen, unter denen der platonische Dialog ent-

Digitized by Google

standen ist, seine fortschreitende Entwickelung, die Versuche, die Platon mit der neuen Kunstform in bald referierender (der Ausmalung der Scenerie und feineren Charakteristik dienender), bald rein dramatischer Form, in gleichmäßigem Flusse der Dialektik oder in planvoller Gruppierung größerer Reden, in Anpassung der verschiedenen Stilarten an den Stoff, endlich in der Verbindung mehrerer Dialoge zu einem größeren Ganzen macht, bedürfen um so mehr der eindringenden Untersuchung, als wir bei ihm gründliche Reflexion und sichere Berechnung in der Anwendung der Mittel seiner Kunst voraussetzen dürfen. Gewiß, des irrationalen und enthusiastischen Triebes alles dichterischen Schaffens ist sich Platon bewußt gewesen und hat ihn wie Demokrit als das Kennzeichen echter musischer Produktion der verstandesmäßigen Auffassung der Poesie entgegengesetzt. Aber er gehört zu den echten Künstlern, die zugleich das Bedürfnis empfunden haben, sich über die psychologischen Bedingungen ihres Schaffens Rechenschaft zu geben. Wenn der Philosoph, der in griechischer Poesie lebt und webt, der selbst, indem er alle Poesie dem sittlich rigorosen Ideale seines Staates zum Opfer bringt, sein inniges Verhältnis zur Poesie durchfühlen läßt und von der Gewalt zeugt, die sie über ihn ausübt, im Staat und im Theätet das Verhältnis referierender und dramatischer Dichtung erörtert, ihre ästhetische und ethische Wirkung abwägt, so offenbart er zugleich die Gesichtspunkte, die ihn in der wechselnden Haltung seiner Dialoge geleitet haben. Schöpferisches Vermögen und Selbstbesinnung auf die Vorgänge des dichterischen Schaffens gehen bei Platon wie bei Schiller und Goethe neben einander her. Und die aus der Analyse der Dialoge sich ergebenden Motive des künstlerischen Schaffens finden an Platons theoretischen Betrachtungen über die Dichtkunst vielfache Bestätigung.

Freilich müssen bei Platon ähnlich wie bei Shakespeare die technischen Geheimnisse zumeist doch aus dem Studium der Werke erschlossen werden. Mit Neid blicken wir auf die glücklicheren Goethe-Philologen, denen eine Fülle intimster Dokumente tiefe Blicke in die Werkstatt des Dichters gestattet, deren emsiger Fleiß durch die Entdeckung des Urfaust und der theatralischen Sendung Wilhelm Meisters belohnt werden konnte, die die Arbeit des Dichters an manchen Werken durch verschiedene Stadien an der Hand von Zeugnissen verfolgen. Aber wir schöpfen auch aus diesen Analogieen das Vertrauen, daß Probleme, wie sie für die Genesis von Staat und Gesetzen sich aus Verschiedenheiten des Stiles, der Stimmung, der Gesichtspunkte, bei den Gesetzen auch

Digitized by Google

aus dem Nebeneinander paralleler Entwürfe, ergeben haben, richtig gestellt sind, da die Vorgänge, die hier bei einer durch viele Jahre fortgesetzten Arbeit an umfassenden Kompositionen vermutet werden, nun in analogen Fällen urkundliche Bestätigung gefunden haben. Leider ist nicht die geringste Aussicht vorhanden, daß je ein glücklicher Fund uns die Bestätigung der Fragestellung zugleich und die Widerlegung der allzukühnen Rekonstruktionsversuche, die besonders bei dem noch auf der Höhe der Gestaltungskraft redigierten Staate nicht gewagt werden durften, in die Hände geben werde.

Sokrates hat die führende und beherrschende Rolle in allen Dialogen, bis auf einige des späteren Alters, in denen er als stiller Zuhörer in den Hintergrund tritt und andere Personen (der Fremde aus Elea, Timaios, Kritias) die Gedankenentwickelung leiten. An dem Gespräche der Gesetze endlich nimmt Sokrates überhaupt nicht teil; der Athener, der hier an seine Stelle getreten ist, ist eine durchsichtige Maske für Platon selbst, der hier den zeitlichen Rahmen des sokratischen Lebens durchbrochen hat und sich nun mit größerer Freiheit bewegen kann. Sicher verrät dieser Rollentausch Platons klares Bewußtsein für den mit seiner fortschreitenden Entwickelung sich erweiternden Abstand von der sokratischen Begriffsethik und für die Unmöglichkeit, den Sokrates länger zum Träger seiner eigenen Gedankenwelt zu machen. Aber welches ist nun der Sinn des entgegengesetzten Verfahrens der früheren Dialoge? Verbürgt es uns etwa die Absicht Platons, ein treues Bild des geschichtlichen Sokrates zu entwerfen? Im scharfen Gegensatz zur herrschenden Meinung hat zuletzt Bruns in seinem Litterarischen Porträt die Ansicht begründet, Platon habe historische Porträts von Sokrates und seinen Mitunterrednern zeichnen wollen und sei nur unbewußt gelegentlich von der Wirklichkeit abgewichen; der platonische Sokrates könne nicht platonische Gegner bekämpfen und sich auf litterarische Fehden des vierten Jahrhunderts beziehen. Unter geschichtlicher Treue ist dabei natürlich nicht realistische Wiedergabe der Wirklichkeit verstanden, und die Freiheit des künstlerischen Schaffens soll natürlich nicht geleugnet werden. Platon will nicht aktenmäßig referieren und mechanisch kopieren, sondern dichterisch reproduzieren. Darin sind alle einig: Die freie Kunst des Dichters hat Scenerie, Zeit, Wahl der Personen, Ökonomie des Stoffes, planvollen Aufbau des in der Wirklichkeit sich stets viel freier und zufälliger bewegenden Gespräches bestimmt. Selbst das überschreitet noch nicht die Grenzen dichterischer Freiheit, daß die Zeit des Dialoges öfter

Digitized by Google

nicht scharf fixiert, sondern durch verschiedene Zeitbeziehungen nur auf einen ungefähren Zeitraum bestimmt ist; nur der Pedant könnte von dem Dichter fordern, daß er auf philologische Leser Rücksicht nehme, die ihm solche den künstlerischen Eindruck nicht störende Widersprüche nachrechnen und zum Teil von der Voraussetzung ausgehen, als müsse der Dichter ein Datum festgestellt haben und könne ihm widersprechende Beziehungen nur aus Gedankenlosigkeit eingeführt haben.

Weiter behauptet derselbe Gelehrte, der so energisch für die historische Treue Platons eintritt, dennoch, und das mit vollem Recht, für die Apologie subjektive Treue nicht in dem Sinne, daß Platon die von ihm mit angehörte Verteidigungsrede des Sokrates möglichst genau habe wiedergeben wollen. Das wahre Wesen und Wirken seines Lehrers hat er in dem idealisierten Bilde, wie es sich seiner Seele unauslöschlich eingeprägt hatte, darstellen wollen; aber nur künstlerische Rücksichten haben Disposition und Aufbau der drei Reden bestimmt, haben entschieden, inwieweit Sätze der wirklichen Rede in die platonische Konception aufgenommen wurden. Treue in dem Sinne war hier erfordert, daß kein unwahrer Zug in Sokrates' Wesen eingemischt wurde, der leicht durch die Wirklichkeit widerlegt werden konnte.

Aber nimmermehr brauchte Platon mit dem Unverstande von Lesern zu rechnen, die erwarteten, den Wortlaut der Gerichtsrede vorgelegt zu finden. Schon die Tatsache der Verurteilung mußte der Rede ein neues Ethos geben. Und mit welchem Befremden hätten sonst die Athener die im kurzen Zeitraum folgenden, so stark von einander abweichenden und doch alle als Reden des Sokrates gefaßten Apologieen des Platon, Lysias, Xenophon (ob echt oder unecht, alt ist sie sicher), von Späteren zu schweigen, lesen müssen, wenn nicht in dieser Litteraturgattung die freieste künstlerische Gestaltung, die manche Moderne für Plato nicht anerkennen wollen, als selbstverständlich gegolten hätte. War doch die künstlerische Umarbeitung und Stilisierung vor Gericht gehaltener Reden zum Zwecke der Buchpublikation überhaupt ein ganz gewöhnliches Verfahren, und die fingierte Verteidigungsrede des Isokrates gestaltet die Situation nach dem Vorbilde des sokratischen Prozesses.

Soll nun das Maß subjektiver Treue, das für die Apologie, Kriton, die begriffsethischen Dialoge zugegeben zu werden pflegt, auch für die späteren Stücke gelten? Die Tatsache eines erheblich weiteren Abstandes ist anerkannt. Abzuwehren ist in jedem Falle eine Erklärung dieses Abstandes und eine Bezeichnung der früheren

Digitized by Google

Dialoge als historischer in dem Sinne, daß Plato seine künstlerischen Intentionen geändert und Grundsätze historischer Treue, die er sich früher gesetzt hätte, später modifiziert oder aufgegeben hätte. Der Abstand ist nur die natürliche und unabsichtliche Folge einer über Sokrates hinausführenden Entwickelung, in der Ideenlehre wie die mit ihr sich eng verbindende Seelenlehre und Mystik, Staatstheorie und Naturspekulation zuwuchsen und damit die sokratischen Elemente in einen neuen universalen Zusammenhang gerückt wurden. Ist nun Bruns' Annahme wahrscheinlich, Platon habe eigene Gedanken, die weder sokratisch noch Konsequenzen sokratischer Lehre sind, nur ausnahmsweise unbewußt und unabsichtlich Sokrates in den Mund gelegt? Soll es ebenso als Regel, die durch vereinzelte Ausnahmen nur bestätigt werden könnte, gelten, daß Platon nicht den Mitunterrednern oder Gegnern des Sokrates Theorieen seiner eignen Zeit geliehen hat, um sie durch den Meister bekämpfen und widerlegen zu lassen? Auch für den, der die Fragen längst für entschieden hält, ist die Erörterung des Problems lehrreich; denn sie führt in die künstlerischen Absichten Platons hinein.

Unzweifelhaft können nur Momente der künstlerischen Komposition in dieser Frage entscheidend ins Gewicht fallen. Gibt es, so ist zuerst zu fragen, schriftstellerische Rücksichten, die den Philosophen hätten hindern können, mit vollem Bewußtsein seinen eigensten geistigen Besitz dem Sokrates, Theorien der Gegenwart den Gesprächspersonen der sokratischen Zeit in den Mund zu legen? Wir werden die Frage zuversichtlich verneinen; ein echter Dichter konnte bei diesem Verfahren sehr wohl die Einheit des Sokratesbildes und die innere Wahrheit der Dialogpersonen wahren.

Läßt sich nun, was in der Dialogdichtung an und für sich möglich scheint, auch als wirklich erweisen? Zunächst einige psychologische Erwägungen! Wir verstehen heute Plato nicht mehr als den zum Systeme erfrorenen Dogmatiker, sondern als den in rastloser Entwicklung vorwärts strebenden und drängenden, den immer lernenden, die Voraussetzungen und Ergebnisse seiner Forschung wieder in Frage stellenden echten Philosophen. Sollte er nun selbst seiner über die Sokratik vorwärts dringenden Entwickelung sich so wenig bewußt gewesen sein, daß er nur unabsichtlich Sokrates zum Träger seiner eigenen Ideen gemacht hätte? Das klare Bewußtsein jenes Abstandes scheint sich doch in der Rollenverschiebung der späteren Dialoge deutlich zu verraten. Ist es da nicht wahrscheinlich, daß ihm dies Bewußtsein und damit die unausweichliche Notwendigkeit, künftig auf Sokrates als Haupt-

Digitized by Google

person des Gespräches zu verzichten, mindestens bei Dialogen der mittleren Periode, deren Gehalt weit über Sokrates hinausführte, aufgegangen ist?

In einzelnen Fällen läßt sich das im höchsten Maße wahrscheinlich machen. Platon hat das Bedürfnis sich mit der eleatischen Philosophie auseinander zu setzen. Um das im Rahmen der sokratischen Zeit tun zu können, führt er den ganz greisen Parmenides mit dem ganz jugendlichen Sokrates im Gespräche zusammen. Er erdichtet eine Situation, die an und für sich nicht unmöglich sein darf, die sich aber gar nicht als historisch erweisen läßt. Die Berechnung der Erfindung schließt hier die Annahme eines unabsichtlichen Abweichens von der Wirklichkeit aus.

Platon will dem wohl um 368 gestorbenen Theätet, insbesondere auch seiner mathematischen Begabung, ein Denkmal setzen. Wenn er nicht bekannten chronologischen Daten widerstreiten will, kann er nur Sokrates unmittelbar vor seinem Tode mit dem ganz jugendlichen Theätet zusammenbringen. Aber die notorisch erheblich späteren mathematischen Entdeckungen Theätets scheinen in diesen Zeitrahmen nicht eingehen zu können. Mit erstaunlicher Kunst ist Platon der Schwierigkeit Herr geworden: Er entfaltet die höchsten Reize seiner Fähigkeit im Charakterisieren, indem er Knospe und Blüte, Hoffnung und Erfüllung gegenüberstellt, den Sokrates die hohe Begabung des Jünglings entdecken und diesen selbst in intuitiver Ahnung seine künftige Theorie der quadratischen Irrationalitäten vorbilden läßt. Situation und Ausgangspunkt des Gespräches, in dem die sokratische Methode sich entfaltet, hat also hier der Dichter ganz frei geschaffen und gestaltet; trotzdem betont Plato auf das Entschiedenste die Glaubwürdigkeit des Gespräches und verstärkt so die Illusion, die der unbefangene Leser empfängt. Euklides hat es sofort nach dem Berichte des Sokrates aufgezeichnet und jede Gelegenheit, wo er nach Athen kam, benutzt, seine Niederschrift mit Hilfe des Sokrates zu berichtigen. (Diese Angabe widerstreitet doch wohl der Verlegung des Gespräches in die Zeit kurz vor dem Tode des Sokrates.)

In andern Fällen deuten Platons eigene Fingerzeige an, daß er den Sokrates mit Bewußtsein in eine ihm fremde Sphäre gerückt hat. Wenn er seinen Sokrates die Grabrede des Menexenos auf Aspasia und die erotische Rede des Gastmahls auf die weise Seherin Diotima, wenn er ihn im Phaidros die zweite enthusiastische Rede über die Wirkungen des die Menschenseele in die göttliche Welt erhebenden Eros auf die vom nahen Nymphenheiligtum ausgehende Eingebung, im Menon den Glauben an die Ewigkeit der

Digitized by Google

durch verschiedene Existenzen hindurchgehenden Seele auf Priester und Priesterinnen und göttliche Dichter zurückführen läßt, so bezeichnet er damit deutlich seine virtuose Stilkunst, sein gesteigertes Gefühlsleben und seinen Enthusiasmus als etwas der verstandesmäßigen Richtung der Sokratik Fremdes, das einer Erklärung bedarf.

Ist es wirklich denkbar, daß die Dialogform für Platon je einen bewußten Verzicht auf Darlegung eigner Gedanken bedeutet hätte? Es hieße Platon degradieren, wenn man ihm solche pedantische Zurückhaltung zutraute, und es hieß sein feuriges impulsives Temperament völlig verkennen, wenn man den Entschluß zu so übermenschlicher Selbstverleugnung für möglich hielt. Es bedarf auch keiner besonderen Gelehrsamkeit, sondern nur gesunden Sinnes, um diese Annahme zu widerlegen. Denn wie könnte man z. B. in Platons Erotik, in der Art wie die Fäden alles, auch das höchste geistige Schaffen mit der sinnlichen Grundlage des Menschenwesens verknüpfen, in der pathologisch fast grauenhaft wahren Schilderung der Liebesleidenschaft, das persönlichste uns so fremdartige Erlebnis des Dichters verkennen, den Kampf eines hochstrebenden Geistes mit glühender Sinnlichkeit, Fall und Niederlage, Sieg und Herrschaft der Vernunft über Begierde und Leidenschaft? Wer hörte nicht im Staate in der Schilderung all der Gefahren und Versuchungen, denen gerade die groß angelegten Naturen ausgesetzt sind, weiter in der glänzenden Charakteristik der Haupttypen der Staaten und der Individuen eine Fülle eigener Beobachtungen und Erfahrungen heraus, ohne die uns überhaupt die Entwickelung der platonischen Staatslehre unverständlich bliebe? Wer empfände nicht in der Leidenschaft des sokratischen Kampfes gegen die Rhetorik zugleich den ganz persönlichen Haß, mit dem Platon selbst diese Großmacht seiner Zeit als das bedenklichste Symptom der völligen Ausartung der Demokratie, als die gefährlichste und unversöhnlichste Gegnerin echter Wissenschaft verfolgt? Oder wer vernähme nicht aus den ergreifenden Tönen, die der Staat in der Behandlung der Dichtkunst als Erziehungsmittel anschlägt, die Selbstüberwindung und den tiefen Schmerz heraus, die es den Dichter kostet, die schöne Welt, von der sein ganzes Wesen erfüllt ist, selbst zu zerstören und der Strenge seines sittlichen Ideales zum Opfer zu bringen? Und wer sähe nicht selbst da, wo Platon von dieser Welt sich abwendet und in die reine Ideenwelt emporstrebt, noch den dichterischen Genius des sinnenfrohen und weltoffenen Hellenen sich offenbaren, wenn er die Ideen in die Glut sinnlicher Farben taucht, sie mit persönlichem Leben

Digitized by Google

erfüllt, fast mit Fleisch und Blut umkleidet, und das alles immer in den Worten des Sokrates? Und wie will man die Änderungen und Milderungen früherer Urteile, z. B. über die Rhetorik oder über die athenischen Staatsmänner anders verstehen als als bewußte Modifikationen des früheren platonischen Standpunktes und Selbstberichtigungen?

Gewiß, seine Kunstform legt Plato bestimmte Gesetze auf: Personen seiner Zeit können nicht genannt werden, direkte Polemik ist damit ausgeschlossen; Ereignisse seiner Zeit können nicht erwähnt werden. Es ist fraglich ob vom Menexenos, der die Maske der Komödie trägt, abgesehen, sich eine Ausnahme von dieser Regel findet. Was man sonst als „Anachronismen" zählt, die zwar nicht über die Grenzen des sokratischen Lebens, aber über das vermeintliche Jahr des Dialoges hinausführen, fällt fort, wenn man sich klar macht, daß der Künstler keine scharf fixierten Daten gewählt hat.

Man kann sagen, daß die Wahl der Dialogform Platon eine starke Entsagung auflegt. In der Apologie erwähnt Sokrates die Anwesenheit Platons vor Gericht; im Phaidon wird mitgeteilt, daß Platon wegen Krankheit den letzten Gesprächen des Sokrates vor seinem Tode fern bleiben mußte: das ist alles, was die Dialoge von Platons Person melden. Dieselbe keusche und vornehme Zurückhaltung der eigenen Persönlichkeit, die auch für das Geschichtswerk des Thukydides charakteristisch ist, hat Platon durch die Wahl der Dialogform sich als Gesetz auferlegt. Die eigene Person ist scheinbar ganz ausgelöscht, um im höheren Wesen des Meisters und im Dienste der Wahrheit ganz aufzugehen. Aber der Dichter Platon hätte die Gesetze künstlerischen Schaffens, an die er sich selbst gebunden hatte, als Fesseln und Schranken empfinden müssen, wenn der sokratische Dialog einen Zwang bedeutet hätte, auf Darstellung von Gedanken, die jenseits des von ihm gewählten zeitlichen Rahmens lagen, zu verzichten. Wie hätte er in den Kämpfen seiner Zeit nicht Stellung nehmen, sich gegen Mißdeutungen nicht wehren, zu den Problemen der Gegenwart nicht das Wort ergreifen, gegen feindliche Zeitströmungen und Richtungen der Sokratik seinen Standpunkt nicht behaupten sollen? Platon empfand aufs Lebhafteste den inneren Zusammenhang seines ganzen geistigen Besitzes mit Sokrates; daß wir den Abstand tiefer empfinden und richtiger einschätzen, ändert nichts an der Tatsache. Die Kontinuität der geistigen Strömungen, die sich vom Zeitalter der Sophistik bis in die hellenistische Periode erstrecken, ist uns allmählich immer klarer geworden, und Platon hat sie gewiß noch lebhafter empfunden. So ist es uns ganz begreiflich, daß er den eigenen

Digitized by Google

Lebensinhalt mit dem des Sokrates, daß er mit den Sophisten der sokratischen Zeit Vertreter verwandter Richtungen aus seiner Zeit verschmolzen hat, daß mit Protagoras auch sein Nachfolger Aristipp, mit Kratylos spätere Vertreter realistischer Sprachphilosophie, in Gorgias und Genossen auch die Vulgärrhetorik der Gegenwart, in Kallikles und Thrasymachos eine durch die Schule der Sophistik gegangene jüngere Generation bekämpft wird, die aus den Lehren der Sophisten ein Evangelium der Antimoral ableiteten, zu dem, wie Platon sagt, in der Praxis sich Tausende bekennen. So ist der im Phaidon gezeichnete Entwickelungsgang des Sokrates in Wahrheit weder der des Sokrates noch der des Platon; sondern er hat eine typische Bedeutung und stellt den Fortschritt des griechischen Denkens überhaupt dar.

Die Konsequenz, mit der ein wissenschaftliches Problem bis ans Ende durchdacht wird, ist, selbst wenn sie zu einem falschen Ergebnisse führt, lehrreich. So ist auch Bruns' scharfe Fassung des künstlerischen Problemes förderlich und geeignet, manche Irrgänge philologischer Forschung aufzudecken. Gewiß geht das moderne Zartgefühl zu weit, wenn er es als eine Rohheit empfindet und darum für unmöglich hält, daß Platon eigene Gegner, die einst mit Sokrates in Freundschaft verbunden waren, durch ihren Lehrer hätte bekämpfen lassen. Aber diese Reaktion ist modernen Verirrungen philologischer Quellenforschung gegenüber begreiflich. Es ist neuerdings mehrfach behauptet worden, die Gegner des Sokrates seien in Wahrheit stets zeitgenössische Gegner Platons, ihre Namen nur Decknamen und verhüllende Masken. Man hat vielfach von Bosheiten und Gehässigkeiten platonischer Polemik gesprochen und in jenem Maskenspiel fast ein raffiniertes Mittel gesehen, giftige Pfeile aus dem Versteck loszuschießen.

Das läßt sich aus den Tatsachen widerlegen. Nach der schon bei Heraklit wahrnehmbaren Neigung, aus etymologischen Spielereien philosophische Sätze abzuleiten oder zu begründen, liegt kein Grund vor zu bezweifeln, daß der Heraklitäer Kratylos wirklich diese Richtung verfolgte und sich zu ihrem typischen Vertreter eignete. Platon kann die Rhetorik mit allen ihren verderblichen Wirkungen nur in der Darstellung des Gorgias, Polos, Kallikles zum vollen Ausdruck bringen, weil er den historischen Gorgias zum Vertreter der Antimoral zu stempeln zu gerecht ist. Freier kann er sich bewegen, wo er nicht historische Personen großen Namens und eines mit ihm gegebenen Gehalts als Partner einführt. Im Gespräch des Sokrates mit Theätet geht Platon wirklich von der echten Lehre des Protagoras aus, aber er verleiht

Digitized by Google

ihr durch die enge Verbindung mit Heraklits Lehre vom rastlosen Wechsel eine tiefere Motivierung, und er bildet sie im Sinne neuerer sensualistischer Theorieen (Aristipp) fort. Man braucht nur die Epochen des Verfalles des Dialoges, etwa pseudoplatonische oder christliche Dialoge, in denen der Gegner gern recht dumm dargestellt wird, zu vergleichen, um Platons Technik zu würdigen. Die Position des Gegners wird erweitert und verstärkt, die Widerlegung erschwert, die Erörterung des Problemes vertieft.

Vor allem scheinen mir in jenen Urteilen, die den platonischen Dialog wesentlich aktuell polemischen Tendenzen dienstbar machen und die ihren kindlichsten Ausdruck einmal in dem Satze gefunden haben, daß Platon mit Recht nie gern etwas schuldig bleibe, die künstlerischen Motive und die Abzweckung der Dialogform verkannt zu sein. Uns erscheint die Dialogform als eine Schranke für die natürliche Darstellung eines philosophischen Gedankenganges. Daß Platon die Form gewählt hat, erklärt sich nicht nur aus der Pietät gegen den Lehrer, es erinnert uns vor allem daran, daß in ihm der Denker mit dem Dichter und Künstler vereint ist. Meisterhaft wird der Genius auf der Höhe seines Schaffens der Schwierigkeiten Herr, und was Anderen Fessel und Hemmnis geworden ist, wird in seiner Hand höchstes Kunstmittel zu idealisierender Gestaltung. Die Gedanken werden von der zeitlichen und örtlichen Begrenzung und zufälligen Beschränkung, vom Streite der Personen und Parteien losgelöst und emporgehoben in eine fernere und geistig höhere Sphäre. Der Drang des Philosophen, nur der Sache und der Wahrheit zu dienen, das Persönliche zurückzustellen, das Irdische zu überwinden, offenbart sich in dieser Entscheidung. Das ist der wahre Sinn der Dialogform; daraus folgt die typische Darstellung und die ewige Wahrheit der Gestalten. „Das ist das Merkmal des großen Dichters, daß seine konstruktive Phantasie aus Erfahrungselementen, getragen von den Analogieen der Erfahrung, einen Typus von Person oder Handlung hervorbringt, der über die Erfahrung hinausgeht und durch den wir diese doch besser begreifen“ (Dilthey). Diese Auffassung der Dialogdichtung, zu der die Analyse führt, findet eine willkommene Bestätigung in der platonisch-aristotelischen Theorie der Dichtung als Mimesis, d. h. freier Umbildung des gegebenen Stoffes. Platon steht zur sokratischen Sphäre in demselben Verhältnis wie der Tragiker zum Mythos. In Wahrheit strömt ja auch der Dialogdichter die lange zurückgehaltene dichterische Kraft in dramatischen Schöpfungen aus, in denen der Geist der attischen Tragödie fortlebt. Die Personen des sokratischen Kreises werden zugleich

Digitized by Google

Träger der verwandten Theorien und Anschauungen der weiter fortgeschrittenen Gegenwart. Sie wachsen über die gemeine Wirklichkeit hinaus und gewinnen repräsentative Bedeutung. Denn Platon muß, um ein volles künstlerisches Bild zu gewinnen, die Traditionen der Vergangenheit oder die Eindrücke, die er einst von dem geistigen Leben der sokratischen Zeit empfangen hat, aus später gewonnenen Erfahrungen und Erlebnissen, die er in die Vergangenheit projiciert, aus tiefem inneren Nacherleben der Weltanschauungen wie aus künstlerischen Rücksichten ihrer Kontrastwirkung ergänzen und bereichern. Weil der sokratische Zeitrahmen und das sokratische Milieu den tieferen Sinn einer typischen Idealisierung und Transposition in eine höhere geistige Lage haben, darum wendet Platon alle Erfindungsgabe daran, Situation, Scenerie, Gesprächführung glaubhaft erscheinen zu lassen, und es ist unwahrscheinlich, daß er Personen wie Euthydemos und Dionysodoros oder Kallikles nicht aus der Geschichte genommen, sondern durch Fiktion die Illusion abgeschwächt hätte.

Aus dem allen ergibt sich, daß die Dialogpersonen mit ihren Anschauungen sich so wenig mit den geschichtlichen Trägern des Namens decken können wie mit ihren Nachfolgern, die mit der typischen Gestalt verschmolzen werden; darum führen alle philologischen Quellenuntersuchungen, die oft viel zu scharf auf ein Dilemma zugespitzt werden, nie zu richtig aufgehenden Gleichungen, sondern hinterlassen unerklärliche und inkommensurable Reste.

Diese Idealisierung, die den Personen eine die Wirklichkeit überragende Bedeutsamkeit verleiht, offenbart sich notwendig auch in den Mitteln der Darstellung. Das künstlerische Vermögen wurzelt im innersten Wesen Platons. Beim Greise, der zum Besitze fester, dem Streite der Meinungen enthobener Überzeugungen gelangt ist, ist es ermattet wie beim alten Goethe. Die Lebendigkeit des Dialoges läßt nach. Es ist wenig was die Mitunterredner zum Fortschritt der Gedankenbewegung beitragen, die maieutische Kunst des Sokrates scheint zu versagen. Der Timaios ist, vom einleitenden Gespräche abgesehen, zusammenhängender Lehrvortrag, ebenso das fünfte Buch der Gesetze. Die Gewöhnung an fortlaufende Vorträge, die uns wenigstens für die Schultätigkeit des Greises bezeugt sind, mag dies Erlahmen der dramatischen Lebendigkeit gefördert haben. Aber gewiß hat Platon die alte Form nicht nur aus träger Gewohnheit beibehalten. Der künstlerische Trieb, der sie erzeugt hatte, beherrscht überhaupt die Schöpfungen der griechischen Kunst. Die Ruhmestaten der Perserkriege werden dargestellt im Vorbilde der mythischen Kämpfe. Die politische

Digitized by Google

Publizistik projiziert die Forderungen des Tages in die Geschichte der Vergangenheit. Die Tragödie gibt den alten Mythen einen immer neuen Gehalt, indem sie die religiösen, sittlichen, sozialen Probleme, das gesteigerte Leben der neuen Zeit in die alten Stoffe hineinträgt. Sie zersprengt fast durch den neuen Inhalt die alte Form, aber dennoch bewahrt sie die Abhängigkeit vom Mythos und findet nicht die neue Form des bürgerlichen Schauspiels, für die alle Bedingungen gegeben sind.

So ist auch Platon der alten Form treu geblieben und bezeugt damit die Stärke des dichterischen Triebes, der in seinem Sinne sich verbindet mit dem sittlichen Zwecke der Erhöhung des Niveaus. Auch noch Aristoteles ist dem schriftstellerischen Vorbilde seines Lehrers gefolgt. Aber die Bedingungen zu einem lebendigen Dialoge waren unwiederbringlich verloren. Die wissenschaftliche Debatte hatte sich aus dem Leben in die ruhige Schularbeit zurückgezogen, und im Unterrichte trat das Gespräch hinter dem Vortrage zurück; die Sturm- und Drangperiode war abgelöst durch Zeiten ruhiger Sammlung und systematisierender Forschung. Die verstandesmäßige Natur des Aristoteles war trotz des rhetorischen Schwunges der Sprache nicht geeignet, dem absterbenden Dialoge neues Leben einzuhauchen. Sein Dialog bewegt sich im ebenmäßigen Flusse fortlaufender Reden. Aristoteles übernimmt selbst die führende Rolle, während Platon selbst die Schilderung der Scenerie einem Berichterstatter in den Mund legt. Dieselbe Entwickelung, die den Niedergang des Dialoges herbeigeführt hat, hat die aristotelische Lehrschrift als die vollkommene Form wissenschaftlicher Darstellung erzeugt.

Daß feinsinnige Kenner den Anteil, den die geistigen Richtungen und Bewegungen der Zeit Platons an der Ausgestaltung seiner Dialoge haben, auf das Äußerste beschränken konnten, bedeutet den größten Triumph und die höchste Anerkennung platonischer Kunst. Es erinnert in einer Zeit, die der Gefahr ausgesetzt ist, über der Theologie mit ihrer in die Massen dringenden Propaganda die Bibel, über der Zersplitterung der homerischen Fragen Homer, über der Philologie Platon zu verlieren, an die alte Wahrheit, daß das echte Kunstwerk, weil es von Erdenresten befreit ist, auch ohne zeitgeschichtlichen Kommentar und wissenschaftlichen Beirat genossen werden kann.

Aber dringt bis in der Schönheit Sphäre,
Und im Staube bleibt die Schwere
Mit dem Stoff, den sie beherrscht, zurück.

Digitized by Google

Nicht der Masse qualvoll abgerungen,
Schlank und leicht, wie aus dem Nichts entsprungen
Steht das Bild vor dem entzückten Blick.
Alle Zweifel, alle Kämpfe schweigen
In des Sieges hoher Sicherheit;
Ausgestoßen hat es jeden Zeugen
Menschlicher Bedürftigkeit.

Digitized by Google

Der Königlichen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin zu ihrer ersten Säkularfeier.

Der Universität Berlin bringen wir zu ihrer Säkularfeier unsere Wünsche für das Glück ihrer Zukunft und preisen das Glück ihrer Vergangenheit.

Nie ist eine Universität unter größeren und glücklicheren Auspizien gegründet worden. Noch ein halbes Jahrhundert zuvor waren die deutschen Universitäten verkümmert und nur schlechte Träger der Aufgabe, die nach der Meinung der Zeit allein ihnen zufallen sollte, für den Unterricht und die Verbreitung der Wissenschaften zu sorgen. Zwar hat, in dem plötzlichen Aufblühen der nationalen Kultur, eine Reihe von Universitäten sich selber das höhere Ziel gesteckt und mächtige Schritte zu ihm hinauf getan. Aber der Gründer der Universität Berlin, der selber im Besitz der großen Gedanken des neuen Jahrhunderts war, hat zuerst einer Universität die Aufgabe ausdrücklich gestellt, Mehrerin der Wissenschaft zu sein und durch die Macht ihrer Forschung die Gewähr für den Wert ihrer Lehre zu geben. Eine Phalanx von Männern, deren Namen heute in der Geschichte der Wissenschaften so gewaltig stehen wie damals in ihrer Gegenwart, ergriff die Aufgabe als persönliche wie als öffentliche Pflicht. Denn Ihre Universität wurde gegründet als ein Hort wiederzuerringender Kraft, ein Quell neuzuerweckenden Lebens für den im Staube liegenden preußischen Staat; welch hohe Bestimmung lag in dieser hochgemuten, aus der Tiefe der deutschen Geistesbewegung hervorgegangenen Erwartung beschlossen, daß mit dem Erstarken der Wissenschaft Nation und Staat erstarken müssen. Ihre Universität hat diesem Glück ihrer Gründung mit der Kraft ihrer Tätigkeit entsprochen; ein Jahrhundert des Lebens liegt hinter ihr es zu beweisen, eine Gegenwart von unvergleichlichem Reichtum des

Digitized by Google

Wirkens verbürgt, daß sie weiterhin den Schwesteranstalten voranschreiten wird.

Wir dürfen als eine dem Lehramt ferne, nur der wissenschaftlichen Arbeit dienende Körperschaft der nunmehr größten deutschen Lehranstalt bezeugen, daß jeder Tag ihrer Lehrtätigkeit eine Förderung der Wissenschaft bedeutet hat. Das neue Jahrhundert liegt vor ihren Blicken voll Verheißung und Gefahr. Auch ferner wird das deutsche Leben, je inniger es mit der reinen, durch äußere Zwecke ungetrübten Wissenschaft verbunden bleibt, je reiner die für den öffentlichen Dienst bestimmte Jugend ihre Bildung von der Wissenschaft empfängt, um so froher der Verheißung, um so sicherer der Gefahr begegnen. Möge in diesem ihrem Ursprungszeichen die Universität Berlin ihren Siegeszug durch die Zeiten fortsetzen.

Göttingen, im September 1910.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Digitized by Google

Bericht über die Wolfskehl-Stiftung.

Auf Einladung der Kommission der Wolfskehl-Stiftung hielt Herr Professor H. A. Lorentz aus Leiden im Oktober d. J. einen Zyklus von Vorträgen über das Relativitätsprinzip und die Strahlungstheorie vor einer zahlreichen Zuhörerschaft, unter der sich auch auswärtige Mathematiker und Physiker befanden. Das Honorar für diese Vorträge wurde aus den Zinsen der Wolfskehl-Stiftung bestritten.

Hilbert.

Digitized by Google

Glückwunschschreiben an Rochus v. Liliencron zum 8. Dezember 1910.

Eurer Excellenz

als ihrem hochgeschätzten Ehrenmitgliede bringt zu dem heutigen Tage, wo Sie von der Warte eines hohen Greisenalters auf ein an Arbeit und Erfolgen reiches Leben zurückblicken, auch die Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ihre herzlichen und ehrerbietigen Glückwünsche dar.

Freudig und dankbar erinnern wir uns, daß es Ihnen noch im letzten Jahre beschieden gewesen ist, den Abschluß des großen Unternehmens der Allgemeinen Deutschen Biographie zu erleben, die Sie mit nie erlahmender Energie und mit einer Freudigkeit, die auch die Säumigen und Zögernden immer wieder fortriß, durch alle Fährlichkeiten bis dicht ans Ziel herangeführt haben: diejenigen, unter uns, die lange Jahre zu Ihrem Stabe gehören durften, wissen es am besten, wie unendlich viel das nationale Werk Ihrer persönlichen Werbekraft und Ihrer eigensten Anteilnahme verdankt.

Und wie hier so haben Sie auch anderwärts noch bis in die jüngste Zeit Ihre tiefgründige Sachkunde und Ihr unvergleichliches Feldherrntalent an Aufgaben bewährt, die der Sammlung unseres heimischen Besitzes und der Veredlung unserer Volkskultur galten: der evangelische Kirchengesang und der deutsche Volksgesang sind von Ihnen zugleich historisch erfaßt und in ihrem lebensfähigen Bestande gesichtet und gesichert worden.

Die reife und überall von gleichmäßiger Wärme durchdrungene Arbeit Ihres Alters aber hat ihre Wurzeln in den streng philologischen Studien, durch die Sie vor zwei Menschenaltern und mehr den Beifall der größten Meister Ihrer Wissenschaft erwarben: zwischen jenen und der heutigen Gelehrtengeneration sind Sie durch lange Jahre ein geistesstarker und herzensfrischer Vermittler gewesen. Den Zusammenhang zwischen Kunstdichtung und Volksgesang, die musikalische und die allgemeine Bildung des

Digitized by Google

Mittelalters und der Folgezeit, die handschriftliche Filiation des Nibelungenliedes und die komplizierte Schichtung landschaftlicher Chronistik — das alles hatten Sie in gründlichen Einzelstudien erforscht, als Sie an die große Sammlung der historischen Volkslieder der Deutschen herantraten, zu der es nur eine Nachlese, aber schwerlich je eine Ueberwindung geben wird; die von unseren skandinavischen Vettern jetzt zu reicher Blüte entwickelte runische Epigraphik weiß Ihre aufhellenden Forschungen aus weit auseinanderliegenden Dezennien zu rühmen, und so ist Ihr Name den Philologen, Historikern und Musikforschern der germanischen Welt nicht nur ehrwürdig, sondern durch andauernden wissenschaftlichen Verkehr lebendig vertraut geblieben bis in die Tage Ihres hohen Greisenalters.

Möge der Tag, an dem Sie das neunte Jahrzehnt Ihres reichen, dem Vaterland und der Wissenschaft geweihten Lebens abschließen, Ihrem klaren Geist und Ihrem heitern Gemüt es aufs neue zum Bewußtsein bringen, durch wie enge Bande Sie, auch fern von Universität und Akademie, allezeit mit der Wissenschaft, ihren Hütern und ihren Jüngern, vereint gewesen sind.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Digitized by Google

Digitized by Google

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1910.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1910.

Digitized by Google

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)
in Göttingen.

Digitized by Google

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1910.

	Seite
O. Berg, Ueber den Thomson-Effekt in Kupfer, Eisen und Platin	141
F. Bernstein, Ueber den letzten Fermatschen Lehrsatz	482
F. Bernstein, Ueber den zweiten Fall des letzten Fermatschen Lehrsatzes	507
L. Bieberbach, Ueber die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen euclidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich	75
H. Bohr und E. Landau, Ueber das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\chi(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$	303
M. Born, Zur Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips	161
R. Courant, Zur Begründung des Dirichletschen Prinzipes	154
B. Dürken, Ueber das Verhalten des Nervensystems nach Exstirpation der Extremitätenanlagen beim Frosch. Vorläufige Mitteilung einiger Ergebnisse	133
R. Fuchs, Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit vier wesentlich singulären Stellen	146
Ph. Furtwängler, Untersuchungen über die Kreisteilungskörper und den letzten Fermatschen Satz. Erste Mitteilung	554
R. Gans, Zur Elektronentheorie des Ferromagnetismus	197
L. Geiger, Herdbestimmung bei Erdbeben aus den Ankunftszeiten	331
O. Haupt, Bemerkung über Oszillationstheoreme	85
E. Hecke, Ueber nicht-reguläre Primzahlen und den Fermatschen Satz	420
E. Hecke, Ueber die Konstruktion der Klassenkörper reeller quadratischer Körper mit Hilfe von automorphen Funktionen	619

Digitized by Google

Seite

D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Sechste Mitteilung 355
D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen 595
P. Koebe, Ueber die Hilbertsche Uniformisierungsmethode . 59
P. Koebe, Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. (Fortsetzung und Schluß) 180
R. König, Konforme Abbildung der Oberfläche einer räumlichen Ecke 130
K. Lerp, Ueber die Fehlerquellen der Kaufmann-Simonschen Methode zur Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons. (Vorläufige Mitteilung) 476
L. Lichtenstein, Ueber die Integration eines bestimmten Integrals in Bezug auf einen Parameter 468
E. Madelung, Molekulare Eigenschwingungen 43
O. Mügge, Ueber Deformationen an den Krystallen des Kaliumchlorat $KClO_3$ nach Untersuchungen von Paul Fischer 350
F. Riesz, Ueber quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen 190
W. Schnee, Ueber die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen 1
O. Toeplitz, Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen 489
W. Voigt, Konzentrationsänderungen der Lösung eines magnetisierbaren Salzes in einem inhomogenen Magnetfeld. Nach Beobachtungen von C. Statescu. 545
K. W. Wagner, Die Fortpflanzung von Strömen in Kabeln mit unvollkommenem Dielektrikum 425
O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.
XXIII. 87
XXIV. 517
K. Wegener, Die Aerologischen Ergebnisse im Jahre 1909 am Samoa-Observatorium der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 101
H. Weyl, Ueber gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen. (2. Note) 442
J. K. Whittemore, Konvexe Kurven 274
J. Yoshikawa, Dreiparametrige Randwertaufgaben . . . 563
J. Yoshikawa, Ein zweiparametriges Oszillationstheorem . 586

Digitized by Google

Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen.

Von

Walter Schnee, Berlin.

Vorgelegt in der Sitzung am 15. Januar 1910 von D. Hilbert.

Einleitung.

Bekanntlich lassen sich analog zu den Potenzreihen und Fourierschen Reihen auch die Koeffizienten einer Dirichletschen Reihe mit Hilfe eines bestimmten Integrals eindeutig aus der Funktion bestimmen, und zwar gilt diese Darstellung allgemein für jede Dirichletsche Reihe der Form

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo die Exponenten λ_n eine beliebige Folge monoton ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$) ins Unendliche wachsender Größen bezeichnen. Ist nämlich die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ konvergent, so konvergiert für jede von Null verschiedene Zahl $a > \alpha$ und jedes reelle w das Integral

$$\lim_{T=\infty} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)\, e^{ws}}{s}\, ds \tag{1}$$

und hat bei positivem $a > \alpha$ einen von a unabhängigen Wert $2\pi i\, \varphi(w)$, der folgendermaßen definiert ist:

$$\varphi(w) = \sum_{n=1}^{r}{}' a_n = \begin{cases} 0 \text{ für } w < \lambda_1, \\ \sum_{n=1}^{r-1} a_n + \frac{1}{2} a_r \text{ für } w = \lambda_r\ (r = 1, 2, \ldots), \\ \sum_{n=1}^{r} a_n \text{ für } \lambda_r < w < \lambda_{r+1}. \end{cases} \tag{2}$$

Digitized by Google

Im Falle $\alpha < 0$ hat bei negativem $a > \alpha$ das Integral (1) den Wert $2\pi i\,(\varphi(w) - S)$, wo $S = f(0)$ die Summe der alsdann konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Diese Formel, die schon von Kronecker und Herrn Cahen mit unzureichendem Beweise aufgestellt war, ist erst jüngst unter gewissen Einschränkungen von Herrn Hadamard[1]) und mit voller Allgemeinheit von Herrn Perron[2]) bewiesen worden. Übrigens ergeben sich aus dem Integral (1) mittelst der Gleichung (2) nicht nur eindeutig die Koeffizienten a_n der betreffenden Reihe $f(s)$, sondern auch die Exponenten λ_n sind eindeutig durch dasselbe bestimmt; sie sind nämlich die Unstetigkeitsstellen des Integrales (1), in welchen dasselbe, wie aus (2) hervorgeht, den arithmetischen Mittelwert zwischen links und rechts annimmt.

Herr Cahen hielt diesen Satz fälschlicherweise auch für umkehrbar, d. h. er behauptete, daß aus der Giltigkeit der obigen Formel für jedes $a > \alpha$, wo $\alpha \geqq 0$ ist, umgekehrt die Konvergenz der Reihe $f(s)$ in der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ folgt. Seinen dahin zielenden Beweis hat Herr Perron an der zitierten Stelle durch ein passend konstruiertes Beispiel widerlegt. Allgemeiner kann man sogar mittels des Cauchyschen Integralsatzes leicht nachweisen, daß die aufgestellte Formel für jedes von Null verschiedene $a > \alpha_0$ gilt, wenn nur α_0 die untere Grenze aller derjenigen reellen Zahlen α bedeutet, welche die Eigenschaft haben, daß die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\Re(s) \geqq \alpha$ regulär ist und daß nach Annahme irgend einer beliebig großen Zahl $\eta > \alpha$ für alle σ des Intervalles $\alpha \leqq \sigma \leqq \eta$ gleichmäßig

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(\sigma \pm ti)}{t} = 0$$

ist; α_0 ist also die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, daß sich

---

1) Sur les séries de Dirichlet, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 25, 1908, S. 326—330. Rectification à la Note „Sur les séries de Dirichlet", l. c., S. 395—396.

2) Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 134, 1908, S. 95—143 (vergl. S. 114—131). In etwas kürzerer Behandlung sind die Perronschen Entwickelungen von Herrn Landau im 6. Buche seines soeben erschienenen Werkes „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" (Teubner, 1909; vergl. Bd. II, S. 820—837) dargestellt worden. Dieses Werk, in welchem zum ersten Mal die modernen Ergebnisse der Theorie der Dirichletschen Reihen im Zusammenhang dargestellt werden, soll im folgenden einfach mit „Handbuch" zitiert werden.

Digitized by Google

nach Annahme zweier beliebig kleinen Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ und einer beliebig großen Zahl $\eta > \alpha_0 + \varepsilon$ immer eine (von ε, η und δ abhängige) positive Zahl T_0 angeben läßt, sodaß für jedes $s = \sigma + ti$, das den Bedingungen $\alpha_0 + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \eta$, $|t| \geqq T_0$ genügt, die Beziehung

$$|f(s)| < \delta |t|$$

stattfindet. Die so definierte Zahl α_0, welche natürlich $= -\infty$ sein darf, kann niemals größer als die Konvergenzabszisse $\bar{\alpha}$ der Reihe sein[1]); es kann aber sehr wohl $\alpha_0 < \bar{\alpha}$ sein, wie das von Herrn Perron an der zitierten Stelle auf eine briefliche Mitteilung von Herrn Landau hin angeführte Beispiel

$$f(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^s}$$

zeigt, in welchem $\lambda_n = \log n$, $\bar{\alpha} = 1$ und nach der Theorie der Zetafunktion (Folgerung aus der Riemannschen Funktionalgleichung) $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ ist[2]). Hier gilt also die Koeffizientendarstellungsformel für jedes $\alpha > \frac{1}{2}$, während die betreffende Reihe erst für $\sigma > 1$ konvergiert.

Die folgenden Untersuchungen, die von diesen Resultaten nichts voraussetzen, beschäftigen sich zwar nicht mit dem allgemeinsten Typus der Dirichletschen Reihen; aber es soll über das monotone Wachsen der Exponenten λ_n nur die folgende Einschränkung gemacht werden, durch die ausgeschlossen wird, daß die λ_n allzu dicht auf einander folgen. Versteht man nach Annahme irgend einer positiven Zahl $\delta > 0$ unter $\nu_n = \nu_n(\delta)$ die größte ganze Zahl $\geqq 0$, für welche noch

$$\lambda_{n+\nu_n} - \lambda_n \leqq e^{-e^{\lambda_n \delta}} \tag{3}$$

ist, so soll, wie klein auch δ gewählt sein möge, für alle n von einer gewissen Stelle an

$$\nu_n < e^{\lambda_n \delta} \tag{4}$$

sein[3]). Diese Voraussetzung ist insbesondere dann erfüllt, wenn für alle n von einer gewissen Stelle an $\nu_n = 0$ ist, d. h. wenn

1) Vergl. „Handbuch", Bd. II, S. 821—825 (vergl. besonders Satz 44).

2) Vergl. „Handbuch", Bd. II, S. 833—835.

3) Zur Orientierung bemerke ich, daß bei festem n die rechte Seite von (3) und damit eventuell die Zahl ν_n um so größer wird, je kleiner δ gewählt wird; bei festem δ konvergiert die rechte Seite von (3) mit wachsendem n sehr stark gegen Null.

Digitized by Google

bei beliebig kleinem δ von einer gewissen Stelle an schon

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > e^{-e^{\lambda_n \delta}} \tag{5}$$

ist; dies ist in dem für die analytische Zahlentheorie so wichtigen Spezialfall $\lambda_n = \log n$, d. h. in dem Spezialfall der Reihen

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

reichlich erfüllt, da ja dann gewiß bei beliebig kleinem $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle an

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2n} = e^{-\log(2n)} > e^{-n^{\delta}} = e^{-e^{\lambda_n \delta}}$$

ist. Ich bemerke noch, daß bei den bisher behandelten tieferen Problemen der Theorie der Dirichletschen Reihen sogar noch weitergehendere Einschränkungen als (4) gemacht werden mußten. So wird bei den Mittelwertsproblemen vorausgesetzt, daß von einer gewissen Stelle an $\nu_n = 0$, d. h. daß bei beliebig kleinem $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle an die Beziehung (5) erfüllt ist[1]), und bei dem sogenannten Konvergenzproblem müssen sogar noch bedeutend weitergehendere Einschränkungen gemacht werden[2]), die aber in dem Spezialfall $\lambda_n = \log n$ auch erfüllt sind.

Ich werde nun zeigen, daß unter der Voraussetzung (4) die in (1) und (2) enthaltene Koeffizientendarstellungsformel, welche nach Division durch e^{wa} die Gestalt

$$\lim_{T=\infty} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)\, e^{w(s-a)}}{s}\, ds = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{\varphi(w)}{e^{wa}} & \text{bei positivem } a, \\ 2\pi i \dfrac{\varphi(w) - S}{e^{wa}} & \text{bei negativem } a \end{cases} \tag{6}$$

annimmt, nicht nur für jedes reelle w erfüllt ist, sondern daß die Gleichung (6) sogar gleichmäßig für alle Zahlen $w = \lambda_\nu$ und auch, daß sie gleichmäßig für alle Zahlen $w = \frac{\lambda_\nu + \lambda_{\nu+1}}{2}$ gilt. Allgemein werde ich nachweisen: Ist irgend eine Folge positiver Größen ε_n gegeben, für welche

$$\lambda_1 + \varepsilon_1 < \lambda_2 - \varepsilon_2 < \lambda_2 + \varepsilon_2 < \lambda_3 - \varepsilon_3 < \cdots,$$

1) Vergl. „Handbuch", Bd. II, S. 782.
2) Vergl. „Handbuch", Bd. II, S. 839.

Digitized by Google

d. h. allgemein

$$\lambda_n + \varepsilon_n < \lambda_{n+1} - \varepsilon_{n+1} \qquad (n \geqq 1)$$

ist[1]), so gilt (6), wenn nur $a > \alpha$ und $a \neq 0$ ist, gleichmäßig für alle reellen w, für welche entweder $w = \lambda_n (n = 1, 2, \ldots)$ oder $w < \lambda_1 - \varepsilon_1$ oder $\lambda_n + \varepsilon_n \leqq w \leqq \lambda_{n+1} - \varepsilon_{n+1} (n = 1, 2, \ldots)$ ist. Ausgeschlossen ist also nur ein gewisses Intervall zu beiden Seiten eines jeden Exponenten λ_n. Um dies nachzuweisen, muß ich ganz andere Wege einschlagen, als diejenigen, welche von den Herren Hadamard und Perron zum bloßen Nachweis von (6) bei konstantem w betreten worden sind.

Wesentlich ist, daß dieser Satz nun in der Tat umkehrbar ist. Ich werde nämlich nachweisen: Besitzt die Reihe $f(s)$ ein Konvergenzgebiet, ist ferner die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ regulär, wo α eine beliebige reelle Zahl bedeutet, und existiert zu jedem von Null verschiedenen $a > \alpha$ eine Folge von Zahlen w_ν, wo für jedes $\nu \geqq 1$ die Beziehung $\lambda_\nu < w_\nu < \lambda_{\nu+1}$ gilt und bei positivem a außerdem $w_\nu - \lambda_\nu \leqq 1$, bei eventuellem negativen a dagegen $\lambda_{\nu+1} - w_\nu \leqq 1$ ist[2]), derart, daß die Gleichung (6) gleichmäßig für alle diese $w = w_\nu$ gilt, so ist die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ konvergent. Bedeutet weiter α' die untere Grenze aller derjenigen reellen Zahlen α, welche erstens die Eigenschaft haben, daß die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ regulär ist und welche zweitens der Bedingung genügen, daß zu jedem von Null verschiedenen $a > \alpha$ ein System von unendlich vielen Zahlen w_ν mit den obigen Eigenschaften existiert, so ist α' die genaue Konvergenzabszisse der Reihe $f(s)$; natürlich kann $\alpha' = -\infty$ sein. Damit ist auf ein schon lange in der Literatur vorhandenes Problem eine Antwort gegeben, nämlich auf das Problem, die genaue Konvergenzabszisse einer Dirichletschen Reihe aus den analytischen Eigenschaften der durch sie dargestellten Funktion zu bestimmen.

Am Schlusse meiner Arbeit stelle ich endlich unter Benutzung der bisher erzielten Resultate ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen dafür auf, daß eine in einer gewissen Halbebene reguläre Funktion in eine in dieser Halbebene konvergente Dirichletsche Reihe entwickelt werden kann. Dasselbe Problem hat schon Herr Hadamard an der zitierten Stelle behandelt, jedoch mit einer wesentlichen Einschränkung. Er unter-

1) Die ε_n dürfen also mit wachsendem n beliebig stark gegen Null konvergieren.

2) Anstatt 1 könnte auch jede andere positive Konstante auftreten.

Digitized by Google

sucht nämlich nur, ob eine gegebene analytische Funktion in eine solche Dirichletsche Reihe entwickelt werden kann, deren Exponentensystem λ_n der Bedingung genügt, daß

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} \tag{7}$$

endlich ist; diese Bedingung hat z. B. zur Folge, daß die betreffende Dirichletsche Reihe, wenn sie überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt, auch ein Gebiet absoluter Konvergenz besitzen muß. Anstatt dessen mache ich nur die Voraussetzung (4) und bin auch in der Lage, die von Herrn Hadamard mit *V.* bezeichnete Bedingung zu entbehren, infolge deren Herr Perron im Schlußwort der zitierten Arbeit sagen konnte, daß das Hadamardsche Resultat fast auf eine Tautologie hinauslaufe.

§ 1. Hilfssätze.

Ich beginne mit der Mitteilung einiger für die Theorie der Dirichletschen Reihen grundlegenden Tatsachen, die unter Anwendung des Hilfsmittels der partiellen Summation leicht beweisbar sind.

Es sei die Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo die λ_n eine beliebige Folge monoton ins Unendliche wachsender Zahlen bedeuten, für $\Re(s) > \alpha$, wo $\alpha \geqq 0$ ist, konvergent, und es werde für ganzzahliges $m \geqq 1$

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$$

gesetzt; dann ist nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$ stets eine ganze Zahl $m_0 = m_0(\delta)$ angebbar, so daß für alle $m \geqq m_0$

$$|S_m| < e^{\lambda_m(\alpha+\delta)} \tag{8}$$

ist. Ist umgekehrt die Gleichung (8) bei jedem $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle an erfüllt und ist $\alpha \geqq 0$, so folgt daraus, daß die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ konvergiert. Wenn dagegen die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$, wo $\alpha < 0$ ist, konvergiert und wenn

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

gesetzt wird, so ist bei jedem $\delta > 0$ für alle m von einer gewissen

Digitized by Google

Stelle an

$$|S_m - S| < e^{\lambda_{m+1}(\alpha+\delta)}, \tag{9}$$

und umgekehrt folgt hieraus die Konvergenz der Reihe für $\Re(s) > \alpha$ [1]).

Die Beziehung (8) und ihre Umkehrung wird z. B. in Herrn Landaus „Handbuch", Bd. II, S. 732—734 bewiesen; der Nachweis der Formel (9) nebst Umkehrung, die ich in der Folge brauche, soll indessen näher ausgeführt werden, da, wie mir scheint, der Fall $\alpha < 0$ bisher noch nicht in der Literatur ausdrücklich behandelt worden ist [2]).

Es sei also die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ konvergent, wo $\alpha < 0$ ist. Setzt man dann nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n e^{-\lambda_n\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)},$$

so liegen nach Voraussetzung alle Partialsummen $s_m (m = 1, 2, \ldots)$ absolut genommen unterhalb einer endlichen Schranke C. Nun ergibt die partielle Summation für ganzzahliges $p \geqq m+1$

$$\sum_{n=m+1}^{p} a_n = \sum_{n=m+1}^{p} a_n e^{-\lambda_n\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)} \cdot e^{-\lambda_n\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)} = \sum_{n=m+1}^{p} (s_n - s_{n-1}) e^{-\lambda_n\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$= \sum_{n=m+1}^{p} s_n \left(e^{-\lambda_n\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)} - e^{-\lambda_{n+1}\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}\right) - s_m e^{-\lambda_{m+1}\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)} + s_p e^{-\lambda_{p+1}\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}.$$

---

1) Man kann diese Resultate auch in folgender Form aussprechen: Die genaue Konvergenzabszisse der Reihe $f(s)$ wird, falls sie positiv ist, durch die Formel

$$\bar{\alpha} = \limsup_{m=\infty} \frac{\log |S_m|}{\lambda_m}, \tag{I}$$

falls sie negativ ist, durch die Formel

$$\bar{\alpha} = \limsup_{m=\infty} \frac{\log |S_m - S|}{\lambda_{m+1}} \tag{II}$$

bestimmt. Ist $\bar{\alpha} = 0$, so gilt, wenn die Reihe $f(s)$ im Punkte $s = 0$ divergiert, die Formel (I); konvergiert diese Reihe gegen einen von Null verschiedenen Wert, so gelten beide Formeln (I) und (II); ist endlich $\bar{\alpha} = 0$, $S = 0$, so gilt (II), während dann die rechte Seite von (I) negativ sein kann.

2) Herr Pincherle gibt die Formel (II) in seinem Vortrag „Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti" (Atti del IV congresso internazionale dei matematici, Vol. II, Sezione I—Analisi, Rom 1909, S. 44—48) ohne Beweis an; doch steht hier irrtümlicherweise im Nenner λ_m statt λ_{m+1}.

Digitized by Google

Ist δ so klein gewählt, daß noch $-\alpha-\frac{\delta}{2}>0$ ist, so folgt hieraus durch Grenzübergang $p=\infty$, da ja gewiß die Reihe $f(s)$ im Punkte $s=0$ konvergiert,

$$S-S_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n=\sum_{n=m+1}^{\infty}s_n\left(e^{-\lambda_n\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}-e^{-\lambda_{n+1}\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}\right)-s_m e^{-\lambda_{m+1}\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)};$$

hieraus aber ergibt sich für hinlänglich großes m

$$|S_m-S|<C\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_n\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}-e^{-\lambda_{n+1}\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}\right)+Ce^{-\lambda_{m+1}\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$=2Ce^{-\lambda_{m+1}\left(-\alpha-\frac{\delta}{2}\right)}<e^{-\lambda_{m+1}(-\alpha-\delta)},$$

womit (9) bewiesen ist.

Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß (9) bei beliebigem $\delta>0$ von einer gewissen Stelle an erfüllt ist, so benutzen wir zunächst für beliebige ganze Zahlen $m+1$ und $p\geqq m+1$ die Formel der partiellen Summation

$$\sum_{n=m+1}^{p}a_n e^{-\lambda_n(\alpha+2\delta)}=\sum_{n=m+1}^{p}(S_n-S_{n-1})e^{-\lambda_n(\alpha+2\delta)}$$

(10)

$$=\sum_{n=m+1}^{p}S_n\left(e^{-\lambda_n(\alpha+2\delta)}-e^{-\lambda_{n+1}(\alpha+2\delta)}\right)-S_m e^{-\lambda_{m+1}(\alpha+2\delta)}+S_p e^{-\lambda_{p+1}(\alpha+2\delta)}.$$

Hieraus folgt für jede beliebige Größe S, also insbesondere für die oben definierte Größe $S=f(0)$

$$\sum_{n=m+1}^{p}a_n e^{-\lambda_n(\alpha+2\delta)}$$

$$=\sum_{n=m+1}^{p}(S_n-S)\left(e^{-\lambda_n(\alpha+2\delta)}-e^{-\lambda_{n+1}(\alpha+2\delta)}\right)-(S_m-S)e^{-\lambda_{m+1}(\alpha+2\delta)}$$

(11)

$$+(S_p-S)e^{-\lambda_{p+1}(\alpha+2\delta)}$$

$$=(\alpha+2\delta)\sum_{n=m+1}^{p}(S_n-S)\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}e^{-z(\alpha+2\delta)}\,dz-(S_m-S)e^{-\lambda_{m+1}(\alpha+2\delta)}$$

$$+(S_p-S)e^{-\lambda_{p+1}(\alpha+2\delta)}.$$

Ist δ so klein gewählt, daß noch $\alpha+\delta<0$ ist, und ist m hinlänglich groß, so ergibt sich weiter nach (9)

Digitized by Google

$$\left| \sum_{n=m+1}^{p} a_n e^{-\lambda_n(\alpha+2\delta)} \right|$$

$$< |\alpha+2\delta| \sum_{n=m+1}^{p} e^{(\alpha+\delta)\lambda_{n+1}} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-z(\alpha+2\delta)}\, dz + e^{-\lambda_{m+1}\delta} + e^{-\lambda_{p+1}\delta}$$

$$< |\alpha+2\delta| \sum_{n=m+1}^{p} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-z\delta}\, dz + 2e^{-\lambda_{m+1}\delta}$$

$$= \frac{1}{\delta} |\alpha+2\delta| e^{-\lambda_{m+1}\delta} + 2e^{-\lambda_{m+1}\delta}.$$

Die rechte Seite konvergiert, wenn m unendlich groß wird, gegen Null. Damit ist die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $s = \alpha + 2\delta$ und also, da δ beliebig klein sein durfte, in der ganzen Halbebene $\Re(s) > \alpha$ bewiesen.

Es sei nun wieder die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$, wo $\alpha \geqq 0$ ist, konvergent. Dann ergibt sich, wenn in (10) statt $\alpha + 2\delta$ ein beliebiger Wert s der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ eingesetzt wird, aus (10)

$$\sum_{n=m+1}^{p} a_n e^{-\lambda_n s} = s \sum_{n=m+1}^{p} S_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zs}\, dz - S_m e^{-\lambda_{m+1} s} + S_p e^{-\lambda_{p+1} s}.$$

Nun konvergiert für $p = \infty$ die linke Seite; ferner hat das letzte Glied der rechten Seite für $p = \infty$ den Grenzwert Null, da infolge der Beziehung (8), in der etwa $\delta = \frac{\Re(s)-\alpha}{2} = \frac{\sigma-\alpha}{2}$ zu setzen ist,

$$|S_p e^{-\lambda_{p+1} s}| < e^{\lambda_{p+1}\left(\alpha + \frac{\sigma-\alpha}{2}\right)} e^{-\lambda_{p+1}\sigma} = e^{-\lambda_{p+1}\frac{\sigma-\alpha}{2}}$$

ist. Es ergibt sich daher

$$(12) \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = s \sum_{n=m+1}^{\infty} S_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zs}\, dz - S_m e^{-\lambda_{m+1} s}.$$

Konvergiert dagegen die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$, wo $\alpha < 0$ ist, so setzen wir in (11) anstatt $\alpha + 2\delta$ einen beliebigen Wert s der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ ein und erhalten, da auch in diesem Falle das letzte Glied der rechten Seite infolge (9) für $p = \infty$ den Grenzwert Null hat, aus (11) durch den Grenzübergang $p = \infty$

$$(13) \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = s \sum_{n=m+1}^{\infty} (S_n - S) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zs}\, dz - (S_m - S) e^{-\lambda_{m+1} s}.$$

Endlich gebrauche ich noch den folgenden Satz:

Hilfssatz 1. Es sei $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, und es sei die

Digitized by Google

Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$, wo α eine beliebige reelle Zahl bedeutet, konvergent. Dann läßt sich nach Annahme zweier beliebig kleiner Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ eine Konstante $R = R(\varepsilon, \delta)$ so bestimmen, daß für alle der Halbebene $\Re(s) \geqq \alpha + \varepsilon$ angehörende Werte s, deren absoluter Betrag $\geqq R$ ist, die Beziehung

$$|f(s)| < \delta |s|$$

gilt[1]).

Beweis: Setzen wir im Falle $\alpha \geqq 0$ die Summe $\overline{S_n} = S_n$, im Falle $\alpha < 0$ die Summe $\overline{S_n} = S_n - S$, so ergibt sich aus (12) bezw. (13) für jedes s der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ durch Hinzufügung der Anfangsglieder

$$f(s) = \sum_{n=1}^{m} a_n e^{-\lambda_n s} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} \overline{S_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+}} e^{-zs}\, dz - \overline{S_m} e^{-\lambda_{m+1} s}.$$

Es sei im Falle $\alpha < 0$ die Zahl ε so klein gewählt, daß noch $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < 0$ ist. Dann folgt bei hinlänglich großem m für alle s, deren reeller Teil $\sigma \geqq \alpha + \varepsilon$ ist, infolge $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ und infolge der Beziehungen (8) bezw. (9), in denen $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ zu setzen ist,

$$|f(s)| < \sum_{n=1}^{m} |a_n|\, e^{-\lambda_n \sigma} + |s| \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{z\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)} \cdot e^{-z\sigma}\, dz + e^{\lambda_{m+1}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)} e^{-\lambda_{m+1}\sigma}$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{m} |a_n|\, e^{-\lambda_n(\alpha+\varepsilon)} + |s| \int_{\lambda_{m+1}}^{\infty} e^{-z\frac{\varepsilon}{2}}\, dz + e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} |a_n|\, e^{-\lambda_n(\alpha+\varepsilon)} + \left(\frac{2}{\varepsilon}|s| + 1\right) e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Wir wählen nun m so groß, daß die obigen Abschätzungen gelten und daß

$$e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\delta}{2\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right)}$$

1) Dieser Satz nebst Beweis ist nicht als neu zu betrachten; etwas Ähnliches sagt z. B. Satz 45 des 6. Buches von Herrn Landaus „Handbuch“ aus (vergl. Bd. II, S. 821—825).

Digitized by Google

ist, sodann R so groß, daß erstens $R \geqq 1$ und zweitens

$$R > \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{m} |a_n| e^{-\lambda_n(\alpha+\varepsilon)}$$

ist. Dann ergibt sich für alle s, deren reeller Teil $\geqq \alpha+\varepsilon$ und deren absoluter Betrag $\geqq R$ ist,

$$|f(s)| < \frac{\delta}{2} R + \frac{\delta}{2} |s| \leqq \delta |s|,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Ich stelle nun noch eine Reihe von Hilfssätzen auf, die sich nicht unmittelbar auf die Theorie der Dirichletschen Reihen beziehen und sich durch die klassischen Hilfsmittel der Integralrechnung und Funktionentheorie beweisen lassen.

Hilfssatz 2. Es seien a, v, T reelle Zahlen, $a \neq 0$, $T > 0$. Dann ist im Falle $v \neq 0$

$$\left| \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds - 2\pi i E_v \right| \leqq 2 \frac{e^{va}}{|v| T}$$

und im Falle $v = 0$

$$\left| \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{ds}{s} - 2\pi i E_0 \right| \leqq \frac{2|a|}{T}.$$

Hierbei hat im Falle $a > 0$ die Zahl E_v für $v > 0$ den Wert 1, für $v < 0$ den Wert 0, und es ist $E_0 = \frac{1}{2}$; dagegen hat im Falle $a < 0$ die Zahl E_v für $v > 0$ den Wert 0, für $v < 0$ den Wert -1, und es ist $E_0 = -\frac{1}{2}$.

Der Beweis dieses Satzes, der für die tiefere Theorie der Dirichletschen Reihen und für ihre Anwendungen in der analytischen Zahlentheorie von großer Wichtigkeit ist, ist für den Fall $a > 0$ z. B. in Herrn Landaus „Handbuch“ (Bd. I, S. 342 bis 346) genau durchgeführt; man hat nur die dort auftretenden Konstanten $U = T$ und $y = e^v$ zu setzen. Der Fall $a < 0$ kann aber ganz analog behandelt werden, so daß wir uns hier die Übertragung der dort angewendeten Schlüsse auf diesen Fall ersparen können.

Aus dem bewiesenen Satze folgt, daß für $a \neq 0$ und beliebiges v

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds = E_v$$

Digitized by Google

ist; dagegen folgt nicht aus ihm, daß diese Beziehung gleichmäßig gilt für alle v eines bestimmten Intervalls, wenn dieses Intervall im Innern oder als Begrenzungspunkt den Punkt $v = 0$ enthält. Man kann indessen wenigstens folgenden Satz aufstellen:

Hilfssatz 3. Es sei a eine beliebige reelle Zahl $\neq 0$, und es sei $T > 0$. Dann ist für jedes beliebige reelle v

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds - E_v \right| < e^{va}.$$

Hier tritt auf der rechten Seite nicht mehr eine Diskontinuität im Punkte $v = 0$ auf.

Beweis: Es sei zunächst $v \neq 0$. Dann beschreiben wir um den Nullpunkt den Kreis mit dem Radius $R = \sqrt{a^2 + T^2}$, auf welchem die beiden Punkte $a + Ti$ und $a - Ti$ liegen, und wenden den Cauchyschen Satz auf den Integranden $\frac{e^{vs}}{s}$ und auf das Gebiet an, das einerseits von der vertikalen Geraden $a - Ti$ bis $a + Ti$, andererseits von einem der beiden durch diese beiden Punkte begrenzten Bögen des oben konstruierten Kreises gebildet wird, und zwar soll als krumme Begrenzungslinie im Falle $v > 0$ der links von der Geraden gelegene Bogen, im Falle $v < 0$ dagegen der rechts von der Geraden gelegene Bogen gewählt werden. Dann hat der Integrand in den Fällen $v > 0$, $a > 0$ und $v < 0$, $a < 0$ im Integrationsgebiet den Pol erster Ordnung $s = 0$ mit dem Residuum 1 und ist sonst überall regulär, während er in den Fällen $v > 0$, $a < 0$ und $v < 0$, $a > 0$ im Integrationsgebiet durchgängig regulär ist. Man erhält daher in allen Fällen

$$\int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds + \int_B \frac{e^{vs}}{s} ds = 2\pi i E_v,$$

wo E_v wie in Hilfssatz 2 im Falle $a > 0$, $v > 0$ den Wert 1, im Falle $a < 0$, $v < 0$ den Wert -1 und in den beiden Fällen $a > 0$, $v < 0$ sowie $a < 0$, $v > 0$ den Wert 0 hat und wo der Integrationsbogen B von $a + Ti$ bis $a - Ti$ durchlaufen wird. Nun ist, wenn der reelle Teil von s mit σ bezeichnet wird, in beiden Fällen $v > 0$ und $v < 0$ für alle Punkte s des Bogens B

$$|e^{vs}| = e^{v\sigma} \leqq e^{va}$$

und infolgedessen, da der Bogen B gewiß eine Länge $< 2\pi R$ hat,

Digitized by Google

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{e^{vs}}{s}ds - E_v\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_B \frac{e^{vs}}{s}ds\right| < \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi R\cdot\frac{e^{va}}{R} = e^{va},$$

womit die Behauptung für alle reellen $v \neq 0$ schon bewiesen ist.

Im Falle $v = 0$ wenden wir den Cauchyschen Satz nach einander auf beide Teile der durch die Sehne von $a-Ti$ bis $a+Ti$ durchschnittenen Kreisfläche an und erhalten genau wie oben

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{ds}{s} \mp 1\right| < 1, \quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{ds}{s}\right| < 1,$$

wo sich in der ersten Formel das Minuszeichen auf den Fall $a > 0$, das Pluszeichen auf den Fall $a < 0$ bezieht. Nun ist aber, wenn x eine beliebige reelle oder komplexe Zahl bezeichnet,

$$|x \mp \tfrac{1}{2}| = |\tfrac{1}{2}(x \mp 1) + \tfrac{1}{2}x| \leqq \tfrac{1}{2}|x \mp 1| + \tfrac{1}{2}|x|,$$

so daß sich aus den beiden erhaltenen Formeln ergibt:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{ds}{s} \mp \tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1,$$

wo sich das Minuszeichen auf den Fall $a > 0$, das Pluszeichen auf den Fall $a < 0$ bezieht. Dies ist aber genau die Behauptung für den Wert $v = 0$, so daß nunmehr der Hilfssatz 3 im vollen Umfang bewiesen ist.

Hilfssatz 4. Es sei $-1 \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqq 1$ und entweder $a > 0$ oder $a < 0$, ferner $T > 0$. Dann ist

$$\left|\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{vs}\,ds\,dv\right| < 12\,e^{|a|}.$$

Beweis: Wir setzen $v_0 = \frac{1}{T}$ und nehmen vorläufig an, daß $T > 1$ sowie $\vartheta_1 < -v_0$ und $\vartheta_2 > v_0$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{vs}\,ds\,dv &= \int_{a-Ti}^{a+Ti}\int_{\vartheta_1}^{-v_0} e^{vs}\,dv\,ds \\ &+ \int_{-v_0}^{+v_0}\int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{vs}\,ds\,dv + \int_{a-Ti}^{a+Ti}\int_{+v_0}^{\vartheta_2} e^{vs}\,dv\,ds.\end{aligned} \tag{14}$$

Nun ist nach Hilfssatz 2, mag $a > 0$ oder $a < 0$ sein,

Digitized by Google

$$\left| \int_{a-Ti}^{a+Ti} \int_{\vartheta_1}^{-v_0} e^{vs}\, dv\, ds \right| = \left| \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{-v_0 s}}{s}\, ds - \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{\vartheta_1 s}}{s}\, ds \right|$$

$$\leqq 2\frac{e^{-v_0 a}}{v_0 T} + 2\frac{e^{\vartheta_1 a}}{|\vartheta_1| T} < 2\left(e^{-v_0 a} + e^{\vartheta_1 a}\right) < 4e^{|a|};$$

genau derselben Abschätzung genügt auch das dritte Integral auf der rechten Seite von (14). Ferner ist

$$\left| \int_{-v_0}^{+v_0} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{vs}\, ds\, dv \right| \leqq 2v_0 \cdot 2T \cdot e^{v_0|a|} = 4e^{v_0|a|} < 4e^{|a|}.$$

Durch Addition der für alle drei Doppelintegrale auf der rechten Seite von (14) erhaltenen Abschätzungen ergibt sich die Behauptung. Ist nicht zugleich $T > 1$, $\vartheta_1 < -v_0$, $\vartheta_2 > v_0$, so erhält man auf demselben Wege sogar schärfere Abschätzungsformeln als die behauptete, da man dann das gegebene Doppelintegral anstatt in drei Doppelintegrale nur in zwei oder eines zu zerlegen braucht.

Hilfssatz 5. Es seien δ, δ_1 und δ_2 beliebig kleine positive Zahlen, und zwar sei $\delta_1 < \delta$, $\delta_2 < \delta - \delta_1$. Dann läßt sich eine positive Konstante A so bestimmen, daß für jedes $\lambda \geqq A$ und jedes beliebige reelle w

$$\int_{\lambda}^{\infty'} \frac{e^{-z\delta}}{|w-z|}\, dz < e^{-\lambda\delta_2}$$

ist, wobei der Strich am Integral bedeutet, daß im Falle $w > \lambda - 1$ zu beiden Seiten der Zahl w ein Intervall von der Länge $\varepsilon_w = e^{-e^{w\delta_1}}$ von der Integration auszuschließen ist, so weit es dem Integrationswege $\lambda \ldots \infty$ angehört[1]).

Zur Orientierung sei bemerkt, daß die Größe ε_w bei festem w um so größer wird, je kleiner δ_1 ist; da $\delta_1 < \delta$ sein soll, so müssen also die beiden um w eventuell auszuschließenden Intervalle um so größer sein, je kleiner δ gewählt ist, was auch von vornherein einleuchtet. Dagegen nähert sich bei festem δ_1 die Größe ε_w für $w = \infty$ sehr stark der Grenze Null.

Beweis: Es sei vorläufig $w > \lambda + 1$. Dann ist wegen $\varepsilon_w < 1$

1) Ein ähnlicher Hilfssatz steht z. B. in Herrn Landaus „Handbuch" Bd. II, S. 782—783.

Digitized by Google

$$\int_\lambda^{\infty\prime} \frac{e^{-z\delta}}{|w-z|}\,dz = \int_\lambda^{w-\varepsilon_w} \frac{e^{-z\delta}}{w-z}\,dz + \int_{w+\varepsilon_w}^{\infty} \frac{e^{-z\delta}}{z-w}\,dz$$

$$= \int_{\varepsilon_w}^{w-\lambda} \frac{e^{-(w-v)\delta}}{v}\,dv + \int_{\varepsilon_w}^{\infty} \frac{e^{-(w+v)\delta}}{v}\,dv$$

$$= e^{-w\delta}\left\{\int_{\varepsilon_w}^{1} \frac{e^{v\delta}}{v}\,dv + \int_1^{w-\lambda} \frac{e^{v\delta}}{v}\,dv + \int_{\varepsilon_w}^{1} \frac{e^{-v\delta}}{v}\,dv + \int_1^{\infty} \frac{e^{-v\delta}}{v}\,dv\right\}$$

$$< e^{-w\delta}\left\{\left(e^{\delta}+1\right)\int_{\varepsilon_w}^{1} \frac{dv}{v} + \int_1^{w-\lambda} e^{v\delta}\,dv + \int_1^{\infty} e^{-v\delta}\,dv\right\}$$

$$= e^{-w\delta}\left\{\left(e^{\delta}+1\right)(-\log\varepsilon_w) + \frac{1}{\delta}e^{(w-\lambda)\delta} - \frac{1}{\delta}e^{\delta} + \frac{1}{\delta}e^{-\delta}\right\}$$

$$< \left(e^{\delta}+1\right)e^{-w(\delta-\delta_1)} + \frac{1}{\delta}e^{-\lambda\delta} < \left(e^{\delta}+1\right)e^{-\lambda(\delta-\delta_1)} + \frac{1}{\delta}e^{-\lambda\delta}.$$

Dieser Ausdruck liegt nun aber wegen $\delta_2 < \delta - \delta_1$ für alle $\lambda \geqq \Lambda'$ unterhalb $e^{-\lambda\delta_2}$, wenn nur die Konstante Λ', die zwar von δ, δ_1 und δ_2, nicht aber von w abhängt, hinreichend groß gewählt ist. Damit ist die Behauptung im Falle $w > \lambda + 1$ bewiesen.

Ist $w \leqq \lambda + 1$, aber immerhin noch $w \geqq \lambda - 1$, so tritt von den vier Integralen in der dritten Zeile der obigen Rechnung das zweite nicht mehr auf und das vierte bleibt ungeändert, während das erste im Falle $w < \lambda + 1$, $w > \lambda + \varepsilon_w$ teilweise, im Falle $w \leqq \lambda + \varepsilon_w$ ganz verschwindet und das dritte im Falle $w < \lambda - \varepsilon_w$, $w > \lambda - 1$ teilweise, im Falle $w = \lambda - 1$ ganz verschwindet. In allen diesen Fällen erhalten wir analog zur vierten und den folgenden Zeilen der obigen Rechnung für alle $\lambda \geqq \Lambda''$, wenn nur Λ'' hinreichend groß gewählt ist:

$$\int_\lambda^{\infty\prime} \frac{e^{-z\delta}}{|w-z|}\,dz < e^{-w\delta}\left\{\left(e^{\delta}+1\right)\int_{\varepsilon_w}^{1} \frac{dv}{v} + \int_1^{\infty} e^{-v\delta}\,dv\right\}$$

$$= \left(e^{\delta}+1\right)e^{-w(\delta-\delta_1)} + \frac{1}{\delta}e^{-(w+1)\delta}$$

$$\leqq \left(e^{\delta}+1\right)e^{-(\lambda-1)(\delta-\delta_1)} + \frac{1}{\delta}e^{-\lambda\delta} < e^{-\lambda\delta_2}.$$

Ist endlich $w < \lambda - 1$, so wird, da dann gewiß gar kein Teilintervall abzutrennen ist, für alle $\Lambda \geqq \Lambda'''$ wegen

$$|w-z| = z - w \geqq \lambda - w > 1$$

Digitized by Google

$$\int_{\lambda}^{\infty'} \frac{e^{-z\delta}}{|w-z|}\,dz < \int_{\lambda}^{\infty} e^{-z\delta}\,dz = \frac{1}{\delta} e^{-\lambda\delta} < e^{-\lambda\delta_2}.$$

Die Ungleichung der Behauptung gilt daher bei beliebigem reellen w für alle $\lambda \geqq \Lambda$, wenn nur Λ die größte der drei Konstanten Λ', Λ'', Λ''' bedeutet, d. h. $\Lambda = \Lambda''$ ist. Da die so definierte Konstante Λ von w unabhängig ist, so ist damit die Behauptung bewiesen.

§ 2. Der Hauptsatz.

Satz I. Es seien die λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine beliebige Folge monoton ins Unendliche wachsender Größen, für welche die Voraussetzung (4) erfüllt ist, und es sei die Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

für $\Re(s) > \alpha$ konvergent, wo für die reelle Zahl α auch der Wert $\alpha = -\infty$ zugelassen wird. Es seien ferner die $\varepsilon_n (n = 1, 2, \ldots)$ beliebig kleine positive Zahlen, für welche jedenfalls $\lambda_n + \varepsilon_n < \lambda_{n+1} - \varepsilon_{n+1}$ ist, und es bezeichne W den Bereich aller derjenigen reellen Zahlen w, für welche entweder $w \leqq \lambda_1 - \varepsilon_1$ oder $\lambda_n + \varepsilon_n \leqq w \leqq \lambda_{n+1} - \varepsilon_{n+1}$ oder $w = \lambda_n$ ist. Dann ist, wenn nur $a > \alpha$ und $a \neq 0$ ist, für jedes beliebige reelle w

$$(6)\quad \lim_{T=\infty} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)\, e^{w(s-a)}}{s}\,ds = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{\varphi(w)}{e^{wa}} & \text{bei positivem } a, \\ 2\pi i \dfrac{\varphi(w) - S}{e^{wa}} & \text{bei negativem } a, \end{cases}$$

wo $\varphi(w)$ und S die in der Einleitung angegebene Bedeutung haben, und diese Beziehung besteht sogar gleichmäßig für alle w des Bereiches W.

Beweis: A) Es sei zunächst die Reihe $f(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = a$ sogar absolut konvergent. Dann konvergiert sie für alle s dieser Geraden gleichmäßig, darf daher über jedes endliche Stück dieser Geraden gliedweise integriert werden, auch nach Multiplikation mit $\dfrac{e^{w(s-a)}}{s}$. Dies ergibt:

Digitized by Google

$$(15)\qquad \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)e^{w(s-a)}}{s}\,ds = \frac{1}{e^{wa}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\,ds.$$

Wir zerlegen nun die rechte Seite in zwei durch den Index $n = m$ getrennte Teile, wo m eine beliebig große positive ganze Zahl bezeichnet, die im folgenden noch näher bestimmt werden wird; ferner sei W_m diejenige Punktmenge, welche alle reellen Zahlen $w \leqq \lambda_1 - \varepsilon_1$ sowie alle reellen Zahlen $w \geqq \lambda_m + \varepsilon_m$, dann aber auch die m Punkte $w = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nebst den Intervallen $\lambda_n + \varepsilon_n \leqq w \leqq \lambda_{n+1} - \varepsilon_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots, m-1)$ enthält. Ausgeschlossen ist also nur ein gewisses Intervall zu beiden Seiten eines jeden der Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, und es ist klar, daß für jedes m der Punktbereich W_m den gegebenen Bereich W in sich enthält. Endlich werde für jedes $w \geqq \lambda_1$ die positive ganze Zahl r durch die Gleichung $\lambda_r \leqq w < \lambda_{r+1}$ definiert. Dann ergibt sich, wenn für jedes $n = 1, 2, \ldots, m$ der Hilfssatz 2 auf den Exponenten $w - \lambda_n = v$ angewendet wird, bei beliebigem reellen w, wenn nur $a \neq 0$ ist,

$$(16)\qquad \begin{aligned} &\left| \sum_{n=1}^{m} a_n \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{m}{}' E_{w-\lambda_n} \cdot a_n \right| \\ &\leqq \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{m}{}' |a_n| \frac{e^{(w-\lambda_n)a}}{|w-\lambda_n|} + E \cdot \frac{2|a|}{T} \cdot |a_r|, \end{aligned}$$

wo im Falle $w = \lambda_r (r = 1, 2, \ldots, m)$ die Zahl $E = 1$, sonst $= 0$ zu setzen ist und wo der Strich an der Summe rechts bedeutet, daß im Falle $w = \lambda_r (r = 1, 2, \ldots, m)$ das Glied mit dem Index $n = r$ von der Summation auszuschließen ist. Hieraus folgt nach Division durch e^{wa}:

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\left| \frac{1}{e^{wa}} \left\{ \sum_{n=1}^{m} a_n \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{m} E_{w-\lambda_n} \cdot a_n \right\} \right| \\ &\leqq \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{m}{}' \frac{|a_n| e^{-\lambda_n a}}{|w-\lambda_n|} + E \cdot \frac{2|a|}{T} \cdot |a_r| e^{-\lambda_r a}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen nun mit η_m die kleinste der Zahlen $\frac{1}{|a|}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$. Dann ist jede Zahl w der Punktmenge W_m von jedem von w verschiedenen Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ mindestens um η_m entfernt, so daß also für jedes der auf der rechten Seite von (17) auftretenden Glieder

Digitized by Google

$$\frac{1}{|w-\lambda_n|} \leqq \frac{1}{\eta_m}$$

ist, wenn nur w dem Punktbereich W_m angehört. Da ferner nach Annahme auch

$$|a| \leqq \frac{1}{\eta_m}$$

ist, so folgt aus (17) für jedes w der Punktmenge W_m

$$\left|\frac{1}{e^{wa}}\left\{\sum_{n=1}^{m} a_n \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{m} E_{w-\lambda_n}\cdot a_n\right\}\right| \leqq \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{\eta_m}\sum_{n=1}^{m}|a_n|\,e^{-\lambda_n a} = \frac{C_m}{T}, \tag{18}$$

wo C_m eine zwar von m, aber nicht von w oder T abhängige Konstante bedeutet, die übrigens im allgemeinen wegen des Faktors η_m im Nenner mit wachsendem m beliebig groß wird.

Andererseits erhält man nach dem Hilfssatz 3 für jedes beliebige reelle w:

$$\left|\frac{1}{e^{wa}}\left\{\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\,ds - 2\pi i \sum_{n=m+1}^{\infty} E_{w-\lambda_n}\cdot a_n\right\}\right| = \left|\frac{2\pi i}{e^{wa}}\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\,ds - E_{w-\lambda_n}\right)\right| \tag{19}$$

$$< \frac{2\pi}{e^{wa}}\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n|\,e^{(w-\lambda_n)a} = 2\pi\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n|e^{-\lambda_n a}.$$

Durch Addition von (18) und (19) ergibt sich infolge (15)

$$\left|\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{f(s)\,e^{w(s-a)}}{s}\,ds - \frac{2\pi i}{e^{wa}}\sum_{n=1}^{\infty}E_{w-\lambda_n}\cdot a_n\right| < \frac{C_m}{T} + 2\pi\sum_{n=m+1}^{\infty}|a_n|e^{-\lambda_n a}. \tag{20}$$

Hierin ist zunächst, wenn im Falle $a > 0$ die Funktion $\bar{\varphi}(w) = \varphi(w)$, im Falle $a < 0$ dagegen

$$\bar{\varphi}(w) = \varphi(w) - S = \varphi(w) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

gesetzt wird, infolge der Bedeutung der Faktoren $E_{w-\lambda_n}$ für jedes beliebige reelle w

Digitized by Google

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{w-\lambda_n} \cdot a_n = \overline{\varphi}(w),$$

mag nun $a > 0$ oder $a < 0$ sein. Andererseits läßt sich, wenn eine beliebig kleine Zahl $\delta > 0$ gegeben ist, infolge der absoluten Konvergenz der Reihe $f(a)$ die Zahl m so groß annehmen, daß in (20) das zweite Glied der rechten Seite $< \frac{\delta}{2}$ wird. Setzen wir hiernach $T_0 = \frac{2C_m}{\delta}$, so ist T_0 eine nur von δ, nicht aber von w abhängige Konstante, und es ergibt sich für alle $T \geqq T_0$ aus (20)

$$\left| \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)\, e^{w(s-a)}}{s}\, ds - 2\pi i \frac{\overline{\varphi}(w)}{e^{wa}} \right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

wenn nur w dem Punktbereich W_m angehört. Da nun aber der gegebene Bereich W in dem zugleich mit m von δ abhängigen Bereich W_m enthalten ist, wie klein auch δ, d. h. wie groß auch m sein möge, so gilt diese Beziehung a fortiori für alle w des Bereiches W, womit der behauptete Satz I im Falle absoluter Konvergenz der Reihe $f(a)$ schon bewiesen ist. Ich bemerke ausdrücklich, daß in diesem Falle die Voraussetzung (4) über das Exponentensystem λ_n entbehrlich ist: Die Formel (6) gilt gleichmäßig für alle w des Bereiches W, wenn nur $a \neq 0$ ist und die Reihe $f(a)$ absolut konvergiert.

B). Aber es kommt gerade darauf an, den Satz I auch dann zu beweisen, wenn die Reihe $f(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = a$, wo $a \neq 0$ ist, und darüber links hinaus nur bedingt konvergiert. Hierbei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit, wenn a positiv ist, auch $\alpha \geqq 0$ angenommen werden.

Wird wie in § 1

$$S_n = \sum_{\varrho=1}^{n} a_\varrho$$

gesetzt und ist im Falle $a > 0$, $\alpha \geqq 0$ die Summe $\overline{S}_n = S_n$, im Falle $a < 0$, $\alpha < 0$ dagegen $\overline{S}_n = S_n - S = S_n - f(0)$, so folgt aus (12) bezw. (13) durch Hinzufügung der Anfangsglieder für jedes s der Geraden $\Re(s) = a > \alpha$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{m} a_n e^{-\lambda_n s} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} \overline{S}_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-zs}\, dz - \overline{S}_m e^{-\lambda_{m+1} s}.$$

Da die unendliche Summe auf der rechten Seite für jedes s mit dem reellen Teil $a > \alpha$ absolut konvergiert und daher, wie un-

Digitized by Google

mittelbar einleuchtet, auf der ganzen Geraden $\Re(s) = a$ gleichmäßig konvergiert, so kann sie auf jedem endlichen Stück dieser Geraden gliedweise integriert werden, auch nach Multiplikation mit $\frac{e^{ws}}{s}$. Das ergibt für jedes $T > 0$

$$(21)\quad \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)\,e^{ws}}{s}\,ds = \sum_{n=1}^{m} a_n \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\,ds$$
$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \bar{S}_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\,ds\,dz - \bar{S}_m \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_{m+1})s}}{s}\,ds.$$

Wir behandeln nach einander alle drei Glieder rechts.

1. Für das erste Glied rechts, welches auch in der rechten Seite von (15) enthalten ist, benutzen wir die unter A) gefundene für alle w des Bereiches W geltende Abschätzung

$$(18)\quad \left| \frac{1}{e^{wa}} \left\{ \sum_{n=1}^{m} a_n \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{m} E_{w-\lambda_n} \cdot a_n \right\} \right| \leqq \frac{C_m}{T},$$

wo auch hier C_m eine zwar von m, aber nicht von w oder T abhängige Konstante bedeutet, die mit m zugleich unendlich groß wird.

Zur Abschätzung des dritten Gliedes auf der rechten Seite von (21) wählen wir die Zahl m so groß, daß, wenn $\varepsilon = a - \alpha$ gesetzt wird, für alle $n \geqq m$ im Falle $\alpha \geqq 0$

$$(22)\quad |\bar{S}_n| = |S_n| < \frac{1}{6\pi} e^{\lambda_n\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

im Falle $\alpha < 0$ dagegen

$$(23)\quad |\bar{S}_n| = |S_n - S| < \frac{1}{6\pi} e^{\lambda_{n+1}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

ist; dies ist wegen $\varepsilon > 0$ nach (8) bezw. (9) möglich. Dann ist speziell, mag $\alpha \geqq 0$ oder $\alpha < 0$ sein,

$$|\bar{S}_m| < \frac{1}{6\pi} e^{\lambda_{m+1}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Also ist nach dem Hilfssatz 3 für beliebiges reelles w

Digitized by Google

$$\left|\frac{1}{e^{wa}}\left\{-\overline{S}_m\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{e^{(w-\lambda_{m+1})s}}{s}ds+2\pi i\,E_{w-\lambda_{m+1}}\cdot\overline{S}_m\right\}\right|$$

$$(24)\quad =\left|-2\pi i\,\frac{\overline{S}_m}{e^{wa}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{e^{(w-\lambda_{m+1})s}}{s}ds-E_{w-\lambda_{m+1}}\right)\right|$$

$$<\frac{1}{3}\,\frac{e^{\lambda_{m+1}\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{e^{wa}}\,e^{(w-\lambda_{m+1})a}=\frac{1}{3}\,e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Nun hat der bei der Addition der linken Seiten von (18) und (24) auftretende Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{m}E_{w-\lambda_n}\cdot a_n-E_{w-\lambda_{m+1}}\cdot\overline{S}_m$$

in beiden Fällen $a>0$ oder $a<0$ den Wert $\overline{\varphi}(w)$, wenn $w<\lambda_{m+1}$ ist, den Wert $\frac{1}{2}\overline{S}_m$, wenn $w=\lambda_{m+1}$ ist, und den Wert 0, wenn $w>\lambda_{m+1}$ ist. Denn bei positivem a ist er

$$=\begin{cases}\sum_{n=1}^{m}E_{w-\lambda_n}\cdot a_n=\sum_{n=1}^{r}{}'a_n=\varphi(w) & \text{für } w<\lambda_{m+1},\\ \sum_{n=1}^{m}a_n-\frac{1}{2}S_m=\frac{1}{2}S_m & \text{für } w=\lambda_{m+1},\\ \sum_{n=1}^{m}a_n-S_m=0 & \text{für } w>\lambda_{m+1};\end{cases}$$

bei negativem a dagegen ist er

$$=\begin{cases}\sum_{n=1}^{m}(1+E_{w-\lambda_n})a_n-S=\sum_{n=1}^{r}{}'a_n-S=\varphi(w)-S & \text{für } w<\lambda_{m+1},\\ 0+\frac{1}{2}(S_m-S)=\frac{1}{2}(S_m-S) & \text{für } w=\lambda_{m+1},\\ 0-0=0 & \text{für } w>\lambda_{m+1}.\end{cases}$$

Also ist in beiden Fällen $a>0$ oder $a<0$

$$\sum_{n=1}^{m}E_{w-\lambda_n}\cdot a_n-E_{w-\lambda_{m+1}}\cdot\overline{S}_m-\overline{\varphi}(w)$$

$$=\begin{cases}0 & \text{für } w<\lambda_{m+1},\\ \frac{1}{2}\overline{S}_m-\overline{\varphi}(w)=-\frac{1}{2}\overline{S}_{m+1} & \text{für } w=\lambda_{m+1},\\ -\overline{\varphi}(w) & \text{für } w>\lambda_{m+1};\end{cases}$$

der Wert für $w=\lambda_{m+1}$ ist der arithmetische Mittelwert zwischen links und rechts.

Zur Abschätzung der Ausdrücke auf der rechten Seite der

Digitized by Google

soeben erhaltenen Formel benutzen wir wiederum (22) bezw. (23) sowie die hieraus in beiden Fällen $\alpha \gtreqless 0$, $a > 0$ oder $\alpha < 0$, $a = \alpha + \varepsilon < 0$ für alle $r \geqq m+1$ sich ergebende Formel

$$\tfrac{1}{2}|a_r| = \tfrac{1}{2}|\bar{S}_r - \bar{S}_{r-1}| \leqq \tfrac{1}{2}|\bar{S}_r| + \tfrac{1}{2}|\bar{S}_{r-1}| < \frac{1}{6\pi} e^{\lambda_r\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Dann wird zunächst für $w = \lambda_{m+1}$ in beiden Fällen $\alpha > 0$ oder $\alpha < 0$

$$\left|\frac{2\pi i}{e^{w a}} \cdot \tfrac{1}{2}\bar{S}_{m+1}\right| < \tfrac{1}{6} e^{\lambda_{m+1}\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)} e^{-w(\alpha+\varepsilon)} = \tfrac{1}{6} e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Ferner wird, wenn $a > 0$ ist und w einen beliebigen Wert $> \lambda_{m+1}$ hat oder wenn $a < 0$ und $w = \lambda_r (r \geqq m+2)$ ist:

$$\left|\frac{2\pi i}{e^{w a}} \bar{\varphi}(w)\right| < \tfrac{2}{3} e^{\lambda_r\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)} e^{-w(\alpha+\varepsilon)} \leqq \tfrac{2}{3} e^{-\lambda_r\frac{\varepsilon}{2}} \leqq \tfrac{2}{3} e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}};$$

ist dagegen $a < 0$, $w > \lambda_{m+1}$ und $\lambda_r < w < \lambda_{r+1}$, so folgt

$$\left|\frac{2\pi i}{e^{w a}} \bar{\varphi}(w)\right| < \tfrac{1}{3} e^{\lambda_{r+1}\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)} e^{-w(\alpha+\varepsilon)} < \tfrac{1}{3} e^{-\lambda_{r+1}\frac{\varepsilon}{2}} < \tfrac{1}{3} e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Fassen wir alles zusammmen, so ergibt sich, wenn nur m hinlänglich groß ist, in beiden Fällen $a > 0$ oder $a < 0$ für jeden beliebigen reellen Wert von w

$$(25)\quad \left|\frac{2\pi i}{e^{w a}}\left\{\sum_{n=1}^{m} E_{w-\lambda_n} \cdot a_n - E_{w-\lambda_{m+1}} \cdot \bar{S}_m - \bar{\varphi}(w)\right\}\right| < \tfrac{2}{3} e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Durch Addition von (18), (24) und (25) folgt:

$$(26)\quad \left|\frac{1}{e^{w a}}\left\{\sum_{n=1}^{m} a_n \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_n)s}}{s}\, ds - \bar{S}_m \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_{m+1})s}}{s}\, ds - 2\pi i\, \bar{\varphi}(w)\right\}\right| < \frac{C_m}{T} + e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}};$$

diese Beziehung gilt bei hinreichend großem m für jedes $T > 0$ und jedes w des Bereiches W_m.

2. Um endlich das zweite Glied

$$(27)\qquad \sum_{n=m+1}^{\infty} \bar{S}_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds\, dz$$

Digitized by Google

auf der rechten Seite von (21) abzuschätzen, trennen wir zunächst eine gewisse Anzahl von Gliedern ab, die wir besonders behandeln müssen. Es soll nämlich nicht nur zu jeder Zahl $w \geqq \lambda_1$ ein Index r durch die Beziehung $\lambda_r \leqq w < \lambda_{r+1}$ bestimmt werden, sondern es soll noch für hinlänglich großes r die Zahl r_0 als die größte positive ganze Zahl definiert werden, für welche

$$\lambda_{r_0} < \lambda_r - e^{-e^{\lambda_r}\frac{\varepsilon}{8}}$$

ist, und es soll r_1 als die kleinste positive ganze Zahl definiert werden, für welche

$$\lambda_{r_1} > \lambda_{r+1} + e^{-e^{\lambda_{r+1}}\frac{\varepsilon}{8}}$$

ist; es wird dann $r_0 \leqq r-1$, $r_1 \geqq r+2$. Die bei jedem w abzutrennenden Glieder seien nun diejenigen Glieder mit den Indices $n = r_0$, $n = r_0+1, \cdots, n = r_1-1$, für welche außer $n \geqq m+1$ noch $\lambda_n < w+1$ sowie $\lambda_{n+1} > w-1$ ist. Von diesen Gliedern kann höchstens für das erste, welches den Index $n = r_0'$ haben möge, $\lambda_{r_0'} \leqq w-1$ sein; im Falle $\lambda_{r_0'} < w-1$ zerlegen wir es in zwei Teile

$$S_{r_0'} \int_{\lambda_{r_0'}}^{w-1} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds\, dz + S_{r_0'} \int_{w-1}^{\lambda_{r_0'}+1} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s} ds\, dz,$$

von denen hier nur der zweite Teil berücksichtigt wird, während der erste Teil bei der Abschätzung des Restes von (27) in Betracht zu ziehen ist. Ebenso kann höchstens für das letzte der abgetrennten Glieder, welches den Index $n = r_1'$ haben möge, $\lambda_{r_1'+1} \geqq w+1$ sein; ist $\lambda_{r_1'+1} > w+1$, so zerlegen wir es ebenfalls in zwei Teile

$$S_{r_1'} \int_{\lambda_{r_1'}}^{w+1} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds\, dz + S_{r_1'} \int_{w+1}^{\lambda_{r_1'}+1} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds\, dz,$$

von denen hier nur der erste Teil berücksichtigt wird, während der zweite Teil ebenfalls bei der Abschätzung des Restes von (27) in Betracht zu ziehen ist. Sollte zugleich $\lambda_r < w-1$ und $\lambda_{r+1} > w+1$ sein, so ist natürlich nur ein Glied mit dem Index $n = r$ abzuspalten, welches in drei Teile mit den Integralgrenzen $\lambda_r \ldots w-1$, $w-1 \ldots w+1$, $w+1 \ldots \lambda_{r+1}$ zerfällt, von denen hier nur der mittlere berücksichtigt wird.

Digitized by Google

Es kann vorkommen, daß gar kein abzutrennendes Glied vorhanden ist; dies ist wegen der oben für jedes abzutrennende Glied mit dem Index n geforderten Beziehung $w+1 > \lambda_n \geqq \lambda_{n+1}$ immer dann der Fall, wenn $w \leqq \lambda_{n+1}-1$ ist, so daß vorläufig $w > \lambda_{n+1}-1$ angenommen werden darf. Andererseits ist die Anzahl dieser Glieder für den Fall, daß $\lambda_{r+1} \geqq w+1$ ist, höchstens $r-r_0+1$, da dann das letzte in Betracht kommende Glied den Index $n = r$ hat. In jedem Falle ist die Anzahl der ausgesonderten Glieder höchstens r_1-r_0. Nun sind die Definitionen von r_0 und r_1 so gewählt, daß die Gleichung (3) der Einleitung für $n+\nu_n = r$, $n = r_0+1$, $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ sowie für $n+\nu_n = r_1-1$, $n = r+1$, $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ erfüllt ist; also ergibt die Voraussetzung (4) eine obere Abschätzung für $\nu_n = r-r_0-1$, d. h. für $r-r_0$, was im Falle $\lambda_{r+1} \geqq w+1$ ausreicht, sowie eine obere Abschätzung für $\nu_n = r_1-r-2$, d. h. für r_1-r und infolgedessen auch für $(r_1-r)+(r-r_0) = r_1-r_0$, was im Falle $\lambda_{r+1} < w+1$ zu verwerten ist. Wir erhalten, daß die Anzahl der abgetrennten Glieder für jedes reelle w stets $< e^{w\frac{\varepsilon}{4}}$ ist, wenn nur die Zahl m hinlänglich groß gewählt ist.

Es soll nun jedes einzelne der abgetrennten Glieder besonders abgeschätzt werden. Jedes dieser Glieder hat die Form

$$\bar{S}_n \int_{\lambda_n'}^{\lambda_{n+1}'} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-\varepsilon)s}\, ds\, dz = \bar{S}_n \int_{w-\lambda_n'}^{w-\lambda_{n+1}'} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{vs}\, ds\, dv,$$

wo bei jedem vorkommenden n die Zahl λ_n' die größere der beiden Zahlen λ_n und $w-1$ sowie λ_{n+1}' die kleinere der beiden Zahlen λ_{n+1} und $w+1$ bedeutet, wo also $-1 \leqq w-\lambda_{n+1}' < w-\lambda_n' \leqq +1$ ist. Wir wenden nun auf die rechte Seite der obigen Gleichung die Formel (8) bezw. (9) mit $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ und den Hilfssatz 4 an; dann ergibt sich, daß jedes dieser Glieder, dessen Index n gewiß $\geqq m+1$ ist, für hinlänglich großes m absolut genommen im Falle $\alpha \geqq 0$

$$< e^{\lambda_n\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{8}\right)} . 12 e^{\alpha} < 12 e^{(w+1)\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{8}\right)+\alpha} = C_1 e^{w\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{8}\right)}$$

und im Falle $\alpha < 0$, $\alpha+\varepsilon < 0$

$$< e^{\lambda_{n+1}\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{8}\right)} . 12 e^{|\alpha|} < 12 e^{(w-1)\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{8}\right)-\alpha} = C_2 e^{w\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{8}\right)}$$

ist. Folglich ist der durch $e^{w\alpha}$ dividierte ganze Komplex der ab-

Digitized by Google

getrennten Glieder, deren Anzahl wie bewiesen für hinlänglich großes m höchstens $e^{w\frac{\varepsilon}{4}}$ ist, absolut genommen

$$< Ce^{w\left(\alpha+\frac{3\varepsilon}{8}-a\right)} = Ce^{-w\cdot\frac{5\varepsilon}{8}},$$

wo C entweder die Konstante C_1 oder die Konstante C_2 bedeutet. Da ferner dieser Komplex gewiß nur im Falle $w > \lambda_{m+1} - 1$ auftritt, so ist sein durch e^{wa} dividierter absoluter Betrag für hinlänglich großes m

$$< Ce^{-(\lambda_{m+1}-1)\frac{5\varepsilon}{8}} < e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}.$$

3. Eine ganz andere Behandlung erfordert der übrig bleibende Teil der Summe (27). Definiert man für alle $x \geqq \lambda_1$ eine Funktion $\psi(x)$ dadurch, daß für $\lambda_n \leqq x < \lambda_{n+1}$ konstant $\psi(x) = \bar{S}_n$ sein soll, so geht dieser übrig bleibende Teil in die Form über

$$\int_{\lambda_{m+1}}^{\infty'} \psi(x) \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds\, dz, \tag{28}$$

wo der Strich am Integral bedeutet, daß eventuell ein gewisses Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ um den Punkt w herum von der Integration ausgeschlossen ist; dieses entspricht natürlich den oben abgesonderten Gliedern. Hierbei ist gewiß, daß nur im Falle $w > \lambda_{m+1} - 1$ überhaupt ein Teilintervall abzutrennen ist; ist ein solches vorhanden, so ist sicher x_0 die größte der Zahlen λ_{m+1}, λ_{r_0} und $w-1$, x_1 die kleinere der beiden Zahlen λ_{r_1} und $w+1$. In jedem Falle erhält man unter Benutzung der Definitionen von r_0 und r_1, daß in dem Integrale (28) auf dem ganzen Integrationswege die Variable z von der Größe w mindestens um $e^{-e^{w\frac{\varepsilon}{4}}}$ entfernt ist, welches auch die reelle Zahl w sein möge, wenn nur die Zahl m hinreichend groß gewählt ist.

Nun ist

$$\int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds = e^{(w-z)a} \cdot i \int_{-T}^{+T} e^{(w-z)ti}\, dt = \frac{e^{(w-z)a}}{w-z}\left(e^{(w-z)Ti} - e^{-(w-z)Ti}\right),$$

$$\left|\frac{1}{e^{wa}} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds\right| \leqq \frac{2e^{-za}}{|w-z|},$$

Digitized by Google

und es ist bei hinlänglich großem n nach der Formel (8) bezw. (9), in der $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ zu setzen ist, für jedes z des Intervalls $\lambda_n \leqq z < \lambda_{n+1}$

$$|\psi(z)| = |\overline{S}_n| < e^{z\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{8}\right)}.$$

Daher ist für hinlänglich großes m

$$\left| \frac{1}{e^{w\alpha}} \int_{\lambda_{m+1}}^{\infty} \psi(z) \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds\, dz \right| < \int_{\lambda_{m+1}}^{\infty'} e^{z\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{8}\right)} . 2 \frac{e^{-za}}{|w-z|}\, dz$$

$$= 2 \int_{\lambda_{m+1}}^{\infty'} \frac{e^{-z \cdot \frac{7\varepsilon}{8}}}{|w-z|}\, dz.$$

Auf dem ganzen Integrationswege ist wie bewiesen die Variable z von w mindestens um $e^{-e^{\frac{w}{4}}}$ entfernt. Wir dürfen daher auf unser Integral den Hilfssatz 5 mit $\delta = \frac{7\varepsilon}{8}$, $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{4}$, $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \delta - \delta_1$ anwenden und erhalten für jedes reelle w bei hinlänglich großem m

$$\left| \frac{1}{e^{w\alpha}} \int_{\lambda_{m+1}}^{\infty'} (z) \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds\, dz \right| < 2 e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Kombinieren wir dieses Resultat mit dem unter 2. erzielten, so folgt:

$$(29) \quad \left| \frac{1}{e^{w\alpha}} \sum_{n=m+1}^{\infty} \overline{S}_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \int_{a-Ti}^{a+Ti} e^{(w-z)s}\, ds\, dz \right| < 3 e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Mit den Beziehungen (26) und (29) sind alle drei Glieder auf der rechten Seite von (21) abgeschätzt; es ergibt sich, daß bei hinlänglich großem m für jedes w der Punktmenge W_m und jedes $T > 0$ die Beziehung

$$\left| \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)\, e^{w(s-a)}}{s}\, ds - 2\pi i\, \frac{\overline{\varphi}(w)}{e^{w\alpha}} \right| < \frac{C_m}{T} + 4 e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}}$$

gilt. Ist nun eine beliebig kleine Zahl $\delta > 0$ gegeben, so wählen wir m so groß, daß erstens alle bisherigen Rechnungen gelten und

Digitized by Google

zweitens $e^{-\lambda_{m+1}\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\delta}{8}$ wird; ferner setzen wir, nachdem m auf diese Weise festgelegt ist, wie unter A) die Zahl $T_0 = \frac{2C_m}{\delta}$. Dann ist mit m und C_m auch T_0 nur von δ und ε, nicht aber von w abhängig, und es wird für $T \geqq T_0$ und jedes w des Bereiches W_m

$$\left| \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)e^{w(s-a)}}{s} ds - 2\pi i \frac{\bar{\varphi}(w)}{e^{wa}} \right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

also insbesondere für jedes w des Bereiches W. Damit ist aber die Behauptung bewiesen.

Für das folgende ist es vorteilhaft, den bewiesenen Satz I noch in einer etwas anderen Formulierung auszusprechen:

Satz II. Es seien die Voraussetzungen von Satz I erfüllt, und es werde $f_0(s) = f(s)$ sowie für jede positive ganze Zahl ν die Funktion $f_\nu(s) = f(s) - a_\nu e^{-\lambda_\nu s}$ gesetzt. Dann besteht die Beziehung[1])

$$(30)\quad \lim_{T=\infty} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f_\nu(s)e^{w(s-a)}}{s} ds = \begin{cases} 2\pi i \frac{S_{\nu-1}}{e^{wa}} & \text{bei positiv. } a > \alpha, \\ 2\pi i \frac{S_\nu - f(0)}{e^{wa}} & \text{bei negat. } a > \alpha \end{cases}$$

im Falle $\nu = 0$ gleichmäßig für alle $w \leqq \lambda_1 - \varepsilon_1$, im Falle $\nu = 1$ gleichmäßig für alle $w \leqq \lambda_2 - \varepsilon_2$, im Falle $\nu = 2, 3, \ldots$ gleichmäßig für alle w des Intervalls

$$\lambda_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1} \leqq w \leqq \lambda_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu+1},$$

welches gewiß den Punkt $w = \lambda_\nu$ in seinem Innern enthält, und diese Gleichungen bestehen weiter gleichmäßig für alle ganzen Zahlen $\nu \geqq 0$.

Beweis: Daß die Formel (30) im Falle $\nu = 0$ gleichmäßig für alle $w \leqq \lambda_1 - \varepsilon_1$ gilt, folgt schon aus Satz I, da ja dann $f_0'(s) = f(s)$ ist; ebenso folgt schon aus I, daß (30) im Falle $\nu = 1$

---

1) Hierbei ist in den Fällen $\nu = 0$ und $\nu = 1$ natürlich $S_{\nu-1} = 0$ und im Falle $\nu = 0$ natürlich $S_\nu = 0$ zu setzen; allgemein ist wie bisher $S_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} a_n$.

Digitized by Google

gleichmäßig für alle $w \leqq \lambda_2 - \varepsilon_2$ und im Falle $\nu \geqq 2$ gleichmäßig für alle w des Intervalls $\lambda_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1} \leqq w \leqq \lambda_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu+1}$ gilt, da ja die Funktion $f_\nu(s)$ ebenfalls durch eine in der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ konvergente Dirichletsche Reihe definiert ist, welche alle Exponenten der Reihe $f(s)$ außer dem Exponenten λ_ν enthält; der Wert $S_\nu - f(0)$ bei negativem a tritt wegen $S_{\nu-1} - (f(0) - a_\nu) = S_\nu - f(0)$ auf. Zu beweisen ist nur, daß diese Beziehungen sogar gleichmäßig für alle ganzen Zahlen $\nu \geqq 0$ gelten oder auch, daß sie gleichmäßig für alle ganzen Zahlen $\nu \geqq 2$ gelten.

Um das zu erkennen, brauchen wir im Teile B) des Beweises von Satz I nur überall speziell den Koeffizienten $a_\nu = 0$ zu setzen, da ja die Funktion $f(s)$ durch die Funktion $f_\nu(s)$ ersetzt werden muß. Unter dieser Bedingung gilt die Beziehung (21) unverändert. Ferner verschwinden im Falle $2 \leqq \nu \leqq m$ auf beiden Seiten von (16) die Glieder mit dem Index $n = \nu$; es tritt daher z. B. in (16) auf der linken Seite gewiß kein Integral mit dem Exponenten $w - \lambda_n = v = 0$ auf, da wir uns ja auf die Werte w des Intervalls $\lambda_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1} \leqq w \leqq \lambda_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu+1}$ beschränken. Bedeutet weiter η_m die kleinste der Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, so folgt, daß alle in (16) oder (17) auftretenden Differenzen $w - \lambda_n$ absolut $\geqq \eta_m$ sind, und zwar gilt dies für alle w des angegebenen Intervalls, wie groß auch die ganze Zahl $\nu \geqq 2$ sein möge. Wird daher in der Beziehung (18) auf der linken Seite das eventuell dem Index $n = \nu$ entsprechende Glied ausgeschlossen, auf der rechten Seite dagegen nicht, so erhalten wir in der Größe $\frac{C_m}{T}$ eine von ν unabhängige obere Abschätzung für die linke Seite, welche für alle w des Intervalls $\lambda_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1} \leqq w \leqq \lambda_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu+1}$ gilt, wie groß auch die ganze Zahl $\nu \geqq 2$ sein möge.

Ferner erhält man genau wie im Teile 1 des Beweises B)

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \nu}}^{m} E_{w-\lambda_n} \cdot a_n - E_{w-\lambda_{m+1}} \cdot \bar{S}_m' - \bar{\varphi}'(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } w < \lambda_{m+1}, \\ -\frac{1}{2}\bar{S}_{m+1}' & \text{für } w = \lambda_{m+1}, \\ -\bar{\varphi}'(w) & \text{für } w > \lambda_{m+1}; \end{cases}$$

hierbei ist im Falle $a > 0$

$$\bar{S}_n' = \sum_{\substack{\varrho=1 \\ \varrho \neq \nu}}^{n} a_\varrho, \quad \bar{\varphi}'(w) = \sum_{\substack{\varrho=1 \\ \varrho \neq \nu}}^{r}{}' a_\varrho,$$

wo der Strich an der Summe rechts bedeutet, daß im Falle $w = \lambda_r$ das letzte Glied mit dem Index $\varrho = r$ nur $\frac{1}{2}$-mal zu zählen ist, wenn nicht etwa $r = \nu$ ist; ebenso ist im Falle $a < 0$

Digitized by Google

$$\overline{S}_n' = \sum_{\substack{\varrho=1 \\ \varrho \neq \nu}}^{n} a_\varrho - S + a_\nu, \quad \overline{\varphi}'(w) = \sum_{\substack{\varrho=1 \\ \varrho \neq \nu}}^{r}{}' a_\varrho - S + a_\nu,$$

wo wie oben $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(0)$ ist. Also ist speziell für alle w des Intervalls $\lambda_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1} \leqq w \leqq \lambda_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu+1}$ im Falle $a > 0$ die Funktion $\overline{\varphi}'(w) = S_{\nu-1}$, im Falle $a < 0$ dagegen $\overline{\varphi}'(w) = S_\nu - S$. Andererseits erkennt man, daß aus $\overline{S}_n$ die Summe $\overline{S}_n'$ und aus $\overline{\varphi}(w)$ die Summe $\overline{\varphi}'(w)$ hervorgeht, wenn in der Reihe der Koeffizienten $a_\nu = 0$ gesetzt wird. Dadurch aber werden die Abschätzungen in keiner Weise in ihrer Giltigkeit beeinträchtigt, sodaß alle weiteren Schlüsse in Satz I auch hier wörtlich gelten; nur muß natürlich anstatt $\overline{S}_n$ überall $\overline{S}_n'$ geschrieben werden. Es ergibt sich, daß sich nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$ eine zwar von δ abhängige, aber von ν unabhängige Größe T_0 finden läßt, so daß für alle $T \geqq T_0$ die Beziehung

$$\left| \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f_\nu(s) e^{w(s-a)}}{s} ds - 2\pi i \frac{\overline{\varphi}'(w)}{e^{wa}} \right| < \delta$$

gilt, wenn nur w dem Intervall $\lambda_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1} \leqq w \leqq \lambda_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu+1}$ angehört, welches auch die ganze Zahl $\nu \geqq 2$ sein möge. Damit ist aber auch der Satz II bewiesen.

§ 3. Umkehrung und Folgerungen.

Mit dem bewiesenen Satz sind die hauptsächlichsten Schwierigkeiten erledigt; seine Umkehrung wird sich hiernach ziemlich leicht beweisen lassen.

Satz III. Es besitze die Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

in welcher die λ_n eine beliebige Folge monoton ins Unendliche wachsender Größen bedeuten, ein Konvergenzgebiet. Die durch sie dargestellte Funktion $f(s)$ sei für $\Re(s) > \alpha$ regulär, und es existiere zu jedem von Null verschiedenen $a > \alpha$ ein System unendlich vieler Größen w_ν, wo für jede positive ganze Zahl ν die Größe w_ν dem Intervall $\lambda_\nu < w_\nu < \lambda_{\nu+1}$ angehört und wo bei positivem a außerdem $w_\nu - \lambda_\nu \leqq 1$, bei negativem a dagegen $\lambda_{\nu+1} - w_\nu \leqq 1$ ist, derart, daß für alle diese

Digitized by Google

$w = w_\nu$ gleichmäßig die Beziehung

$$\lim_{T=\infty} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)\, e^{w_\nu (s-a)}}{s}\, ds = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{S_\nu}{e^{w_\nu a}} & \text{bei positivem } a, \\ 2\pi i \dfrac{S_\nu - S}{e^{w_\nu a}} & \text{bei negativem } a \end{cases}$$

erfüllt ist; hierbei sei $S_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} a_n$, und es sei im Falle $a < 0$ die Größe S eine von a und ν unabhängige Konstante. Dann ist die Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ konvergent.

Beweis: Es sei ε eine beliebig kleine Zahl > 0 und $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \neq 0$. Dann existiert nach Voraussetzung eine nur von ε abhängige positive Zahl T_0, so daß für alle ν

$$(31) \qquad \left| \int_{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}-T_0 i}^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}+T_0} \frac{f(s)\, e^{w\left(s-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{s}\, ds - 2\pi i \frac{\overline{S}_\nu}{e^{w_\nu\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)}} \right| < 1$$

ist, wo im Falle $a > 0$ die Summe $\overline{S}_\nu = S_\nu$, im Falle $a < 0$ dagegen $\overline{S}_\nu = S_\nu - S$ gesetzt ist. Andererseits ist, wenn $M(T_0)$ das Maximum des absoluten Betrages der Funktion $f(s)$ auf der vertikalen endlichen Geraden von $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} - T_0 i$ bis $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} + T_0 i$ bedeutet, wegen

$$\left| e^{w_\nu\left(s-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right| = |e^{w_\nu t i}| = 1, \quad |s| \geqq \left|\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right|$$

$$(32) \qquad \left| \int_{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}-T_0 i}^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}+T_0 i} \frac{f(s)\, e^{w_\nu\left(s-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{s}\, ds \right| \leqq 2T_0 \cdot \frac{M(T_0)}{\left|\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right|} = C,$$

wo auch C eine nur von ε, nicht aber von ν abhängige Konstante bezeichnet. Durch Addition von (31) und (32) ergibt sich

$$\left| 2\pi i \frac{\overline{S}_\nu}{e^{w_\nu\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)}} \right| < C + 1;$$

also ist für alle ν von einer gewissen Stelle an im Falle $\alpha \geqq 0$

Digitized by Google

$$|\bar{S}_\nu| = |S_\nu| < \frac{C+1}{2\pi} e^{w_\nu\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)} \leqq \frac{C+1}{2\pi} e^{(\lambda_\nu+1)\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)} < e^{\lambda_\nu(\alpha+\varepsilon)}$$

und im Falle $\alpha < 0$, $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < 0$

$$[\bar{S}_\nu| = |S_\nu - S| < \frac{C+1}{2\pi} e^{w_\nu\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)} \leqq \frac{C+1}{2\pi} e^{(\lambda_{\nu+1}-1)\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)} < e^{\lambda_{\nu+1}(\alpha+\varepsilon)}.$$

Hiernach aber ergeben die einleitenden Bemerkungen von § 1, da ja ε beliebig klein sein durfte, die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$, mag $\alpha \geqq 0$ oder $\alpha < 0$ sein. Zugleich folgt, daß im letzteren Falle die Konstante $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(0)$ ist.

Kombiniert man beide Sätze I und III, so ergibt sich folgender Satz, der eine Antwort auf das Problem liefert, die Konvergenzabzisse einer Dirichletschen Reihe aus den analytischen Eigenschaften der durch sie dargestellten Funktion zu bestimmen:

Satz IV. Es besitze die Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

in welcher die λ_n eine beliebige Folge monoton ins Unendliche wachsender Größen bezeichnen, für welche die Voraussetzung (4) erfüllt ist, ein Konvergenzgebiet. Es bedeute α' die untere Grenze[1]) aller derjenigen reellen Zahlen α, welche erstens die Eigenschaft haben, daß die Funktion $f(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ regulär ist und welche zweitens der Bedingung genügen, daß zu jedem von Null verschiedenen $a > \alpha$ ein System unendlich vieler Zahlen w_ν mit den in Satz III verlangten Eigenschaften existiert. Dann ist α' die genaue Konvergenzabszisse der Reihe $f(s)$.

Beweis: Bezeichnen wir vorläufig die genaue Konvergenzabszisse der Reihe $f(s)$ mit $\bar{\alpha}$, so ist $\alpha' \leqq \bar{\alpha}$, da ja gewiß die Zahl $\bar{\alpha}$ die Eigenschaft hat, daß die Funktion $f(s)$ für $\Re(s) > \bar{\alpha}$ regulär ist, und da nach Satz I auch die zweite geforderte Eigenschaft bei jedem von Null verschiedenen $a > \bar{\alpha}$ erfüllt ist, welchen Wert auch die Größen w_ν innerhalb der Intervalle $\lambda_\nu < w_\nu < \lambda_{\nu+1}$ haben

1) Natürlich kann auch $\alpha' = -\infty$ sein.

Digitized by Google

mögen. Andererseits ist $\bar{\alpha} \leqq \alpha'$, da nach dem Satz III, dessen Voraussetzungen auch in IV auftreten, die Reihe $f(s)$ mindestens für $\Re(s) > \alpha'$ konvergiert. Aus den beiden Beziehungen $\alpha' \leqq \bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha} \leqq \alpha'$ folgt aber, daß $\alpha' = \bar{\alpha}$ ist.

Durch die bewiesenen Eigenschaften im Verein mit dem Hilfssatz 1 wird jede in eine Dirichletsche Reihe entwickelbare Funktion vollkommen charakterisiert. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz V. Es sei die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ regulär. Dann bilden folgende vier Annahmen A), B), C) und D) ein System hinreichender und notwendiger Bedingungen dafür, daß die Funktion $f(s)$ sich in eine in der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ konvergente Dirichletsche Reihe mit gegebenem Exponentensystem λ_n, wo $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ ist und die Voraussetzung (4) gilt, entwickeln läßt:

A). Für jedes von Null verschiedene $a > \alpha$ und jedes $w \geqq 0$ besteht die Gleichung

$$(6)\quad \lim_{T=\infty} \int_{a-Ti}^{a+Ti} \frac{f(s)\, e^{w(s-a)}}{s}\, ds = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{\varphi(w)}{e^{wa}} & \text{bei positivem } a, \\ 2\pi i \dfrac{\varphi(w) - S}{e^{wa}} & \text{bei negativem } a, \end{cases}$$

wo $\varphi(w)$ bei festem w von a unabhängig ist und im Falle $a < 0$ die Zahl S eine von a und w unabhängige Konstante bedeutet. Ferner besitzt $\varphi(w)$ als Funktion von w folgende Eigenschaften: Für $0 \leqq w < \lambda_1$ ist $\varphi(w) = 0$, in jedem Intervall $\lambda_\nu < w < \lambda_{\nu+1}$ $(\nu \geqq 1)$ ist $\varphi(w)$ konstant und nimmt an den Sprungstellen $w = \lambda_\nu$ den arithmetischen Mittelwert zwischen links und rechts an.

Folgerung: Bedeutet für jedes ganzzahlige $\nu \geqq 0$ die Zahl w_ν eine beliebige Zahl des Intervalls $\lambda_\nu < w_\nu < \lambda_{\nu+1}$, wo $\lambda_0 = 0$ ist, und wird für jedes ganzzahlige $\nu \geqq 1$

$$f_\nu(s) = f(s) - (\varphi(w_\nu) - \varphi(w_{\nu-1}))\, e^{-\lambda_\nu s}$$

sowie $f_0(s) = f(s)$ gesetzt, so ist bei jedem von Null verschiedenen $a > \alpha$ im Falle $\nu = 0$ für jedes w des Intervalls $0 \leqq w \leqq w_0$, im Falle $\nu \geqq 1$ für jedes w des Intervalls $w_{\nu-1} \leqq w \leqq w_\nu$, welches sicher den Punkt $w = \lambda_\nu$ in seinem Innern enthält:

Digitized by Google

$$(30)\quad \lim_{T=\infty}\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{f_\nu(s)e^{w(s-a)}}{s}\,ds = \begin{cases} 2\pi i\,\dfrac{\varphi(w_{\nu-1})}{e^{w_\nu a}} & \text{bei positivem } a, \\ 2\pi i\,\dfrac{\varphi(w_\nu)-S}{e^{w_\nu a}} & \text{bei negativ. } a; \end{cases}$$

hierbei ist im Falle $\nu = 0$ einfach $\varphi(w_{\nu-1}) = \varphi(0) = 0$.

B). Zu jedem von Null verschiedenen $a > \alpha$ existiert eine Folge positiver Zahlen $w_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, wo $\lambda_\nu < w_\nu < \lambda_{\nu+1}$ und im Falle $a > 0$ außerdem $w_\nu - \lambda_\nu \leqq 1$, im Falle $a < 0$ dagegen $\lambda_{\nu+1} - w_\nu \leqq 1$ ist, derart, daß die Gleichung (6) gleichmäßig für alle diese $w = w_\nu$ erfüllt ist.

C). Es existiert eine feste Konstante $A > \alpha$, die beliebig groß sein darf, mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem von Null verschiedenen $a \geqq A$ gibt es ein System von Zahlen $w_\nu (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, wo stets $\lambda_\nu < w_\nu < \lambda_{\nu+1}$ und $\lambda_0 = 0$ ist, derart, daß die Gleichung (30) bei festem ν im Falle $\nu = 0$ gleichmäßig für alle w des Intervalls $0 \leqq w \leqq w_0$, im Falle $\nu \geqq 1$ gleichmäßig für alle w des Intervalls $w_{\nu-1} \leqq w \leqq w_\nu$ gilt und daß diese Beziehungen weiter gleichmäßig für alle ganzen Zahlen $\nu \geqq 0$ erfüllt sind.

D). Es existiert eine feste Konstante $A > \alpha$, die beliebig groß sein darf, mit der folgenden Eigenschaft: Nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl $\delta > 0$ läßt sich eine Größe $R = R(\delta)$ so angeben, daß für alle s, deren reeller Teil $\geqq A$ und deren absoluter Betrag $\geqq R$ ist, die Beziehung

$$|f(s)| < \delta |s|$$

gilt.

Dem Beweise dieses Satzes seien einige sachliche und historische Bemerkungen vorangestellt. Nach dem Hilfssatz 2 ist für jedes w bei festem $\nu \geqq 1$ und jedem von Null verschiedenen a

$$\lim_{T=\infty}\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{(\varphi(w_\nu)-\varphi(w_{\nu-1}))\,e^{-\lambda_\nu s}}{s} - e^{w(s-a)}\,ds$$

$$= \frac{\varphi(w_\nu)-\varphi(w_{\nu-1})}{e^{w_\nu a}}\lim_{T=\infty}\int_{a-Ti}^{a+Ti}\frac{e^{(w-\lambda_\nu)s}}{s}\,ds$$

$$= 2\pi i\,E_{w-\lambda_\nu}\cdot\frac{\varphi(w_\nu)-\varphi(w_{\nu-1})}{e^{w_\nu a}},$$

wo $E_{w-\lambda_\nu}$ genau die in Hilfssatz 2 angegebene Bedeutung hat.

Digitized by Google

Subtrahiert man diese Gleichung von (6), so ergibt sich infolge der unter A) gemachten Voraussetzungen über die Funktion $\varphi(w)$ genau die Gleichung (30) für beliebiges von Null verschiedenes $a > \alpha$ und jedes w des Intervalls $w_{\nu-1} \leqq w \leqq w_\nu$. Im Falle $\nu = 0$ aber enthält die Gleichung (30) nichts mehr, als die Gleichung (6) für alle w des Intervalls $0 \leqq w \leqq w_0$ aussagt. Hiermit ist die im Zusatze zu A) gemachte Bemerkung, daß die Giltigkeit von (30) eine bloße Folge der Bedingung A) ist, gerechtfertigt.

Auf ähnlichem Wege wie in Satz V hat Herr Hadamard, wie schon in der Einleitung bemerkt, ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer in der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ regulären Funktion in eine in dieser Halbebene konvergente Dirichletsche Reihe aufgestellt. Seine Voraussetzung $\alpha \geqq 0$ ist hier überflüssig. Seine Bedingungen I bezw. II sind mit unserer Bedingung D) gleichartig [1]), verlangen aber wesentlich mehr als diese; notwendig sind sie nur infolge der von Herrn Hadamard gemachten weittragenden Einschränkung (7). Die Bedingung III von Herrn Hadamard ist mit unserer Bedingung A) vollkommen identisch. In IV wird von Herrn Hadamard anstatt B) und C) nur vorausgesetzt, daß die Gleichung (30) bei festem $\nu \geqq 0$, aber jedem $a > \alpha$ gleichmäßig für alle w des Intervalls $0 \leqq w \leqq w_0$ bezw. $w_{\nu-1} \leqq w \leqq w_\nu$ gilt. Dafür wird aber eine weitere, sehr weittragende Bedingung V hinzugefügt, die hier vollkommen entbehrlich ist. Ich bemerke noch, daß die Annahme $0 < \lambda_1$ keine Einschränkung bedeutet und daß auch die Voraussetzung (4) über die λ_n hätte weggelassen werden können, wenn es sich nur darum gehandelt hätte, hinreichende Bedingungen aufzustellen.

Zum Beweise unseres Satzes V übergehend, stellen wir zunächst fest, daß unsere vier Voraussetzungen A), B), C) und D) in der Tat notwendig erfüllt sind, wenn sich $f(s)$ in eine in der Halbebene $\Re(s) > \alpha$ konvergente Dirichletsche Reihe mit dem gegebenen Exponentensystem λ_n entwickeln läßt. Daß dann die Voraussetzung A) gilt, ist zum ersten Mal, wie in der Einleitung bemerkt, von Herrn Perron allgemein bewiesen worden. Die

---

1) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, daß selbst die bei festem a gedachte Beziehung

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(a \pm ti)}{t} = 0$$

mit D) nur für alle a von einer gewissen Stelle an, d. h. für $a \geqq A$ vorausgesetzt wird, nicht aber auch im Streifen $\alpha < a < A$.

Digitized by Google

Voraussetzung B) ist nach Satz I erfüllt, und dieser besagt sogar noch mehr, als in B) verlangt wird. Die Voraussetzung C) endlich ist bei jeder möglichen Wahl von Zwischenpunkten w_ν in Satz II sogar für jedes von Null verschiedene $a > \alpha$, nicht nur für alle a von einer gewissen Stelle A an bewiesen worden. Daß schließlich auch D) gilt, und zwar ebenfalls für alle s mit hinreichend großem absoluten Betrage, deren reeller Teil $\geqq \alpha + \varepsilon$ ist, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, zeigt der Hilfssatz 1; gefordert wird in D) nur, daß die dort aufgestellte Beziehung für alle s mit hinreichend großem absoluten Betrage gilt, deren reeller Teil $\geqq A$ ist, wo A eine passend gewählte Konstante bedeutet.

Unsere Hauptaufgabe besteht natürlich in dem Nachweis, daß diese vier Voraussetzungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind. Dazu setze ich, wenn für $\nu \geqq 0$ die Zahl w_ν eine Zahl des Intervalles $\lambda_\nu < w_\nu < \lambda_{\nu+1}$ bezeichnet und $\lambda_0 = 0$ ist, für jedes $\nu \geqq 1$ den Koeffizienten

$$a_\nu = \varphi(w_\nu) - \varphi(w_{\nu-1})$$

und behaupte, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s} \tag{33}$$

für $\Re(s) > \alpha$ konvergiert und in dieser Halbebene die gegebene Funktion $f(s)$ darstellt.

Nun ist nach der Konstruktion der Koeffizienten a_ν für alle $\nu \geqq 1$

$$\varphi(w_\nu) = S_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} a_n,$$

so daß infolge der Voraussetzung B) zwar nicht der Satz III seinem Wortlaut nach, wohl aber sein Beweis, der hier wörtlich zu wiederholen ist, uns zeigt, daß die Reihe (33) für $\Re(s) > \alpha$ konvergiert; im Falle $\alpha < 0$ ergibt sich zugleich, daß $S = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ist. Zu beweisen ist nur noch, daß die durch diese Reihe dargestellte Funktion, welche wir $F(s)$ nennen wollen, mit unserer Funktion $f(s)$ identisch ist; vorläufig steht nur fest, daß, wenn sich überhaupt die Funktion $f(s)$ in eine Dirichletsche Reihe entwickeln läßt, dies gewiß die Reihe (33) sein muß. Dazu aber brauche ich nur zu zeigen, daß für alle reellen Zahlen a von einer gewissen Stelle an die Gleichung $F(a) = f(a)$ gilt. Wird $a = \alpha + d$ gesetzt, so beweisen wir dies für alle positiven Zahlen d, für welche $\alpha + \frac{d}{2} \geqq A$ ist, und nehmen außerdem der Bequemlich-

Digitized by Google

keit halber an, daß $\alpha + \frac{d}{2} > 0$, daß $d \geqq 8$ ist und daß für alle $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\left| a_\nu e^{-\lambda_\nu\left(\alpha + \frac{d}{2}\right)} \right| < \frac{1}{2\pi}$$

ist, was wegen der Konvergenz der Reihe (33) für $s > \alpha$ und wegen der für alle ν geltenden Beziehung $\lambda_\nu > 0$ bei hinlänglich großem d sicher eintritt.

Die folgende Beweisanordnung läuft natürlich ebenfalls schließlich auf den schon von Herrn Cahen und Herrn Hadamard zu ähnlichen Zwecken benutzten Grundgedanken hinaus. Doch handelt es sich gerade um die korrekte Begründung gewisser Schlüsse, die bei Herrn Cahen gar nicht, bei Herrn Hadamard unter anderen Voraussetzungen und auf anderem Wege gegeben wird; in der Tat versagt hier die Hadamardsche Beweisführung, da uns anstelle seiner Annahmen I bezw. II eben nur die Voraussetzung D) zur Verfügung steht.

Es sei also d den obigen Bedingungen entsprechend fest gegeben und δ eine beliebig kleine positive Zahl. Dann läßt sich, da ja $\alpha + \frac{\delta}{2} \geqq A$ und $\alpha + \frac{d}{2} > 0$ sein soll, nach C) eine von ν unabhängige Konstante $T = T(d, \delta)$ so angeben, daß bei jedem $\nu \geqq 0$ für alle w, welche dem Intervall $0 \leqq w \leqq w_0$ $(\nu = 0)$ bezw. $w_{\nu-1} \leqq w \leqq w_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ angehören, die Beziehung

$$(34) \quad \left| \int_{\alpha + \frac{d}{2} - Ti}^{\alpha + \frac{d}{2} + Ti} \frac{f_\nu(s)\, e^{w\left(s - \alpha - \frac{d}{2}\right)}}{s}\, ds - 2\pi i \frac{\varphi(w_{\nu-1})}{e^{w\left(\alpha + \frac{d}{2}\right)}} \right| < \frac{\delta}{4}$$

gilt. Ferner kann, da ja $\alpha + \frac{d}{2} \geqq A$ sein soll, nach D) die Größe T so groß gewählt werden, daß für alle diejenigen Punkte s des Kreises mit dem Radius $R = \sqrt{\left(\alpha + \frac{d}{2}\right)^2 + T^2}$ um den Nullpunkt, deren reeller Teil $\geqq \alpha + \frac{d}{2}$ ist, die Beziehung

$$(35) \quad |f(s)| < \frac{\delta}{4\pi} R$$

Digitized by Google

gilt. Endlich sei, wenn die ganze Zahl m so groß gewählt wird, daß

$$e^{-\lambda_m \frac{d}{2}} < \frac{\delta}{2}$$

ist, die Zahl

$$T > \frac{32}{\pi} \frac{m}{\delta^2}, \tag{36}$$

und es werde außerdem T so groß angenommen, daß $T > 2(\alpha + d)$ ist.

Wir integrieren die mit $e^{-w\frac{d}{2}}$ multiplizierte Beziehung (34) nach w von $w_{\nu-1}$ bis w_ν, wo im Falle $\nu = 0$ die alsdann sinnlose untere Schranke $w_{\nu-1}$ sowie der Ausdruck $\varphi(w_{\nu-1})$ einfach Null bedeuten. Dann ergibt sich

$$\left| \int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{f_\nu(s)}{s} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{w(s-\alpha-d)}\, dw\, ds - 2\pi i \varphi(w_{\nu-1}) \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{-w(\alpha+d)}\, dw \right| \tag{37}$$

$$< \frac{\delta}{4} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw.$$

Ferner ist für jedes $\nu \geqq 1$

$$\int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{e^{-\lambda_\nu s}}{s} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{w(s-\alpha-d)}\, dw\, ds$$

$$= \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{-w(\alpha+d)} \int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_\nu)s}}{s}\, ds\, dw,$$

und daher, wenn $E_{w-\lambda_\nu}$ der Annahme $\alpha + \frac{d}{2} > 0$ entsprechend für $w < \lambda_\nu$ den Wert 0, für $w = \lambda_\nu$ den Wert $\frac{1}{2}$ und für $w > \lambda_\nu$ den Wert 1 hat,

Digitized by Google

$$a_\nu \int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{e^{-\lambda_\nu s}}{s} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{w(s-\alpha-d)}\, dw\, ds - 2\pi i\, a_\nu \int_{\lambda_\nu}^{w_\nu} e^{-w(\alpha+d)}\, dw$$

(38)

$$= a_\nu \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{-w(\alpha+d)} \left\{ \int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_\nu)s}}{s}\, ds - 2\pi i\, E_{w-\lambda_\nu} \right\} dw.$$

Wir setzen nun

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi Tm}},$$

definieren also v_0 so, daß die Gleichung

$$\frac{1}{\pi v_0 T} = 2 v_0 m$$

besteht, wo infolge (36) der gemeinsame Wert dieser beiden Ausdrücke

$$\sqrt{\frac{2m}{\pi T}} < \frac{\delta}{4}$$

ist, und nehmen vorläufig $w_{\nu-1} < \lambda_\nu - v_0$ sowie $w_\nu > \lambda_\nu + v_0$ an. Hiernach zerlegen wir das Integral auf der rechten Seite von (38) in drei Integrale mit den Grenzen $w_{\nu-1} \ldots \lambda_\nu - v_0$, $\lambda_\nu - v_0 \ldots \lambda_\nu + v_0$, $\lambda_\nu + v_0 \ldots w_\nu$ und wenden auf den in geschweifte Klammern eingeschlossenen Faktor im ersten und dritten Teil des Integrals den Hilfssatz 2, im zweiten Teilintegral den Hilfssatz 3 an. Dann erhalten wir, daß die rechte Seite von (38) absolut genommen

$$< 2|a_\nu| \int_{w_{\nu-1}}^{\lambda_\nu - v_0} e^{-w(\alpha+d)} \frac{e^{(w-\lambda_\nu)\left(\alpha+\frac{d}{2}\right)}}{(\lambda_\nu - w)\, T}\, dw + 2\pi |a_\nu| \int_{\lambda_\nu - v_0}^{\lambda_\nu + v_0} e^{-w(\alpha+d)} e^{(w-\lambda_\nu)\left(\alpha+\frac{d}{2}\right)}\, d$$

$$+ 2|a_\nu| \int_{\lambda_\nu + v_0}^{w_\nu} e^{-w(\alpha+d)} \cdot \frac{e^{(w-\lambda_\nu)\left(\alpha+\frac{d}{2}\right)}}{(w-\lambda_\nu)\, T}\, dw$$

$$< \frac{2}{v_0 T} \left| a_\nu \cdot e^{-\lambda_\nu\left(\alpha+\frac{d}{2}\right)} \right| \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw + 2\pi \left| a_\nu e^{-\lambda_\nu\left(\alpha+\frac{d}{2}\right)} \right| \int_{\lambda_\nu - v_0}^{\lambda_\nu + v_0} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw$$

Digitized by Google

$$< \frac{1}{\pi v_0 T} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw + \int_{\lambda_\nu - v_0}^{\lambda_\nu + v_0} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw$$

$$< \frac{\delta}{4} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw + \int_{\lambda_\nu - v_0}^{\lambda_\nu + v_0} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw$$

ist. Ist nicht zugleich $w_{\nu-1} < \lambda_\nu - v_0$ und $w_\nu > \lambda_\nu + v_0$, so gilt offenbar dieselbe Abschätzung, und es darf allgemein im zweiten Integral rechts anstatt der unteren Grenze $\lambda_\nu - v_0$ die Zahl λ_ν' geschrieben werden, wo λ_ν' die größere der beiden Zahlen $w_{\nu-1}$ und $\lambda_\nu - v_0$ bedeutet, während anstatt der oberen Grenze $\lambda_\nu + v_0$ die Zahl λ_ν'' zu schreiben ist, wo λ_ν'' die kleinere der beiden Zahlen $\lambda_\nu + v_0$ und w_ν bedeutet. Dann ergibt sich in jedem Falle

$$\left| a_\nu \int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{e^{-\lambda_\nu s}}{s} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{w(s-\alpha-d)}\, dw\, ds - 2\pi i\, a_\nu \int_{\lambda_\nu}^{w_\nu} e^{-w(\alpha+d)}\, dw \right| \tag{39}$$

$$< \frac{\delta}{4} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw + \int_{\lambda_\nu'}^{\lambda_\nu''} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw,$$

wo der Integrationsweg im zweiten Integrale rechts sicherlich eine Länge $\leqq 2v_0$ hat.

Nun ist für jedes $\nu \geqq 1$

$$f_\nu(s) + a_\nu e^{-\lambda_\nu s} = f_\nu(s) + (\varphi(w_\nu) - \varphi(w_{\nu-1}))\, e^{-\lambda_\nu s} = f(s);$$

daher ergibt sich durch Addition von (37) und (39) für jedes $\nu \geqq 1$

$$\left| \int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{f(s)}{s} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{w(s-\alpha-d)}\, dw\, ds \right.$$

$$\left. - 2\pi i \left\{ \varphi(w_{\nu-1}) \int_{w_{\nu-1}}^{\lambda_\nu} e^{-w(\alpha+d)}\, dw + \varphi(w_\nu) \int_{\lambda_\nu}^{w_\nu} e^{-w(\alpha+d)}\, dw \right\} \right| \tag{40}$$

$$< \frac{\delta}{2} \int_{w_{\nu-1}}^{w_\nu} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw + \int_{\lambda_\nu'}^{\lambda_\nu''} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw.$$

Digitized by Google

Wir summieren die Beziehung (40) über alle $\nu = 1, 2, \ldots, N$, wo N eine beliebig große positive ganze Zahl sein darf. Jedoch soll in der Beziehung (40) im Falle des Index $\nu = N$ anstatt der oberen Grenzen w_N, λ_N'' überall λ_N geschrieben werden, was offenbar auch richtig ist[1]), so daß also auf der linken Seite das mit $\varphi(w_N)$ multiplizierte Integral ganz herausfällt; dafür aber soll noch die Beziehung (37) für den Fall $\nu = 0$, in welchem $f_0(s) = f(s)$ ist, hinzuaddiert werden. Dann ergibt sich, wenn berücksichtigt wird, daß der Ausdruck $\varphi(w_{\nu-1})$ für $\nu = 0$ und $\nu = 1$ den Wert Null hat und daß auch $w_{\nu-1}$ im Falle $\nu = 0$ einfach Null bedeutet:

$$\left| \int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{f(s)}{s} \int_0^{\lambda_N} e^{w(s-\alpha-d)}\, dw\, ds - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{N-1} \varphi(w_\nu) \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-w(\alpha+d)}\, dw \right| \tag{41}$$

$$< \frac{\delta}{2} \int_0^{\lambda_N} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw + \sum_{\nu=1}^{N} \int_{\lambda_\nu'}^{\lambda_\nu''} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw,$$

wo im Falle $\nu = N$ die obere Grenze $\lambda_N'' = \lambda_N$ zu setzen ist.

Nun konvergiert das Integral

$$\int_0^{\lambda_N} e^{w(s-\alpha-d)}\, dw$$

beim Grenzübergang $N = \infty$ gleichmäßig für alle s mit dem reellen Teil $\alpha + \frac{d}{2}$ gegen seinen Grenzwert $-\frac{1}{s-\alpha-d}$, da ja für diese s

$$\left| e^{w(s-\alpha-d)} \right| = e^{-w\frac{d}{2}}$$

ist, so daß beim ersten Gliede auf der linken Seite von (41) im Integranden des über eine endliche Strecke erstreckten Integrals zur Grenze $N = \infty$ übergegangen werden darf. Im ersten Gliede

1) Man darf nämlich in (37) und (38), also auch in (39) und (40) auf beiden Seiten anstatt der oberen Grenze $w_\nu = w_N$ die obere Grenze $\lambda_\nu = \lambda_N$ schreiben, indem die Integrationen nur über ein kleineres Intervall erstreckt werden; dann fällt auf den linken Seiten von (38) und (39) das zweite Glied, also auf der linken Seite von (40) das mit $\varphi(w_N)$ multiplizierte Glied fort, nnd es tritt in (39) und (40) anstatt der oberen Grenze λ_N'' einfach λ_N auf.

Digitized by Google

rechts konvergiert ebenfalls das Integral für $N = \infty$ und zwar gegen den Grenzwert $\frac{2}{d}$; das mit $\frac{\delta}{2}$ multiplizierte unendliche Integral wird also $= \frac{\delta}{d} \leqq \frac{\delta}{8}$. Im zweiten Gliede rechts ist, da der Integrationsweg eines jeden der dort auftretenden Integrale eine Länge $\leqq 2v_0$ hat,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\lambda_\nu'}^{\lambda_\nu''} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw < \sum_{\nu=1}^{m} \int_{\lambda_\nu'}^{\lambda_\nu''} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw + \int_{\lambda_m}^{\infty} e^{-w\frac{d}{2}}\, dw < 2v_0 m + \frac{2}{d} e^{-\lambda_m \frac{d}{2}}$$

$$< \frac{\delta}{4} + \frac{2}{d}\cdot\frac{\delta}{2} \leqq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{8},$$

so daß die ganze rechte Seite $< \frac{\delta}{2}$ wird. Aus dem bisherigen folgt, daß die Summe im zweiten Gliede der linken Seite von (41) beim Grenzübergang $N = \infty$ absolut genommen wenigstens zwischen endlichen Schranken bleibt; andererseits folgt aber schon aus den vorangegangenen Entwickelungen (unter Benutzung lediglich von B), daß diese Reihe konvergiert und zwar gegen $\frac{F(\alpha+d)}{\alpha+d}$, da ja wegen $\varphi(w_\nu) = S_\nu$ infolge der Konvergenz der Reihe $F(s)$ für $\Re(s) > \alpha$ analog zu (12)

$$(42) \qquad F(\alpha+d) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu(\alpha+d)} = (\alpha+d)\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(w_\nu) \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-w(\alpha+d)}\, dw$$

ist[1]). Es ergibt sich daher aus (41) durch den Grenzübergang $N = \infty$

$$(43) \qquad \left| -\int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{f(s)}{s(s-\alpha-d)}\, ds - 2\pi i \frac{F(\alpha+d)}{\alpha+d} \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Wir wenden nun den Cauchyschen Satz auf den Integranden des Integrales links und auf das Gebiet an, das von der vertikalen Strecke $\alpha+\frac{d}{2}-Ti \ldots \alpha+\frac{d}{2}+Ti$ links und von dem durch diese beiden Punkte begrenzten Bogen B des mit dem Radius

1) Übrigens kann umgekehrt aus der Konvergenz der in (42) rechts stehenden Reihe nicht auf die Konvergenz der Reihe links geschlossen werden.

Digitized by Google

$R = \sqrt{\left(\alpha + \frac{d}{2}\right)^2 + T^2}$ um den Nullpunkt beschriebenen Kreises rechts begrenzt wird. Dann enthält der Integrand wegen $R > T > 2(\alpha + d)$ im Innern dieses Gebietes den Pol erster Ordnung $s = \alpha + d$ mit dem Residuum $\frac{f(\alpha+d)}{\alpha+d}$ und ist sonst regulär, da ja $\alpha + \frac{d}{2} > 0$ ist. Ferner ist der Bogen B seiner Länge nach $< \pi R$. Es ergibt sich daher, wenn in dem Integral über den Bogen B dieser letztere von $\alpha + \frac{d}{2} + Ti$ bis $\alpha + \frac{d}{2} - Ti$ durchlaufen wird:

$$\int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{f(s)}{s(s-\alpha-d)}\,ds + \int_B \frac{f(s)}{s(s-\alpha-d)}\,ds = -2\pi i\,\frac{f(\alpha+d)}{\alpha+d},$$

und hieraus infolge (35) und infolge $R - \alpha - d > \frac{R}{2}$

$$\left| \int_{\alpha+\frac{d}{2}-Ti}^{\alpha+\frac{d}{2}+Ti} \frac{f(s)}{s(s-\alpha-d)}\,ds + 2\pi i\,\frac{f(\alpha+d)}{\alpha+d} \right| = \left| \int_B \frac{f(s)}{s(s-\alpha-d)}\,ds \right| < \pi R\,\frac{\frac{\delta}{4\pi}R}{R(R-\alpha-d)} < \frac{\delta}{2}. \tag{44}$$

Durch Addition von (43) und (44) folgt

$$\left| \frac{2\pi i}{\alpha+d}\left(f(\alpha+d) - F(\alpha+d)\right) \right| < \delta,$$

was für jede beliebig kleine Zahl δ nur dann möglich ist, wenn $f(\alpha+d) = F(\alpha+d)$ ist. Damit aber ist alles bewiesen.

Berlin, Dezember 1909.

Digitized by Google

Molekulare Eigenschwingungen.

Nachtrag zu meiner früheren Mitteilung.

Von

E. Madelung.

Vorgelegt von Eduard Riecke in der Sitzung d. Ges. vom 29. Jan. 1910.

In einer früheren Mitteilung habe ich darauf hingewiesen, daß die Frequenz der ultraroten Eigenschwingungen der drei Stoffe Steinsalz, Sylvin und Flußspath nahe übereinstimmt mit der Frequenz stehender elastischer longitudinaler Schwingungen in diesen Stoffen, deren halbe Wellenlänge gleich dem Abstand benachbarter Moleküle ist.

Mit diesem Hinweis, der also eine zunächst empirische Beziehung zwischen gewissen elastischen und optischen Konstanten dieser Materialien enthielt, hatte ich einen Versuch verbunden, diese Beziehung durch eine Theorie zu begründen. Dieser Versuch muß als mißlungen bezeichnet werden. Es stehen der damals gegebenen Theorie, die auf der unrichtigen Annahme beruhte, daß die beiden ihrer Frequenz nach gleichen Schwingungen auch ihrer Form nach gleich seien, Bedenken entgegen, auf die mich auch Herr Geheimrat W. Voigt freundlichst aufmerksam gemacht hat.

Ich will nun im Folgenden zunächst zeigen, daß es möglich ist, ein Modell anzugeben, das sowohl die elastischen wie die hier interessierenden optischen Eigenschaften der regulären Kristalle besitzt, und bei dem die früher empirisch gefundene Beziehung in wenig veränderter Form besteht. Die Entscheidung bis zu welchem Grade dieses Modell die tatsächlichen Verhältnisse darstellt, und wie es zu vervollkommnen wäre, um als Theorie Berechtigung zu haben, soll später besprochen werden. Zum Teil muß sie weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Digitized by Google

Das gesuchte Modell ist ein kubisches Raumgittersystem bestehend aus elastischen Stäben, die die in den Würfelecken liegenden kleinsten materiellen Bestandteile verbinden. Solche Stäbe sollen sowohl in den Würfelkanten wie in den Diagonalen der Würfelflächen liegen. Außerdem seien elastische Elemente eingeführt, die bei Aenderung des Winkels in den Ecken der Würfelflächen in Tätigkeit treten.

Um den elektrischen Kräften eintreffender Lichtwellen einen Angriffspunkt zu geben, führen wir elektrische Ladungen ein. Würden wir nun die Würfelecken als Moleküle auffassen, so müßten wir allen dieselbe Ladung geben. Alle würden dann, da die in Frage kommenden Lichtwellenlängen sehr groß sind gegen den Abstand der Moleküle, innerhalb eines relativ großen Bereichs die gleiche Kraft erfahren. Eine gegenseitige Verschiebung benachbarter Teilchen, wie wir sie hier brauchen, wäre also ausgeschlossen. Der einfachste Ausweg ist der, in den Würfelecken Atome anzunehmen (also zum Beispiel beim Steinsalz teils Natrium teils Chloratome) und diesen Atomen die positive resp. negative Ladungseinheit zu geben, die sie auch als Jonen eines Elektrolyten mit sich führen. Das Natürlichste ist dann, diese Atome gleichförmig zu verteilen, sodaß längs einer Geraden durch die Würfelkanten immer abwechselnd ein positives und ein negatives Atom liegt (Fig. 1).

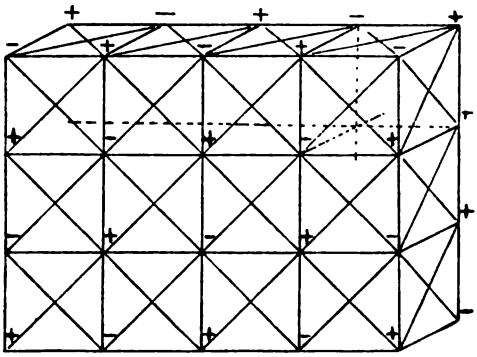


Fig. 1.

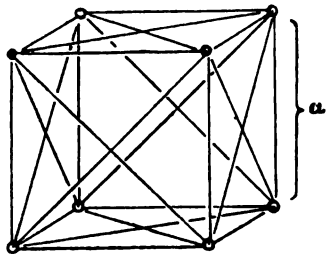


Fig. 2.

Die elektrischen Kräfte, die mit der Einführung von Ladungen im Modell auftreten, sollen keine spezielle Berücksichtigung erfahren. Sie seien entweder klein gegen die elastischen Kräfte, oder bilden tatsächlich einen Teil derselben.

Somit ist das Modell vollständig und wir gehen an die Betrachtung seiner Eigenschaften.

Digitized by Google

Daß das Modell die elastischen Eigenschaften eines regulären Kristalls besitzt, ist zunächst zu beweisen. Es hat, wie sofort ersichtlich, drei gleichwertige Symmetrieebenen. Es bleibt noch zu beweisen, daß es drei von einander unabhängige Elastizitätskoeffizienten besitzt. Das kann in der Weise geschehen, daß man die Werte dieser Koeffizienten aus den gegebenen Elementen berechnet.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir die Größe der für drei bestimmte Deformationen erforderlichen Arbeitsleistung[1]), nämlich für allseitige Kompression, einseitige Dehnung ohne Querkontraktion und für Schiebung parallel einer Axe.

Es sei a die Kantenlänge eines Elementarwürfels. Um einen der in den Kanten liegenden Stäben um $\frac{1}{n}$ seiner Länge zu längen resp. zu verkürzen sei die Kraft $\frac{E_k}{n}$ erforderlich, entsprechend für die Diagonalstäbe die Kraft $\frac{E_d}{n}$. Schließlich sei die Kraft $\frac{E_w}{m}$ erforderlich, um einen der rechten Winkel der Würfelflächen um den Winkel $\frac{1}{m}$ in Bogenmaß zu vergrößern. Die elastischen Konstanten des ganzen Systems, also des durch das Modell dargestellten Kristalles, bezeichnen wir in der bei W. Voigt üblichen Weise durch die Konstanten c_{11}, c_{12} und c_{44}.

Die Deformationen sollen an einem Stab vom Volumen v vorgenommen werden, der sich aus $\frac{v}{a^3}$ Elementarwürfeln zusammensetzt. v soll groß sein gegen a^3, die Deformation ihrerseits klein gegen die deformierten Längen.

1) Kompression durch allseitig gleichen Druck. Fig. 3.

Alle Längen werden um einen bestimmten Bruchteil $\frac{l}{n}$ verkürzt. Die Winkel bleiben ungeändert. Die Arbeitsleistung besteht daher in der Verkürzung von $\frac{3v}{a^3}$ Kantenstäben und $\frac{6v}{a^3}$ Diagonalstäben. Sie wird also gleich

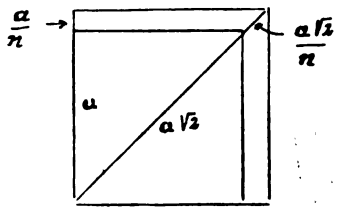


Fig. 3.

1) Die Arbeitsleistungen = Kraft × Weg sind als ungerichtete Größen bequemer zu berechnen und zu addieren als die Kräfte selbst. Wo es erforderlich ist, ist die Kraft leicht aus der Arbeit wieder zu bestimmen.

Digitized by Google

$$A_1 = \frac{3v}{a^3} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{E_k}{n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6v}{a^3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{n} \cdot \frac{E_d}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2} \frac{3}{2} \cdot \frac{v}{a^3}(E_k + 2 \cdot \sqrt{2}\, E_d).$$

Andrerseits berechnet sie sich aus den elastischen Koeffizienten c_{11}, c_{12}, c_{44} zu

$$A_1 = \frac{3}{n} \frac{(c_{11}+2c_{12})}{3} \cdot \frac{3v}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{v}{n^2} \cdot (c_{11} + 2c_{12})$$

sodaß wir durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhalten:

$$(1) \qquad c_{11} + 2c_{12} = \frac{1}{a^2}(E_k + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot E_d).$$

2) Längung ohne Querkontraktion. Fig. 4.

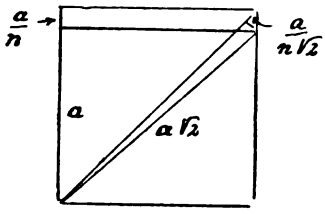


Fig. 4.

Auch hier bleiben die Winkel in den Würfelflächenecken ungeändert. Verkürzt werden $\frac{v}{a^3}$ Kantenstäbe um $\frac{1}{n}$ und $\frac{4 \cdot v}{a^3}$ Diagonalstäbe um $\frac{1}{2n}$. Die Arbeit ist daher gleich

$$A_2 = \frac{v}{a^3} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{E_k}{n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4v}{a^3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2n} \cdot \frac{E_d}{2n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2} \frac{v}{a^3} \frac{1}{2}(E_k + \sqrt{2} \cdot E_d)$$

andrerseits gleich

$$A_2 = \frac{c_{11} \cdot v}{n^3} \cdot \frac{1}{2}$$

also

$$(2) \qquad c_{11} = \frac{1}{a^2} \cdot (E_k + \sqrt{2}\, E_d).$$

3) Schiebung parallel einer Axe. Fig. 5.

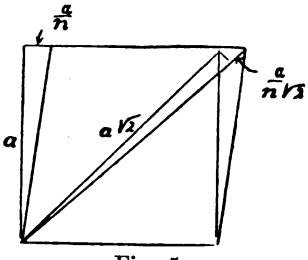


Fig. 5.

Hier bleiben die Kantenstäbe ungeändert. Die $\frac{2v}{a^3}$ Diagonalstäbe in je zwei Würfelflächen werden teils um $\frac{1}{2n}$ gelängt, teils ebensoviel gekürzt. Die $\frac{4v}{a^3}$ Winkel in je zwei Seiten ändern sich je um $\frac{1}{n}$ (Bogenmaaß).

Es wird also

Digitized by Google

$$A_3 = \frac{2v}{a^3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2n} \cdot \frac{E_d}{2n} \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot v}{a^3} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{E_w}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{v}{a^2} \cdot \frac{1}{n^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot E_d + 4 E_w \right)$$

andrerseits

$$A_3 = \frac{c_{44} \cdot v}{n^2} \cdot \frac{1}{2}$$

also

$$c_{44} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot E_d + 4 E_w \right). \tag{3}$$

Das Resultat der Rechnung ist, daß die drei Elastizitätskoeffizienten, die unser Modell bei seinen Symmetrieverhältnissen höchstens haben kann, von einander unabhängig sind, daß es also einen regulären Kristall in seinen elastischen Eigenschaften ersetzen kann.

Die gefundenen Relationen zwischen den E und den c stellen wir zusammen:

$$c_{11} = \frac{1}{a^2} (E_k + \sqrt{2}\, E_d)$$

$$c_{12} = \frac{1}{a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} E_d$$

$$c_{44} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} E_d + 4 E_w \right)$$

und

$$E_k = a^2 (c_{11} - 2 c_{12})$$

$$E_d = a^2 \sqrt{2}\, c_{12}$$

$$E_w = a^2 \frac{(c_{44} - c_{12})}{4}.$$

Wir gehen nunmehr an die Betrachtung der elektrischen Eigenschaften des Modells. Ein konstantes elektrisches Feld bringt Verschiebungen der als elektrisch angenommenen Atome in den Würfelecken hervor. Diese Verschiebungen stellen eine dielektrische Polarisation vor.

Bei regulären Kristallen ist nun die durch die Dielektrizitätskonstante bestimmte dielektrische Polarisation unabhängig von der Richtung des wirkenden elektrischen Feldes. Die Größe der Verschiebungen in unserm Modell müssen also auch unabhängig von der Richtung des Feldes sein. Daß das tatsächlich der Fall ist, das zu zeigen ist unsere nächste Aufgabe.

Digitized by Google

Es ist evident, daß die Verschiebungen durch ein homogenes Feld so erfolgen, daß sämtliche positive Teilchen in der einen, sämtliche negative Teilchen in der entgegengesetzten Richtung verschoben werden, und daß die Größe und Richtung der Verschiebung für alle gleichartigen Teilchen die gleiche ist. Denken wir die eine Art festgehalten, so ist es unsere Aufgabe zu zeigen, daß die Kraft oder auch wieder die Arbeitsleistung, die erforderlich ist, die andre Art um einen bestimmten Betrag zu verschieben, unabhängig von der Richtung ist. Die Aufgabe vereinfacht sich weiter auf die Betrachtung der Verschiebungen eines einzelnen Teilchens, wobei nur zu berücksichtigen ist, daß die durch die Diagonalstäbe vermittelte Wechselwirkung zwischen gleichartigen Teilchen bei einer Verschiebung keine Aenderung erleidet.

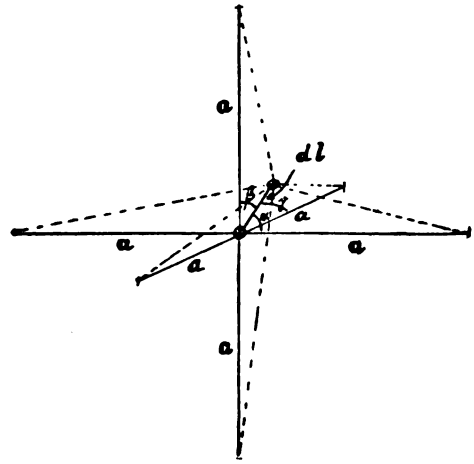


Fig. 6.

In der Figur 6 sei ein Teilchen inmitten seiner sechs Nachbarn dargestellt. Durch ein elektrisches Feld sei es um die Streke dl verschoben, deren Richtung durch die Richtungscosinus α, β, γ bestimmt ist. dl soll hierbei klein sein gegen den Abstand a der Nachbarn.

Gegen die elastische Kraft der 6 Kantenstäbe wird bei der Verschiebung die Arbeit geleistet:

$$2 \cdot dl \cdot \alpha \cdot \frac{dl \cdot \alpha}{a} E_k \cdot \frac{1}{2} + \cdot\beta\cdot + \cdots \gamma = \frac{dl^2 \cdot E_k}{a} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \frac{dl^2 \cdot E_k}{a}.$$

Die Winkeländerung in den Würfelflächen berechnet sich in elementarer Weise zu

Digitized by Google

$$d\varphi = \frac{dl}{a}(\alpha+\beta) \text{ resp. } \frac{dl}{a}(\beta+\gamma) \text{ u. s. w.}$$

Die gegen die elastischen Winkelelemente geleistete Arbeit wird also gleich

$$\Sigma d\varphi \cdot \frac{E_w}{2} \cdot d\varphi \cdot a = \frac{dl^2}{2a} \cdot E_w \qquad \left\{\begin{matrix}(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\alpha+\gamma)^2 \\ +(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+\cdots \\ +(\beta-\alpha)^2+\cdots \\ +(-\alpha-\beta)^2+\cdots\end{matrix}\right\}$$

$$= 4 \cdot \frac{dl^2}{a} \cdot E_w$$

sodaß im ganzen die Arbeit

$$= \frac{dl^2}{a}(E_k + 4E_w)$$

geleistet worden, die wie zu beweisen war, von der Richtung vollständig unabhängig ist.

Im Volumen v ist die Zahl der verschobenen Teilchen $\frac{v}{2 \cdot a^3}$. Die Kraft also, die zur Herbeiführung der betrachteten Verschiebung nötig ist, wird gleich:

$$K dl = \frac{v}{2a^3} \cdot \frac{dl^2}{a}(E_k + 4E_w) \cdot \frac{2}{dl} = \frac{v}{a^4} \cdot dl\,(E_k + 4E_w)$$

$$K = \frac{v}{a^2}(c_{11} - 3c_{12} + c_{44}).$$

Es ist auf Grund dieser Beziehung möglich, die Dielektrizitätskonstante unseres Modells zu berechnen. Es seien durch das Feld F die $\frac{v}{2a^3}$ Teilchen des Volumens v mit der Einzelladung e um dl verschoben. Dann ist

$$F \cdot \frac{v}{2a^3} \cdot e = K \cdot dl$$

Die Polarisation berechnet sich aus der Dielektricitätskonstante ε nach der bekannten Formel

$$v \frac{e}{2a^3} \cdot dl = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot F \cdot v \text{ also gleich } \frac{\varepsilon-1}{4\pi} K \cdot dl \cdot \frac{2}{ve} \cdot a^3 \cdot v$$

und hieraus

$$\varepsilon - 1 = 4\pi \left(\frac{e}{2a^3}\right)^2 \cdot \frac{v}{K} = 4\pi \left(\frac{e}{2a^3}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{(c_{11} - 3c_{12} + c_{44})}$$

Digitized by Google

$$\varepsilon = \frac{\pi \cdot e^2}{a^4 (c_{11} - 3c_{12} + c_{44})} + 1.$$

Auf die Rechnung für spezielle Fälle verzichten wir hier teils aus später ersichtlichen Gründen, teils weil zu der so berechneten Dielektrizitätskonstante noch ein Anteil hinzukommt, herrührend von Polarisationen im Atom, über die keine Annahmen gemacht wurden.

Die durch ein elektrisches Feld hervorgebrachte dielektrische Verschiebung verschwindet, wenn das Feld verschwindet. Hierbei wird die früher geleistete Arbeit zurückgewonnen, d. h. sie wird in kinetische Energie umgesetzt. Wenn nun diese Energie nicht sofort durch Reibung oder eine andere Dämpfung verzehrt wird, müssen Schwingungen auftreten, indem die Teilchen über ihre Ruhelage hinausfahren, und dann durch die neu auftretende elastische Spannung der Gitterstäbe zurückgeführt werden.

Die Frequenz dieser Schwingungen ist nun mit dem bisher Gegebenen leicht zu berechnen. Hierzu ist nur erforderlich die Kenntnis der Größe der schwingenden Massse und der Kraft, die bei einer bestimmten Verschiebung die Masse in ihre Ruhelage zurückzuführen sucht.

Hätten wir z. B. zwei Massen m_1 und m_2 an den Enden eines elastischen gewichtslosen Stabes. Eine Längung des Stabes um dl rufe die Gegenkraft Kdl hervor, Dann können die Massen gegeneinander mit der Frequenz n schwingen entsprechend der Gleichung:

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}.$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf unsern Fall bietet keine Schwierigkeiten. Bezeichnen wir mit

D die Dichte des Stoffes
M_1 das Molekulargewicht der positiven Teilchen
M_2 das Molekulargewicht der negativen Teilchen
N_0 die Lohschmidt'sche Zahl $= 2{,}76.10^{19}$

dann wird die eine Masse gleich $vD \frac{M_1}{M_1 + M_2}$

die andre entsprechend $vD \frac{M_2}{M_1 + M_2}$.

Die Direktionskraft K hatten wir oben gefunden gleich

$$K = \frac{v}{a^3} (c_{11} - 3c_{12} + c_{44}).$$

Digitized by Google

In diesem Ausdruck ist noch die Größe a unbekannt.

Die Zahl N der in der Volumeneinheit enthaltenen Teilchen berechnet sich zu

$$N = N_0 \cdot \frac{D}{\frac{M_1 + M_2}{2}} \cdot \frac{M_0}{D_0}\ ^{1)} = 1{,}234 \cdot 10^{24} \cdot \frac{D}{M_1 + M_2}.$$

Es ist ferner

$$a = N^{-\frac{1}{3}}.$$

Setzen wir alle diese Werte in die Gleichung ein, so wird

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{v}{a^2}(c_{11} - 3c_{12} + c_{44}) \frac{(M_1 + M_2)^2}{v \cdot D \cdot M_1 \cdot M_2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(c_{11} - 3c_{12} + c_{44})}{D} \frac{\cdot D^{\frac{1}{3}} (M_1 + M_2)^2}{(M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}} \cdot M_1 \cdot M_2} (1{,}234 \cdot 10^{24})^{\frac{1}{3}}}$$

$$n = 1{,}709 \cdot 10^7 \sqrt{\frac{(M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}} \cdot (c_{11} - 3c_{12} + c_{44})}{D^{\frac{1}{3}} \cdot M_1 \cdot M_2}}$$

$$= 1{,}709 \cdot 10^7 \frac{\sqrt[3]{(M_1 + M_2)^2}\ \sqrt{(c_{11} - 3c_{12} + c_{44})}}{\sqrt[6]{D}\ \sqrt{M_1 \cdot M_2}}.$$

Um nun diese Schwingungen, deren Frequenz wir eben berechnet haben, wirklich zu erzeugen, genügt es durchaus nicht, zunächst ein Feld wirken zu lassen und dieses plötzlich zum Verschwinden zu bringen. Es ist nämlich ersichtlich, daß dies in einer kürzeren Zeit wird geschehen müssen als einer Viertelschwingung entspricht. Eine Ueberschlagsrechnung zeigt, daß dies praktisch unmöglich ist. Dagegen ist es möglich ein elektrisches Feld derselben Frequenz zu erzeugen, um die Atome durch Resonanz zum Mitschwingen zu veranlassen.

Die Berechnung der Schwingungsfrequenzen in einigen Fällen und der Länge der entsprechenden elektrischen Wellen soll uns über die Größenordnung orientieren. Wir wählen die Stoffe Steinsalz (Chlornatrium), Sylvin (Chlorkalium) und Flußspath (Fluorcalcium), deren Konstanten bekannt sind.

---

1) M_0 und D_0 sind die betreffenden Konstanten für ein ideales Gas. Für Wasserstoff sind sie = 2,016 resp. $9{,}004 \cdot 10^{-5}$.

Digitized by Google

	M_1	M_2	D	$\cdot 10^{-8}$ c_{11}	c_{12}	c_{44}	n	λ
Steinsalz NaCl	23,05	35,45	2,17	4770	1320	1294	$3{,}632 \cdot 10^{11}$	82,6 μ
Sylvin KCl	39,15	35,45	1,95	3750	198	655	$4{,}530 \cdot 10^{11}$	66,23 μ
Flußspath CaF_2	40,1	$2 \times 19{,}—$	3,18	16700	4570	3450	$6{,}664 \cdot 10^{11}$	45,02 μ

Die gefundenen Wellenlängen liegen im Gebiet der ultraroten Wärmestrahlen. Durch solche Strahlen also wird unser System zum Mitschwingen angeregt. Die Energie dieser Strahlen wird dabei in die Schwingungsenergie der Atome umgewandelt und dann teils wieder zurückgestrahlt (reflektiert) teils durch irgend welche Reibung in Wärme umgesetzt.

Für die berechneten Wellen muß daher der Stoff undurchlässig sein. Wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir die beobachtete Absorption der betrachteten Stoffe im Ultraroten auf die oben beschriebenen Verhältnisse zurückführen.

Die Beobachtungen von Rubens u. a. lieferten die wirkliche Lage dieses Absorptionsstreifens für

Steinsalz bei 51,2 μ
Sylvin bei 61,2 μ
Flußspath bei 31,6 u. 24,— μ.

Wir waren davon ausgegangen, zu zeigen, daß es ein Modell gibt, das die elastischen Eigenschaften und die dielektrische Isotropie eines regulären Kristalles besitzt. Man erkennt aber leicht, daß es außer diesem noch eine große Anzahl von Modellen gibt, die dasselbe leisten. Z. B. ersetzen wir die früher angenommenen elastischen Stäbe in den Flächendiagonalen der Elementarwürfel durch solche in den vier großen Diagonalen, die durch den Mittelpunkt des Würfels gehen. Die Rechnung, die wir, weil sie nichts Neues enthält, hier nicht wiedergeben, zeigt, daß die elastischen Eigenschaften und die Isotropie bestehen bleiben, daß aber die für die Eigenschwingungen berechnete Frequenz nicht dieselbe wird. Es tritt nämlich an Stelle des elastischen Gliedes $(c_{11} - 3\,c_{12} + c_{44})$ in unsrer oben gefundenen Formel für n jetzt eine ähnliche Summe $(c_{11} + c_{12} + c_{44})$. Führen wir hiermit die Rechnung aus, so ergeben sich für die Wellenlängen der Eigenschwingungen die Zahlen für

Steinsalz 44,1 μ
Sylvin 60,23 μ
Flußspath 23,05 μ.

Von den beiden betrachteten und andern Modellen hat natürlich jedes ebensoviel oder ebensowenig Berechtigung. Keines von ihnen

Digitized by Google

kann einen Anspruch darauf machen, ein wahrscheinliches Bild des tatsächlichen Systems der Wechselwirkungen zwischen den Atomen des Kristalls zu geben. Es läßt sich aber vermuten, daß man sich diesem Ideal dadurch annähern kann, daß man zwischen je zwei Atomen ein elastisches Bindeglied einführt, statt wie oben geschehen, nur zwischen den nächsten Nachbarn. Die Berechnung aller dieser Bindeglieder ist freilich dann nicht mehr möglich. Es stehen uns nämlich nur drei Bestimmungsgleichungen zur Verfügung. Wir müßten schon ganz willkürliche Annahmen über die Abhängigkeit ihrer Größe vom Abstand der zugehörigen Atome machen.

Trotzdem können wir mit einiger Wahrscheinlichkeit uns durch folgende Ueberlegungen, die freilich durchaus nicht streng beweisend sind, unserm Ziel nähern.

Die Gesamtheit der elastischen Bindeglieder zwischen je zwei Atomen kann in zwei Gruppen eingeteilt werden, jenachdem die betreffenden Atome gleichartig sind oder nicht. Gegen die Glieder der ersten Gruppe wird bei einer dielektrischen Verschiebung keine Arbeit geleistet.

Würden wir nun das elastische Verhalten des Kristalls allein durch Glieder der ersten Gruppe erklären, so würde, weil die Direktionskraft gegen eine dielektrische Verschiebung verschwindet, die Eigenschwingungsfrequenz gleich Null werden. Andrerseits würde die alleinige Verwendung der zweiten Gruppe sicher einen zu großen Wert für die Frequenz liefern. Das war aber der Fall bei dem zweiten der oben behandelten Fälle.

Nehmen wir nun an, uns wäre das Gesetz bekannt, nach dem die Größe der elastischen Glieder mit dem Abstand der zugehörigen Atome abnimmt.

Wenn wir nun zur Darstellung der elastischen Eigenschaften des Kristalls uns successive einer immer größeren Zahl von Gliedern bedienten, beginnend mit solchen zwischen benachbarten Atomen und fortschreitend zu immer entfernteren, so würde die berechnete Eigenschwingungsfrequenz sich oscillatorisch dem richtigen Wert nähern. Das Hinzufügen von Gliedern der ersten Gruppe nämlich würde jedesmal den zuletzt berechneten Wert verkleinern, das der andern ihn vergrößern, sodaß derselbe zu groß oder zu klein ausfällt, jenachdem das zuletzt hinzugefügte Glied ein solches der ersten oder der zweiten Gruppe war. Wir können somit schließen, daß die im ersten der oben behandelten Fälle gefundene Frequenz zu klein war.

Digitized by Google

Der Vergleich zwischen Rechnung und Beobachtung bestätigt, daß der beobachtete Wert zwischen den beiden errechneten liegt.

Unser Modell enthält aber noch in einer andern Beziehung eine Willkürlichkeit. So wäre es z. B. ebensogut möglich gewesen die eine Art Atome für sich kubisch anzuordnen und dann die andere in die Zentren der von den ersten gebildeten Elementarwürfel zu legen, sodaß auch diese unter einander kubisch angeordnet werden. Dieses System könnten wir in derselben Weise wie oben mit elastischen Elementen versehen und dieselben Ueberlegungen wie oben anstellen.

Auch ohne die frühere Rechnung für dieses oder andre mögliche Systeme zu wiederholen erkennt man, daß die Formel für die Eigenschwingungsfrequenz bei allen derartigen Systemen ganz ähnlich ausfallen muß. Verschieden kann nur der Zahlenfaktor werden und die Form der linearen Funktion der Elastizitätskonstanten.

Es erscheint hiernach aber aussichtslos, zu versuchen, auf rein theoretischem Wege eine exakte Formel aufzustellen, solange die Anordnung der Atome im Kristall sowie der zwischen ihnen wirkenden Kräfte nicht näher bekannt ist.

Wenn man die Annahme macht, daß bei chemisch ähnlich gebauten Stoffen z. B. bei den sämtlichen Halogenverbindungen der Alkalimetalle (oder in noch größerem Bereich) die elastischen Konstanten einander proportional sind, kann man die lineare Funktion der elastischen Konstanten ersetzen durch eine einzelne und einen empirisch zu bestimmenden Zahlenfaktor C.

Praktisch eignet sich hierfür besonders die Kompressibilität, weil sie für eine größere Anzahl von Stoffen in zuverlässigen Messungen vorliegt[1]). Die Formel wird dann die Form annehmen:

$$n = \frac{1{,}709 \cdot 10^7 \sqrt[3]{(M_1 + M_2)^2}}{\sqrt[6]{D}\,\sqrt{M_1 M_2}} \sqrt{\frac{C}{\varkappa}}; \quad \lambda = \frac{3 \cdot 10^{10}}{n}$$

wo C ein Zahlenfaktor und $\varkappa$ die Kompressibilität bedeutet.

Auf Grund dieser Formel gebe ich die folgende Tabelle mit $C = 2{,}24$:

---

1) Richards u. Jones, J. Amer. Chem. Soc. 31, S. 158—191, 1909, Beibl. 33 p. 1050, 1909.

Digitized by Google

	M_1	M_2	$\frac{\sqrt[3]{(M_1+M_2)^2}}{\sqrt{M_1 . M_2}}$	D	$\sqrt[6]{D}$	$\varkappa$	$\sqrt{\varkappa}$	n	λ	λ beob.
Na Cl	23,05	35,45	0,522	2,17	$1,13_5$	$4,1 . 10^{-12}$	$2,03 . 10^{-6}$	$5,87 . 10^{12}$	(51,2 μ)	51,2
KCl	39,15	35,45	0,482	1,98	1,12	5,0 „	2,23 „	4,92 „	61,—	61,1
Na Br	23,05	80,—	0,511	3,01	1,20	5,1 „	2,26 „	4,80 „	62,5	ca. 50—55
K Br	39,15	80,—	$0,432_5$	2,76	$1,17_5$	6,2 „	2,49 „	3,77 „	79,5	ca. 60—70
Na J	23,05	126,8	0,522	$3,55$	$1,23_5$	6,9 „	2,63 „	4,11 „	73,1	—
KJ	39,15	126,8	0,429	3,07	1,20	8,6 „	2,93 „	3,12 „	96,2	—
CaF_2	40,0	19 ×2	0,467	3,18	$1,21_5$	1,2 „	1,095 „	8,98 „	33,4	31,6 u. 24,—

Die Konstante C ist hierbei so gewählt, daß für Na Cl die Beobachtung mit der Rechnung übereinstimmt.

Im Allgemeinen scheint für die Halogenverbindungen der Alkalimetalle die Kompressibilität mit zunehmendem Atomgewicht der beiden Komponenten zu wachsen. Das Gleiche gilt für die Dichte. Die Eigenfrequenz wird also bei umso größeren Wellenlängen liegen je größer das Molekulargewicht ist. Man kann daher erwarten, daß das Cäsiumjodid als der schwerste Repräsentant der ganzen Reihe erst bei größeren Wellenlängen absorbiert wie die andern ähnlichen Salze. Da seine Kompressibilität unbekannt ist, können wir nur durch eine Extrapolation einen Zahlenwert gewinnen. Eine Ueberschlagungsrechnung ergibt, daß seine Absorption wahrscheinlich erst bei einer größeren Wellenlänge als 150 μ ihr Maximum erreicht.

CsJ ist daher wahrscheinlich unter den Alkalihalogenen der für Wärmestrahlen bis 100 μ durchlässigste Stoff.

Unsere Theorie läßt nur eine ultrarote Eigenschwingung zu. Trotzdem sind beim Flußspath zwei solche beobachtet worden. Das kann aber nicht als Einwand gelten, weil genau genommen der Flußspath gar nicht zu den Stoffen gehört, für die unsere obigen Betrachtungen gelten. Die Zahl nämlich der einen Art von Atomen ist doppelt so groß wie die der andern, da auf je ein Calciumatom zwei Fluoratome fallen. Würden diese zwei in einem Punkte vereinigt sein, so wären unsere Betrachtungen anwendbar. Die Tatsache, daß die zwei beobachteten Eigenschwingungsfrequenzen so nahe bei einander liegen, scheint mir zu beweisen, daß mit einiger Annäherung wenigstens diese Bedingung erfüllt. Ich habe den Stoff nur deshalb zur Prüfung der Theorie verwandt, weil das Material ein so beschränktes ist.

Digitized by Google

Die hier vertretenen Anschauungen sind denen der Drudeschen Dispersionstheorie nahe verwandt. Der Unterschied besteht in zwei Punkten. Drude nimmt für jeden Absorptionsstreifen eine Gattung Jonen resp. Elektronen an, die um eine feste Ruhelage schwingen, während wir zur Erklärung eines Absorptionsstreifens zwei Gattungen gegen einander schwingen lassen. Drude macht keine Annahme über das Wesen der Direktionskräfte, während wir diejenigen Kräfte zwischen den Atomen dafür heranziehen, die auch das elastische Verhalten des Stoffes bedingen.

Diese Unterschiede lassen aber doch eine formale Vereinigung beider Betrachtungen zu, wenn wir die Schwingungen der beiden Arten von Atomen unabhängig von einander betrachten und nachträglich erst berücksichtigen, daß ihre Frequenz dieselbe ist. Natürlich ist die Direktionskraft, die dann die Schwingung der einzelnen Art bestimmt, eine andre Größe wie die für die relative Bewegung früher erhaltene.

Es seien nämlich wie oben zwei Massen m_1 und m_2 gegeben, verbunden durch eine elastische Stange, welche die relative Direktionskraft K erzeugt. Dann schwingen die Massen um ihre Ruhelage, als ob auf die einzelne Masse die Direktionskraft K_1 resp. K_2 wirke entsprechend der Gleichung

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K(m_1+m_2)}{m_1 \cdot m_2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1}{m_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_2}{m_2}}$$

$$K_1 = K \cdot \frac{m_1+m_2}{m_2}; \quad K_2 = K \cdot \frac{m_1+m_2}{m_1}.$$

Die Bewegungsgleichung eines Jons lautet bei Drude

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\lambda \tau^2} = eX - \frac{4\pi e^2 \xi}{\vartheta} - \frac{r e^2 \partial \xi}{\lambda \tau}.$$

Hierin bedeutet $\frac{4\pi e^2}{\vartheta}$ die Direktionskraft, die das Jon in seine Ruhelage zurücktreibt. Der Ansatz führt bei Drude zu der Formel

$$n^2 = 1 + \Sigma \mathfrak{N}_h \cdot \vartheta_h + \Sigma \frac{\mathfrak{N}_h \cdot \vartheta_h \cdot \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2} = b^2 + \Sigma \frac{M_h}{\lambda^2 - \lambda_h^2}$$

wo n den Brechungskoeffizienten
der Index h die verschiedenen Arten Jonen,
$\mathfrak{N}_h$ deren Zahl im cm^3
λ die Wellenlänge des eintreffenden Lichtes
λ_h die Wellenlänge der Eigenfrequenz der betreffenden Jonenart bedeutet.

Digitized by Google

Indem wir die Direktionskraft ersetzen durch unsren oben gefundenen Wert, ergibt sich

$$K_1 = \frac{4\pi e_1^2 \cdot \mathfrak{N}_1 \cdot v}{\vartheta_1}.$$

Also

$$\vartheta_1 = \frac{4\pi e_1^2 \cdot \mathfrak{N}_1 \cdot v}{K_1} \text{ wo } e_1 = 4{,}69 \cdot 10^{-10} \text{ ist.}$$

Es ist nun $\mathfrak{N}_1 = \frac{N}{2}$ von früher bekannt $= \frac{0{,}627 \cdot 10^{24} D}{M_1 + M_2}$ und K_1 rückwärts berechnet aus der Schwingungsfrequenz

$$K_1 = \frac{4\pi^2 n^2 \cdot v \cdot D \cdot M_1}{M_1 + M_2}.$$

Setzen wir alles ein so ergibt sich

$$\mathrm{M}_1 = \frac{2{,}97 \cdot 10^7 \cdot \lambda_1^4 \cdot D}{M_1 (M_1 + M_2)}.$$

Für die beiden Jonenarten ist nun die Schwingungsfrequenz dieselbe. In der Formel für den Brechungsexponenten können wir daher die betreffenden Glieder in der Summe, weil die Nenner gleich sind vereinigen und erhalten die der Beobachtung zugängliche Größe M_1 für die ultraroten Eigenschwingungen als Summe der M_1 und M_2

$$\mathrm{M}_r = \frac{2{,}97 \cdot 10^7 \cdot \lambda_r^4 \cdot D}{M_1 \cdot M_2}.$$

Ich fasse das Ergebnis der obigen Ueberlegungen zusammen:

1) Es gelingt ein Modell zu finden, das die elastischen und die elektrischen Eigenschaften der regulären zweiatomigen Kristalle besitzt.

2) Bei diesem Modell besteht eine Beziehung zwischen den elastischen Konstanten und der Frequenz der ultraroten Eigenschwingungen, die mit einiger Annäherung durch die Beobachtung bestätigt wird.

3) Ein ganz bestimmter Aufbau des Modells ist nicht erforderlich, vielmehr führen eine große Zahl ähnlicher Modelle zu denselben Beziehungen, die sich formal durch einen Zahlenfaktor unterscheiden.

Digitized by Google

4) Die Ermittelung dieses Zahlenfaktors in einem speziellen Fall ermöglicht die Berechnung der ultraroten Eigenfrequenz für andre Stoffe, die in guter Uebereinstimmung mit der Beobachtung steht, soweit diese vorliegt.

5) Der formale Anschluß an die Drudesche Theorie der Dispersion ermöglicht die Berechnung einer weiteren wichtigen Konstante.

6) Die hier gefundene Beziehung ist die erste bisher existierende zwischen mechanischen und optischen Eigenschaften eines Stoffes.

Anmerkung bei der Korrektur.

Rubens und Hollnagel (Sitzungsber. d. Berl. Akademie 1910 pag. 26—52) haben inzwischen neue Messungen von Reststrahlen veröffentlicht, die die für KBr und KJ berechneten Werte mit 82,3 μ und 96,7 μ gut bestätigen.

Ueberraschend ist die von ihnen beobachtete doppelte Natur der meisten Reststrahlungen, für die unsere Theorie keine Erklärung gibt. Es ist vielleicht möglich, daß die benutzte Lichtquelle (Auerbrenner) durch selektive Strahlung (Bandenspektrum) hierfür die Ursache ist, wie solche von Coblentz (Beibl. 33. 1131, 1909) am Nernstkörper beobachtet wurde.

Digitized by Google

Ueber die Hilbertsche Uniformisierungsmethode[1]).

Von **Paul Koebe** in Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn Hilbert in der Sitzung am 26. Februar 1910.

Die vorliegende Arbeit knüpft an eine kürzlich von Herrn Hilbert in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte Note „zur Theorie der konformen Abbildung“ (Nachr. 17. Juli 1909, pag. 314) an. In dieser Arbeit gibt Herr Hilbert einen Weg an, um mit Hülfe der von ihm begründeten Methode des Dirichletschen Prinzip auf der denkbar allgemeinsten endlich- oder unendlich-vielblättrigen Riemannschen Fläche B die Existenz derjenigen Potentialfunktion nachzuweisen, welche in der Interpretation von Herrn Klein den Spannungszustand des aus einer Doppelquelle auf B entspringenden stationären elektrischen Stromes darstellt. Sei U die Potentialfunktion, 0 ($x = x_0$, $y = y_0$) der Punkt auf B, in welchem dieselbe unstetig wird, wie

$$r^{-1}\cos\varphi = \frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

(unter r und φ die Polarkoordinaten des Punktes mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y inbezug auf 0 verstanden), so ist für die betreffende Strömungsfunktion U außer der erwähnten Unstetigkeit folgende von Herrn Hilbert angegebene Minimaleigenschaft charakteristisch: Es sei k_ϱ irgend eine Kreislinie auf B mit hinreichend kleinem Radius ϱ und dem Mittelpunkt 0. Durch k_ϱ wird B in zwei Stücke zerlegt, deren eines, den Punkt 0 nicht enthaltendes wir mit B_ϱ bezeichnen. Ist $w(x, y)$ irgend eine in B_ϱ eindeutig, stetig und stückweise analytisch erklärte, auf k_ϱ verschwindende reelle Funktion, für welche das Doppelintegral

$$\iint_{B_\varrho} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

1) Ueber den Inhalt vorliegender Note, insbesondere des Abschnitts C habe ich kürzlich in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft sowie in der Mathematischen Gesellschaft zu Marburg vorgetragen.

Digitized by Google

einen endlichen Wert hat, dann ist jedesmal

$$\iint_{B_\varrho}\left[\left(\frac{\partial(U+w)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(U+w)}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy>\iint_{B_\varrho}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, es besteht die Variationsgleichung

$$\iint_{B_\varrho}(U_x w_x+U_y w_y)\,dx\,dy=0.$$

Ist der Bereich B schlichtartig, d. h. so beschaffen, daß er durch jeden inneren Rückkehrschnitt in zwei getrennte Stücke zerfällt [1]), so entsteht die Aufgabe, wenn unter V die zu U konjugierte Potentialfunktion verstanden wird, den Nachweis zu führen, daß $U+iV$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche B auf einen schlichten, d. i. einblättrigen Bereich leistet, welcher von lauter zur Axe des Reellen parallelen geradlinigen Strecken begrenzt wird, deren einzelne sich auch auf einen Punkt reduzieren kann; und zwar soll dieser Satz im Sinne von Hilbert als eine unmittelbare Folge der Minimaleigenschaft erkannt werden.

Einen derartigen Beweis entwickelte für den Fall des einfach zusammenhängenden und endlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs Herr Hilbert selbst in seiner im Sommer-Semester 1909 gehaltenen Vorlesung über konforme Abbildung. Bei diesem Beweise kommt es darauf an, das Bild des Gesamtverlaufs der Strömungslinien $V=\text{const.}$ auf der Fläche B festzustellen. In den Abschnitten A und B vorliegender Arbeit widme ich dem Falle des einfach zusammenhängenden bezw. endlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs ebenfalls eine besondere Untersuchung, welche mit der Hilbertschen in dem erwähnten Grundgedanken übereinstimmt.

Der allgemeine, unten im Abschnitt C mitgeteilte Beweis, betreffend den Fall des unendlich vielfach zusammenhängenden Bereichs B, ein Fall, welcher mit Rücksicht auf die allgemeinen Uniformisierungsprobleme (insbesondere Uniformisierung durch Funktionen mit imaginären Transformationen in sich) [2]),

1) Was bei jedem schlichten, d. i. einblättrigen Bereich, auch wenn derselbe unendlich-vielfach zusammenhängend ist, tatsächlich zutrifft.

2) Der Fall des einfach zusammenhängenden Bereichs umfaßt nur diejenigen Uniformisierungstheoreme, welche auf Funktionen mit nur einem Grenzkreise führen.

Digitized by Google

ebenfalls von größter Wichtigkeit ist, gelang mir mittels einer wesentlich anderen Gedankenkombination. Die Abbildungseigenschaft wird dabei in der Tat in dem von Hilbert gewünschten Sinne als eine unmittelbare Folge der Minimaleigenschaft, nämlich durch Zuhilfenahme spezieller Variationen erkannt[1]).

Hinsichtlich der Darstellung möchte ich erwähnen, daß ich mich von dem Streben leiten ließ, die Eigenart und wunderbare Plastizität der Methode möglichst hervortreten zu lassen. Dementsprechend habe ich die Untersuchung an manchen Stellen mehr ausgestaltet, als dies zur Erlangung des Hauptzieles, nämlich des Beweises der Abbildungseigenschaft der Funktion $U+iV$ durchaus notwendig ist.

A. Das Abbildungstheorem für den einfach zusammenhängenden Bereich.

Es werde nunmehr B als ein einfach zusammenhängender ungeschlossener endlich- oder unendlich vielblättriger Bereich vorausgesetzt. In diesem Falle ist ohne weiteres klar, daß die zu U konjugierte Potentialfunktion V ebenso wie U eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Fläche B ist. Die Funktion $U+iV$ wird im Punkte 0 ($x = x_0$, $y = y_0$) unendlich wie $\frac{1}{z-z_0}$, wenn $z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$ gesetzt wird.

Wir bemerken zunächst, daß es nicht möglich ist, eine ganz innerhalb B verlaufende geschlossene Linie L zu ziehen, welche den Punkt 0 nicht trifft und längs welcher die Funktion U einen konstanten Wert U_1 hat. Wäre dies nämlich der Fall, so könnten wir in demjenigen von L begrenzten Teilgebiete β von B, welcher den Punkt 0 nicht enthält, an Stelle der Funktionswerte U den konstanten Wert U_1 treten lassen[2]) und würden auf diese Weise den Wert des Dirichletschen Integrals durch Ueber-

1) In einer Note „über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, 4. Mitteilung", (Gött. Nachr. 31. Juli 1909, p. 324 ff.) habe ich die Existenz der erwähnten Funktion U unabhängig von der Methode des Dirichletschen Prinzips in derselben Allgemeinheit wie Hilbert nach zwei verschiedenen Methoden dargetan und auch den vollständigen Beweis des genannten Abbildungssatzes im Falle des unendlich hohen Zusammenhanges geliefert, ein Beweis, bei welchem die bei meinen Methoden des Existenzbeweises sich mitergebende Hilbertsche Minimaleigenschaft der Funktion U ebenfalls eine fundamentale Rolle spielt. S. auch die Anmerkung 3 am Schlusse vorliegender Arbeit. Einen ersten Existenzbeweis habe ich in den Comptes Rendus, 1. juin 1909 veröffentlicht. Ein ebenfalls auf der Zuhülfenahme der Näherungsfunktionen beruhender Beweis wurde von R. Courant gefunden. (Göttinger Dissertation 1910.)

2) Vgl. meine erwähnte Note p. 333 oben.

Digitized by Google

gang von der Funktion U zu der in der angegebenen Weise modifizierten Funktion verringern. Es ist gleichfalls nicht möglich eine Linie $U = U_1$ zu ziehen, welche, wenn man sie rückwärts oder vorwärts verfolgt, den Punkt 0 nicht trifft und sich beidemale der Grenze des Bereiches B unbegrenzt nähert[1]). Eine solche Linie würde nämlich mit der Begrenzung des Bereichs B zusammen ein gewisses Teilgebiet β von B abgrenzen, welches 0 nicht enthält und in welchem wir wieder an Stelle der Funktionswerte U den konstanten Wert U_1 treten lassen könnten, indem wir dabei zugleich den Wert des Dirichletschen Integrals verringern. Aus dem Vorhergehenden folgt sofort, daß U in B_ϱ unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, nämlich unterhalb M, wenn M das Maximum von $|U|$ auf k_ϱ bedeutet. Andernfalls würde man nämlich in demjenigen Teile von $B_{\varrho'}$ in welchem etwa $U > M$ ist, die Funktionswerte U durch M ersetzen können und dadurch den Wert des Dirichletschen Integrals verringern (vgl. l. c. pag. 333). Weiter ergibt sich, daß an keiner Stelle des Bereichs B ein Staupunkt liegt, d. h. ein Punkt, für welchen gleichzeitig die partielle Ableitung der Funktion U nach x sowohl wie nach y verschwindet, oder anders ausgedrückt, ein Punkt, dessen unmittelbare Umgebung durch die Funktion $U+iV$ auf ein Windungsflächenstück abgebildet wird. Die Annahme eines solchen Staupunktes würde nämlich zur Folge haben, daß von dem betreffenden Staupunkte aus mindestens vier Aeste $U =$ einem konstanten Werte U_1, nämlich dem U-Werte in dem betrachteten Staupunkte, ausgehen. Von diesen vier Aesten könnten keine zwei in einem inneren, von 0 verschiedenen Punkte von B zusammentreffen, weil dadurch eine geschlossene Linie $U = U_1$ entstände. Es können andererseits höchstens zwei der Linien in 0 endigen, indem sie dann mit entgegengesetzter Richtung in 0 einlaufen. Demnach müßten mindestens zwei der erwähnten vier Linien sich der Grenze von B unbegrenzt nähern, da eine Häufungssingularität einer solchen Linie im Innern von B offenbar ausgeschlossen ist. Wir erhielten so einen Widerspruch mit dem vorhin gefundenen Satze, daß es keine von Rand zu Rand verlaufende den Punkt 0 nicht treffende Linie $U = U_1$ gibt.

1) Der Ausdruck „sich unbegrenzt der Grenze annähern" hat bei einem unendlich-vielblättrigen Bereich, allgemein zu reden, keinen Sinn. Wir verstehen darunter hier und im Folgenden nichts anderes als dies: die betreffende Linie bleibt, falls man sich den Bereich als Grenze endlich-vielblättriger analytisch begrenzter Näherungsbereiche in der Form $B = \lim_{n=\infty} B_n$ dargestellt denkt, außerhalb jedes Näherungsbereichs mit noch so hohem Index, wenn man die Linie nur weit genug verfolgt.

Digitized by Google

Aus der Tatsache des Fehlens von Staupunkten folgt, daß alle Linien $U = U_1$ und $V = V_1$ in B völlig regulär verlaufen, indem sie an jeder Stelle von B (ausgenommen 0) eine eindeutig bestimmte Fortsetzungsrichtung haben. Die einzelnen Linien $U = U_1$ laufen daher entweder von 0 zu 0 oder von 0 nach der Grenze.

Betrachten wir nunmehr die Linien $V = \text{const.}$ näher. Ich behaupte: eine derartige Linie $V = V_1$ kann ebensowenig wie eine Linie $U = U_1$ eine geschlossenen 0 nicht treffenden Zug innerhalb B bilden oder einen 0 nicht treffenden Zug von Rand zu Rand. Der Beweis dafür ergibt sich durch Bildung einer speziellen Variation für dasjenige von der betrachteten Linie $V = V_1$ begrenzte Teilgebiet β von B, welches den Punkt 0 nicht enthält, nämlich der Variation

$$w(x, y) = U\varphi(V; V_1),$$

wobei unter $\varphi(V; V_1)$ eine Funktion von V verstanden wird, welche für alle V-Werte stetig, positiv und < 1 erklärt ist, für V_1 verschwindet und der Bedingung genügt, daß die Ableitung nach V, die auch Sprünge erleiden kann, unterhalb einer endlichen Schranke g bleibt. Man verifiziert sofort für die erwähnte Variation

$$\begin{aligned}
\iint_\beta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy &= \iint_\beta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial V}\right)^2\right] dU\,dV^{1}) \\
&= \iint_\beta \left[\left(\frac{\partial w}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial V}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \\
&= \iint [\varphi(V; V_1)^2 + U^2\varphi'(V; V_1)^2][]\,dx\,dy \\
&< (1 + M^2 g^2) \iint_\beta \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy
\end{aligned}$$

wobei mit M eine für β gültige obere Schranke von $|U|$ bezeichnet ist. Es hat also das Dirichletsche Integral für w einen endlichen Wert. Andererseits ist

$$\iint_\beta (U_x w_x + U_y w_y)\,dx\,dy = \iint_\beta \left(\frac{\partial w}{\partial U}\right) dU\,dV > 0$$

---

1) Wegen der Invarianz des Dirichletschen Integrals gegenüber konformen Abbildungen. Diese Invarianz besteht auch für die Variationsgleichung. Vgl. meine „vierte Mitteilung" l. c. pag. 351. Auch Herr Hilbert bediente sich bei seinem oben erwähnten Beweise dieser Invarianz.

Digitized by Google

wegen $\frac{\partial w}{\partial U} = \varphi(V; V_1) > 0$. Das ist ein Widerspruch mit der für alle zulässigen Variationen bestehenden Variationsgleichung. Man könnte wie vorher mit Hülfe der Linien $U = \text{const.}$ auch mit Hülfe der Linien $V = \text{const.}$ das Fehlen von Staupunkten nachweisen.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß durch jeden Punkt von B eine und nur eine bestimmte Linie $V = \text{const.}$ geht und daß diese Linie entweder, vorwärts und rückwärts verfolgt, nach 0 läuft oder nur in der einen Richtung verfolgt nach 0 läuft, in der anderen Richtung verfolgt jedoch nach dem Rande. Eine innere Häufungssingularität der Linie ist nämlich wegen der Eindeutigkeit von V ausgeschlossen.

Es kann nicht mehr als zwei von 0 nach dem Rande laufende Linien $V = \text{const.}$ geben[1]). Um dies einzusehen, veranschaulichen wir uns den Verlauf der Linien $V = \text{const.}$ in der unmittelbaren Nähe des Punktes 0; (Fig. 1). Nehmen wir an, daß es drei verschiedene Linien $V = \text{const.}$ von 0 nach dem Rande gebe, so würden sicher zwei davon $V = V_1$ und $V = V_2$ von 0 in derselben Richtung auslaufen und wir könnten daher durch ein Linienstück $U = U_1$ in der Nachbarschaft des Punktes 0 (vgl. Fig. 2; lies U_1 statt U_2) ein Gebiet β bestimmen (in der Figur

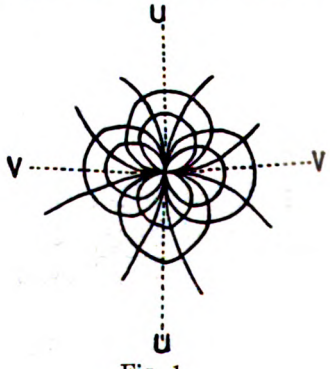


Fig. 1.

Fig. 2.

schraffiert) und für dieses eine Variation w in der Gestalt

$$w = (U - U_1)\varphi(V; V_1, V_2)$$

bilden, indem wir unter $\varphi(V; V_1, V_2)$ eine solche positive Funktion

1) Der Nachweis dieses Satzes gerade ist ein charakteristischer Punkt auch des von Hilbert in seiner Vorlesung entwickelten Beweises. Der hier gegebene Beweis desselben lehnt sich aufs engste an die Betrachtung pag. 350—351 meiner „vierten Mitteilung“ an.

Digitized by Google

von V verstehen, welche nur für V_1 und V_2 verschwindet, im übrigen aber zugleich mit ihrer Ableitung nach V unterhalb einer festen Schranke bleibt. Für diese Variation ist dann wieder $\int\int\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$ endlich und $\iint(U_x w_x+U_y w_y)dx\,dy$ positiv, nicht Null.

Betrachten wir nunmehr den Gesamtverlauf aller Linien $V = \text{const.}$, so erkennen wir jetzt unmittelbar, daß derselben das durch die Figur 3 dargestellte typische Verhalten zeigen wird, eine Figur, welche auch sofort in Evidenz treten läßt, daß die Funktion $U+iV$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf einen einblättrigen Bereich leistet, dessen Begrenzung von einem endlichen Schlitz gebildet wird, parallel der Axe des Reellen. Dieser Schlitz kann sich auch auf einen Punkt reduzieren.

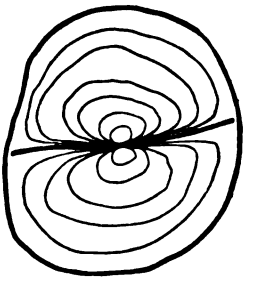


Fig. 3.

B. Der Fall des endlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs.

Es sei jetzt B ein endlich vielfach zusammenhängender, schlichtartiger Bereich. In diesem Falle zeigt man zunächst nach einer von Hilbert angegebenen direkt auf die Minimaleigenschaft der Funktion U gegründeten Methode, daß die konjugierte Potentialfunktion V ebenfalls eine eindeutige Funktion auf der Fläche B ist[1]). Nunmehr betrachten wir die Linien $V = \text{const.}$ Eine solche Linie kann nicht geschlossen sein, außer wenn sie den Punkt 0 enthält; sie kann auch nicht von einer Randlinie zu derselben Randlinie zurückkehren, ohne durch 0 zu gehen. Diese beiden Bemerkungen ergeben sich genau ebenso wie die entsprechenden Bemerkungen in A. Es kann jedoch im vorliegenden Falle vorkommen, daß eine Linie $V = \text{const.}$ von einem Rande zu einem anderen Rande läuft oder von einem Rande nach dem Punkte 0 Hier ist nun wichtig zu bemerken, daß die Anzahl aller möglichen

1) Ich gebe den Beweis dieses Satzes zu Anfang des Abschnitts C dieser Arbeit wieder. Derselbe verläuft nämlich im Falle eines unendlich-vielfach zusammenhängenden schlichtartigen Bereichs ebenso wie im Falle endlichen Zusammenhanges.

Digitized by Google

verschiedenen[1]) Linien $V = \text{const.}$ dieser Art endlich sein muß, da andernfalls einer von den folgenden Fällen eintreten müßte. Erster Fall: Es gibt zwei verschiedene Linien $V = V_1$ und $V = V_2$ (eventuell kann für dieselben auch $V_1 = V_2$ sein) von einer Randlinie L_1 zu einer anderen Randlinie L_2. Zweiter Fall: Es gibt zwei verschiedene Linien $V = V_1$ und $V = V_2$ von 0 nach einer und derselben Randlinie. Diese beiden Linien laufen ferner von 0 aus in derselben Richtung (eventuell kann auch $V_1 = V_2$ sein, in welchem Falle die beiden Linien in der Nähe des Punktes 0 jedenfalls koinzidieren würden, um sich dann an einem Staupunkte zu gabeln. Der erste Fall ist unmöglich, weil man in diesem Falle ein den Punkt 0 nicht enthaltendes Gebiet angeben kann, welches von den Linien $V = V_1$ und $V = V_2$ begrenzt wird und für welches man die Variation $w = U\varphi(V; V_1, V_2)$ (siehe oben p. 64) bilden könnte. Der zweite Fall ist ausgeschlossen, weil man wie oben die Variation $(U - U_1)\varphi(V; V_1, V_2)$ in einem Gebiete β bilden könnte, das durch Hinzunahme einer Linie $U = U_1$ entsteht nach Art der Figur 2.

Nachdem die Endlichkeit der Anzahl der „singulären“ Linien (von Rand zu Rand oder von Rand zu 0) festgestellt ist, denken wir uns dieselben sämtlich gezogen. Auf diesen Linien müssen bereits sämtliche möglicherweise vorhandenen Staupunkte liegen. Denn von einem solchen Staupunkte aus können wir mindestens vier Linien $V = V_1$ verfolgen, deren höchstens zwei auf 0 stossen können, sodaß die anderen sich notwendig zu einer Linie von Rand zu Rand vereinigen. Es ist hiermit auch die Endlichkeit der Anzahl der Staupunkte bewiesen, insofern als die Annahme unendlich vieler Staupunkte zur Folge haben würde, daß es sicher unendlich viele „verschiedene“ Linien von Rand zu Rand geben würde[2]).

Betrachten wir nunmehr irgend einen Punkt in B, welcher weder mit 0 noch mit einer der erwähnten ausgezeichneten Linien koinzidiert, so geht durch denselben stets eine und nur eine Linie $V = \text{const.}$, welche sich als eine geschlossene Linie durch 0 darstellt. Indem wir also alle Linien $V = \text{const.}$ von 0 aus konstruieren, welche nicht zu „singulären“ V-Werten gehören (V-Werte auf singulären Linien $V = \text{const.}$) erhalten wir eine vollständige Bedeckung der Fläche B, welche nun durch die singulären Linien

1) „Verschieden“ nenne ich zwei Linien, wenn sie nicht ihrem ganzen Verlaufe nach koinzidieren.

2) Vgl. einen Beweis pag. 72 für die Unmöglichkeit der Existenz eines Staupunktes.

Digitized by Google

in eine endliche Anzahl von Teilgebieten, die sämtlich an 0 anstoßen, zerlegt ist. Daraus leuchtet in Anbetracht der Eindeutigkeit der Funktion $U+iV$ unmittelbar ein, daß letztere Funktion eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Fläche B auf einen einblättrigen Bereich leistet, welcher von endlich vielen zur Axe des Reellen parallelen Schlitzen begrenzt wird. Diese Abbildung zeigt auch, daß in Wahrheit überhaupt keine Staupunkte vorkommen.

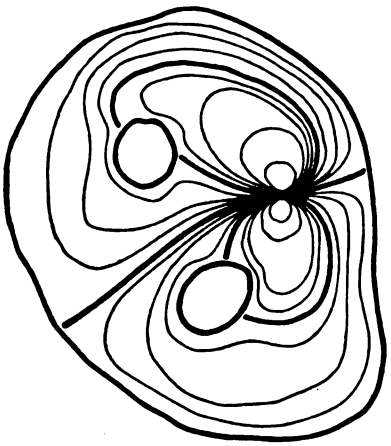


Fig. 4.

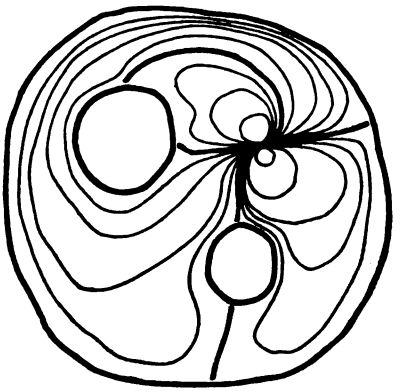


Fig. 5.

Zur Erläuterung dienen die Figuren 4 und 5. In Fig. 4 ist der Verlauf der Linien $V = \text{const.}$ im Falle eines dreifach zusammenhängenden Bereichs dargestellt so, wie er im allgemeinen sein wird. Es ist dies der Fall, in welchem von den parallelen Schlitzen keine zwei auf einer und derselben Geraden liegen. Figur 5 veranschaulicht den Fall, in welchem zwei der Schlitze auf einer und derselben Geraden liegen, während der dritte auf einer anderen Geraden liegt.

C. Der Fall des unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs.

Es sei nunmehr B der allgemeinste unendlich vielfach zusammenhängende schlichtartige Bereich mit endlicher oder unendlich hoher Blätterzahl. Man stelle sich der Einfachheit halber den Bereich B schlicht, d. i. einblättrig vor.

Wir beweisen eine Reihe von Sätzen, welche sich sämtlich in einfachster Weise aus dem Bestehen der Variationsglei-

Digitized by Google

chung ergeben und als deren Resultat sich die gewünschte Abbildungseigenschaft der Funktion $U+iV$ ergibt.

Satz I. Die zu U konjugierte Potentialfunktion V ist eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Fläche B.

I. Beweis[1]: Es ist zu zeigen, daß das Integral $\int \frac{dU}{dn} ds$ stets den Wert Null hat, wenn man dasselbe über eine ganz im Innern von B verlaufende, 0 nicht treffende einfach geschlossene Linie L erstreckt.

Die Linie L zerlegt die Fläche B, weil diese schlichtartig ist, in zwei Stücke, deren eines den Punkt 0 nicht enthaltendes, wir mit β'' bezeichnen, das andere mit $(B-\beta'')$. Wir denken uns in $(B-\beta'')$, der Linie L benachbart, eine geschlossene Linie L_1 gezogen, welche zusammen mit L einen zweifach zusammenhängenden längs L sich hinziehenden Streifen β' begrenzt, und definieren nunmehr eine Variation wie folgt. In β'' setzen wir $w = 1$, in β' hingegen setzen wir w gleich irgend einer eindeutigen stetigen stückweise analytischen Funktion, welche auf L_1 verschwindet, auf L hingegen den Wert eins erhält. Nun muß sein

$$\iint_{\beta'+\beta''} (U_x w_x + U_y w_y)\, dx\, dy = 0.$$

Es ist $\iint_{\beta''} = 0$, weil w_x und w_y in β'' identisch verschwinden, andererseits ist nach dem Greenschen Satze

$$\iint_{\beta'} = \int_L w \frac{dU}{dn} ds - \int_{L'} w \frac{dU}{dn} ds,$$

also mit Rücksicht auf die für w in β' gestellte Grenzbedingung

$$\int_L 1 \frac{dU}{dn} ds = 0.$$

Satz II. Es gibt kein Teilgebiet β von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von B enthält und welches außer von den Grenzen des Gebiets B nur von solchen in B verlaufenden Linien begrenzt wird, längs denen U einen für alle diese Linien konstanten Wert U_1 hat[2].

---

1) Dieser Beweis rührt von Herrn Hilbert her.

2) Die Zahl der getrennten Begrenzungsstücke $U = U_1$ kann dabei unendlich groß sein. Selbstverständlich ist sie abzählbar, da an jedes Stück ein Teil von β anstößt.

Digitized by Google

Beweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, daß die Annahme der Existenz eines solchen Gebiets die Möglichkeit mit sich brächte, von der Funktion U zu einer Funktion mit kleinerem Dirichletschen Integral überzugehen, indem man in β die Funktionswerte U durch den konstanten Wert U_1 ersetzt. (Vgl. pag. 61).

Satz III. Die Funktion U bleibt in einem Gebiete, welches die unmittelbare Umgebung des Punktes 0 ausschließt, zwischen endlichen Schranken.

Der Beweis ergibt sich analog wie oben pag. 62.

Satz IV. Ist β irgend ein Teilgebiet von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von 0 enthält, so ist die obere und untere Grenze der von der Funktion U auf der Begrenzung von β, soweit sie innerhalb B verläuft, zugleich auch die obere und untere Grenze der Werte U im Gebiete β überhaupt.

Der Beweis ergibt sich ebenso wie der Beweis des Satzes III durch Zurückführung auf Satz II.

Satz V. Es gibt kein Teilgebiet β von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von B enthält und welches außer von den Grenzen des Gebiets B nur von solchen in B verlaufenden Linien begrenzt wird, längs denen V einen für alle diese Linien konstanten Wert V_1 hat.

Der Beweis dieses Satzes wird mit Hülfe der Variation $U\varphi(V; V_1)$ geführt nach Analogie des oben pag. 63 gegebenen Beweises.

Satz VI. Die Funktion V bleibt in einem Teilgebiete β von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von 0 enthält, unterhalb einer endlichen Schranke.

Der Beweis ergibt sich aus Satz V, ebenso wie Satz III aus Satz II gefolgert wurde.

Satz VII. Ist β irgend ein Teilgebiet von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von 0 enthält, so ist die obere und untere Grenze der von der Funktion V auf der Begrenzung von β, soweit sie innerhalb B verläuft, angenommenen Werte zugleich auch die obere und untere Grenze der von der Funktion V in β überhaupt angenommenen Werte.

Der Beweis folgt aus V und VI ebenso wie der Beweis von IV aus II und III.

Satz VIII. Es seien U_1, V_1, V_2, ..., V_n eine endliche Anzahl von Werten. Dann gibt es kein Teilgebiet β von B, welches keinen Punkt der unmittelbaren Umgebung von 0 enthält und außer von Begrenzungslinien von B nur von Linien bezw. Linien-

Digitized by Google

stücken $U = U_1$ oder $V = V_1, V_2, \ldots V_n$ begrenzt wird. Dabei ist auch der Fall einbegriffen, daß Linien $U = \text{const.}$ als Begrenzungslinien von β garnicht vorkommen.

Der Beweis ergibt sich sofort, wenn man in dem betreffenden Gebiete β die Variation $(U - U_1) \cdot \varphi(V; V_1, V_2, \ldots, V_n)$ bildet, wobei unter $\varphi(V; V_1, V_2, \ldots V_n)$ eine solche überall positive Funktion verstanden wird, deren Werte nebst den Werten der Ableitung nach V unterhalb einer endlichen Schranke bleiben und welche an den Stellen $V_1, V_2 \ldots, V_n$ verschwindet. Vgl. pag. 64 oben.

Satz IX. Konstruiert man in B das System aller Linien, längs welchen U einen bestimmten Wert U_1 hat, so wird durch dieses Liniensystem die Fläche B in genau zwei getrennte Stücke zerlegt. In dem einen Stück ist $U > U_1$, in dem anderen $U < U_1$.

Beweis: Es geht durch den Punkt 0 jedenfalls nur eine Linie $U = U_1$, folglich stoßen an 0 nur zwei derjenigen Gebiete an, in welche B durch das erwähnte Liniensystem zerlegt wird. In dem einen dieser Gebiete ist $U > U_1$, in dem anderen $U < U_1$. Gäbe es nun außer diesen beiden Gebieten noch ein weiteres, so würde dieses Stück ein solches Gebiet sein, wie wir es in Satz II als unmöglich erkannt haben.

Satz X. Es seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ n von einander verschiedene V-Werte. Zieht man alle Linien in B, längs welchen V einen der angegebenen Werte hat, so wird dadurch die Fläche B in genau $n+1$ getrennte Stücke zerlegt, für welche, wenn $V_1 < V_2 < \ldots < V_n$ bezeichnet ist, folgende Ungleichheiten charakteristisch sind: $V < V_1$; $V_1 < V < V_2$; $V_2 < V < V_3$; $\ldots$; $V_{n-1} < V < V_n$; $V_n < V$.

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen. Jedes der Gebiete, in welche B durch die genannten Linien zerlegt wird, muß wegen des Satzes VIII an 0 anstoßen. Nun wird die Umgebung des Punktes 0 durch das genannte Liniensystem offenbar in $2n$ Stücke zerlegt, ein Stück $V < V_1$, zwei $V_1 < V < V_2$, zwei $V_2 < V < V_3$, $\ldots$, zwei $V_{n-1} V < V_n$ und ein Stück $V_n < V$.: vgl. Fig. 8. Es gibt demnach höchstens $2n$ getrennte Gebiete. Nun aber müssen die jedesmal derselben Ungleichheitsbedingung genügenden, an 0 anstoßenden Stücke Teile eines und desselben zusammenhängenden Gebietes sein, in welchem ebenfalls die betreffende Ungleichheit erfüllt ist. Denn anderenfalls würde durch Hinzunahme einer Linie $U = U_1$, welche in unmittelbarer Nähe des

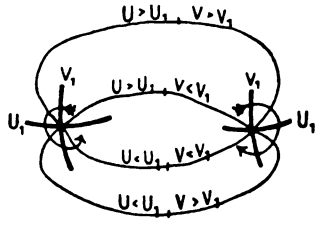


Fig. 6.

Digitized by Google

Punktes 0 verläuft (vgl. Figur 2 oben), ein den Punkt 0 nicht enthaltendes Teilgebiet β von B entstehen, welches von einem Linienstück $U = U_1$ und von zwei Liniensystemen $V = V_m$ bezw. $V = V_{m+1}$ begrenzt wird. Ein solches Gebiet kann aber nach VIII nicht existieren.

Satz XI. Wird zu dem erwähnten vollständigen Liniensystem $V = V_1, V_2, \ldots, V_n$ noch ein vollständiges Liniensystem $U = U_1$ hinzugenommen, so zerfällt die Fläche B in genau $2n+2$ Stücke, indem jedes der vorher erwähnten $n+1$ Gebiete in genau zwei Teile zerlegt wird, in deren einem $U > U_1$, in deren anderem $U < U_1$ ist.

Der Beweis beruht ebenso wie der Beweis von X auf Satz VIII.

Satz XII. Durch Vermittlung der Funktion $U+iV$ wird die Fläche B umkehrbar eindeutig und konform auf einen schlichten, d. i. einblättrigen Bereich S abgebildet. Die vollständige Begrenzung des Bereichs S liegt in einem endlichen Bezirk. Insbesondere existieren auf B keine Staupunkte.

Beweis: Zunächst ist $U+iV$ nach Satz I eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Fläche B. Zu zeigen ist, daß diese Funktion nicht an zwei verschiedenen Stellen der Fläche B einen und denselben Wert annimmt. Der Beweis verläuft indirekt. Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte auf B, für welche $U+iV$ einen und denselben Wert U_1+iV_1 annimmt. Wir dürfen voraussetzen, daß in diesen beiden Punkten die Ableitung der Funktion $U+iV$ nach $x+iy$ von null verschieden ist. Andernfalls könnten wir offenbar in der Nachbarschaft von P_1 und P_2 oder auch in unmittelbarer Nachbarschaft einer der Punkte zwei Punkte P_1' und P_2' angeben, für welche diese Annahme zutrifft und für welche wiederum $U+iV$ einen und denselben Wert hat.

Wir konstruieren das System aller Linien $U = U_1$ sowie das System aller Linien $V = V_1$ auf B. Die Fläche B zerfällt dadurch nach dem Satze X in genau vier Stücke. Jedes dieser Stücke stößt sowohl an den Punkt P_1 als auch an den Punkt P_2 an, in welchen Punkten sich die Linien $U = U_1$ und $V = V_1$ unter einem rechten Winkel schneiden. Fängt man in dem Gebiete $U > U_1$, $V > V_1$ an, so gelangt man bei Umkreisung des Punktes P_1 sowohl als auch bei Umkreisung des Punktes P_2 wegen der Konformität der durch die Funktion $U+iV$ vermittelten Abbildung nacheinander zu den Gebieten $U > U_1$, $V > V_1$; $U < U_1$, $V > V_1$; $U < U_1$, $V < V_1$; $U > U_1$, $V < V_1$. Die korrespondierenden Gebiete bei P_1 und P_2, d. s. solche Gebiete, für welche dieselben

Digitized by Google

Ungleichheitsbedingungen erfüllt sind, müssen sich auf Grund des Satzes X als Teile eines zusammenhängenden Gebiets auffassen lassen, in welchem die betreffenden Ungleichheitsbedingungen ebenfalls gelten. Demnach müßte es möglich sein, den vier Gebieten entsprechend je eine Linie von P_1 nach P_2 zu ziehen, so daß dieselben außer in P_1 und P_2 sich nicht treffen; (vgl. die Fig. 6, in welcher wir die Vorstellung eines schlichten Bereiches B zu Grunde legen, was jedoch für den Schluß unwesentlich ist; in der Figur 7 lies V_1 statt U_1). Daraus würde aber folgen, daß man die Punkte P_1 und P_2 in entgegengesetztem Sinne umkreisen müßte, um die vier Linien bezw. die vier Gebiete in derselben Reihenfolge anzutreffen, das ist ein Widerspruch mit der unmittelbar vorhergehenden Bemerkung, der zufolge der Drehungssinn bei P_1 und P_2 derselbe ist.

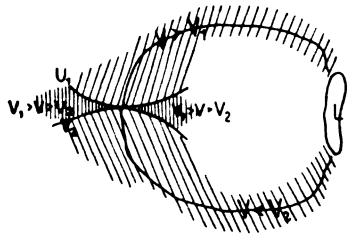


Fig. 7.

Der vorstehend entwickelte Gedanke führt auch unmittelbar zu dem Nachweis, daß ein Staupunkt auf B nicht existiert. Gäbe es nämlich einen Staupunkt, so könnte man durch denselben zwei oder mehr in dem Staupunkte sich schneidende Linienstücke $U = U_1$ legen, wenn U_1 den Wert der Funktion U im Staupunkte bezeichnet. Bei Umkreisung des Staupunktes würde man nun nach einander Gebiete $U > U_1$, $U < U_1$, $U > U_1$, $U < U_1$, ... antreffen, von welchen wir nur die vier ersten jetzt benutzen. Nach Satz IX müssen das erste und dritte Gebiet Teile eines zusammenhängenden Gebiets β_1 sein, in welchem $U > U_1$ ist, das zweite und vierte Teile eines zusammenhängenden Gebiets β_2, in welchem $U < U_1$ ist. Demnach wäre es möglich, durch den Staupunkt zwei geschlossene, nur im Staupunkt selbst sich schneidende Linien zu ziehen, deren eine ganz in β_1 verläuft, während die andere in β_2 verläuft. Das steht in Widerspruch mit der Schlichtheit bezw. Schlichtartigkeit der Fläche B, insofern als offenbar auf einer solchen Fläche zwei geschlossene Linien sich stets in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden.

Satz XIII: Die Funktion V geht bei der Annäherung an eine Begrenzung des Bereichs B stetig in einen konstanten Wert über.

Wir betrachten irgend eine Begrenzungslinie L des Bereichs B, indem wir uns denselben etwa schlicht vorstellen, vgl. die Fußnote p. 62. Wir konstruieren um L eine Folge ineinander geschachtelter geschlossener Linien L_1, L_2, L_3, ..., welche sämtlich ganz

Digitized by Google

innerhalb B verlaufen und in der Grenze jeden inneren Punkt von B ausschließen. Wir können dann in leicht verständlicher Weise setzen $L = \lim_{n=\infty} L_n$. Die Funktion V wird auf L_n ein bestimmtes Maximum M_n und ein bestimmtes Minimum m_n haben. Nach Satz VII hat man

$$M_1 > M_2 > M_3 > \cdots; \qquad m_1 < m_2 < m_3 < \cdots,$$

wobei noch stets für jeden Wert des Index n $M_n > m_n$ ist. Der Inhalt des Satzes XIII ist dann folgender:

$$\lim_{n=\infty} M_n = \lim_{n=\infty} m_n.$$

Wir nehmen zum Beweise an, es sei $\lim_{n=\infty} M_n > \lim_{n=\infty} m_n$. Bezeichnen wir den ersten limes mit V_2, den zweiten mit V_1, so ist $V_1 < V_2$. Durch das System aller in B verlaufenden Linien $V = V_1$ und $V = V_2$ wird die Fläche B nach Satz X in genau drei Stücke zerlegt. Jedes dieser Stücke stößt sowohl an 0 als auch an L an. Konstruieren wir nun in dem Gebiete $V < V_1$ eine vollständig in B verlaufende Linie, welche 0 mit L verbindet, ebenso in dem Gebiete $V > V_2$ eine Linie, welche 0 mit L verbindet, so ist offenbar (vgl. Figur 7) das Gebiet $V_1 < V < V_2$ nicht mehr zusammenhängend, was im Widerspruch steht mit Satz X.

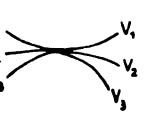


Fig. 8.

Es ist nicht notwendig, daß man zum Beweise gerade die oben angegebenen Limeswerte als Werte V_1 und V_2 benutzt, vielmehr könnte man ebenso irgend zwei Werte anstelle von V_1 und V_2 treten lassen, von welchen feststeht, daß sie noch in beliebiger Nähe der Linie L von der Funktion V angenommen werden. Diese Werte müssen nur der Bedingung genügen, von einander verschieden zu sein.

Satz XIV. Die Funktion $U+iV$ vermittelt eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche B auf einen schlichten, den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltenen Bereich S, dessen vollständige Begrenzung ganz in einem endlichen Bezirke der Ebene enthalten ist. Die einzelne Begrenzungslinie ist entweder ein zur Axe des Reellen paralleler Schlitz oder ein Punkt.

Der Beweis dieses Satzes ist mit den Sätzen XII und XIII unmittelbar gegeben.

Satz XV. Die vollständige Begrenzungsmannigfaltigkeit des Schlitzbereiches S hat den Inhalt Null,

Digitized by Google

d. h. es ist möglich, die vollständige Begrenzungsmannigfaltigkeit in endlich viele geschlossene Kurven einzuschließen, welche einen beliebig kleinen Gesamtflächeninhalt abgrenzen.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich, wenn man die Funktion U selbst, indem man dieselbe nach 0 hin willkürlich gegen Null abfallen läßt, als Variation benutzt[1]).

D. Anmerkungen.

Anmerkung 1. Ist B endlich-vielfach zusammenhängend, so folgt aus XIII sofort XII nach dem Satze von der Charakteristik des Randes.

Anmerkung 2. Faßt man im Falle unendlich hohen Zusammenhangs B als Grenze $B = \lim_{n=\infty} B_n$ von Näherungsflächen endlichen Zusammenhangs auf, so ist, wenn $U_n + iV_n$ für B_n dieselbe Bedeutung hat, welche $U+iV$ für B hat, $U+iV = \lim_{n=\infty}(U_n+iV_n)$ auf Grund pag. 338—343 meiner vierten Mitteilung. Man kann daher unter Zugrundelegung des Abschnitts B vorliegender Arbeit analog wie in der erwähnten Mitteilung die Abbildungseigenschaft der Grenzfunktion beweisen.

Anmerkung 3[2]). Die Methoden meiner vierten Mitteilung lassen sich vollständig vom Standpunkte des Dirichletschen Prinzips darstellen. Man braucht nur zu beachten, daß die Näherungsfunktion U_n, von welcher ich in dieser Mitteilung Gebrauch mache (längs der ganzen Begrenzung von B_n ist die normale Ableitung gleich Null) als Ausschnitt einer Funktion auf einer geschlossenen Fläche, nämlich der Fläche B_n als Fläche mit Vorderseite und Rückseite aufgefaßt werden kann. Der Funktion U_n hat man dabei auf der Rückseite genau dieselben Werte beizulegen wie auf der Vorderseite. Auf der erwähnten geschlossenen Fläche ist U_n allein durch seine zwei Unstetigkeiten in 0 (auf Vorderseite und Rückseite) charakterisiert. Man kann U_n auf dieser Fläche sowohl mittels der Schwarz-Neumannschen kombinatorischeu Methoden finden wie nach Hilbert mittels des Dirichletschen Prinzips. Die Randbedingung „normale Ableitung gleich Null" ist eine unmittelbare Folge der Symmetrie der Funktion inbezug auf Vorderseite und Rückseite.

1) Vgl. meine vierte Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Gött. Nachr., 1909, insbesondere pg. 353.

2) Vgl. § 13 meiner Abhandlung „über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II." Math. Ann. 1910.

Digitized by Google

Über die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen euclidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich.

Von

Ludwig Bieberbach.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 26. Februar 1910.

1. In seinem bekannten Vortrag über mathematische Probleme[1]) hat Herr Hilbert unter anderem auch auf das Problem hingewiesen, das den Gegenstand der vorliegenden Mitteilung bilden soll. Er hat hervorgehoben, daß ein für die euclidische Ebene geltender Satz von Fedorow[2]) und Schoenflies[3]) für den dreidimensionalen euclidischen Raum bewiesen worden ist, nämlich der Satz, daß es nur endlich viele Bewegungsgruppen mit endlichem Fundamentalbereich gibt. Herr Hilbert hat dort das Problem gestellt, zu untersuchen, ob ein analoger Satz auch für den n-dimensionalen euclidischen Raum gilt.

Auf Veranlassung von Herrn Hilbert habe ich im November 1908 im mathematischen Seminar der Universität Göttingen im Anschluß an die erwähnten Schoenfliesschen Arbeiten einen Vortrag über das Problem des dreidimensionalen euclidischen Raumes gehalten und mich dann auf Wunsch von Herrn Hilbert mit

1) Hilbert: Mathematische Probleme. Vortrag gehalten auf dem II. internationalen Mathematikerkongreß zu Paris 1900. Abgedruckt in den Göttinger Nachrichten 1900 pag. 253.

2) Fedorow: Symmetrie der regelmäßigen Systeme von Figuren. 1890.

3) Schoenflies: Krystallsysteme und Krystallstruktur. Leipzig 1891. In diesem Werke finden sich weitere Literaturangaben. Ich verweise wegen derselben auf dieses Buch.

Digitized by Google

der entsprechenden Frage für den n-dimensionalen euclidischen Raum befaßt. Die Resultate dieser Arbeit möchte ich im folgenden mitteilen.

2. Ich werde folgenden Satz beweisen:

Es gibt nur endlich viele Bewegungsgruppen des n-dimensionalen euclidischen Raumes, die einen endlichen Fundamentalbereich besitzen.

Dabei ist Gruppe im allgemeinen gruppentheoretischen Sinne genommen, wonach also zwei eineinstufig isomorphe Gruppen als nicht verschieden angesehen werden. Im Interesse der Einfachheit der Darstellung werde ich an einigen Stellen die Beweismethoden am Beispiel des vierdimensionalen euclidischen Raumes entwickeln, jedoch in einer Form, die die Allgemeingültigkeit erkennen läßt.

3. Bevor ich in den Beweis eintrete, will ich zunächst an einen Begriff erinnern, der für das folgende wichtig ist, nämlich an den Begriff der infinitesimalen Operation, vermittelst dessen die Forderung der Existenz eines Discontinuitätsbereiches analytisch gefaßt wird.

Es sei eine Gruppe linearer Substitutionen vorgelegt. Wir sagen in üblicher Weise die Gruppe enthält infinitesimale Operationen, wenn sich eine unendliche Folge

$$A_1, \ldots A_n \ldots$$

von Operationen der Gruppe finden läßt, derart daß sich zu jeder vorgelegten Größe ε ein Index m finden läßt, sodaß die Coeffizienten von A_m von den entsprechenden Coeffizienten der identischen Substitution um weniger als ε abweichen, ohne jedoch mit ihnen übereinzustimmen.

Ueber diese infinitesimalen Operationen gilt der folgende Satz:

Eine Bewegungsgruppe besitzt dann und nur dann einen Fundamentalbereich, wenn sie keine infinitesimalen Operationen enthält.

4. Jede Bewegung des (vierdimensionalen) euclidischen Raumes ist das Produkt einer orthogonalen Transformation positiver Determinante und einer Translation. Je nach der Wahl des Fixpunktes der orthogonalen Substitution kann diese Translation verschiedene Werte annehmen. Wir fragen danach, wann sie im besonderen ganz zum Verschwinden gebracht werden kann. Um diese Frage beantworten zu können denken wir uns die Bewegung durch eine reelle orthogonale Transformation auf die folgende Normalform gebracht

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} \cos \vartheta_1 2\pi & -\sin \vartheta_1 2\pi & 0 & 0 & T_1 \\ \sin \vartheta_1 2\pi & \cos \vartheta_1 2\pi & 0 & 0 & T_2 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta_2 . 2\pi & -\sin \vartheta_2 2\pi & T_3 \\ 0 & 0 & \sin \vartheta_2 . 2\pi & \cos \vartheta_2 2\pi & T_4 \end{vmatrix}$$

Wir schreiben dabei in üblicher Weise nur die Koeffizientenmatrix. Dieser Satz wird in der Elementarteilertheorie [1]) bewiesen. Weitere Beweise gaben Schläfli [2]) und Goursat [3]) (vierdimensionaler Fall). Ich bin selbst im Besitze eines weiteren Beweises, der von der Cayleyschen [4]) Darstellung orthogonaler Substitutionen durch schief symmetrische Determinanten ausgeht und auf der Wurzelrealität der Säkulargleichung beruht. Die Transformation kann im allgemeinen (d. h. wenn $\vartheta_1 \lesseqgtr \vartheta_2$) nur auf eine Weise geleistet werden, während es im Falle $\vartheta_1 = \vartheta_2$ unendlich viele wesentlich verschiedene Arten der Transformation auf die Normalform gibt. Wir nennen im folgenden ϑ_1 und ϑ_2 die Drehwinkel der orthogonalen Substitution.

5. Wenn nun ϑ_1 und ϑ_2 beide von Null verschieden sind, so kann man durch Ändern des Drehpunktes alle T_i zum Verschwinden bringen. Man erkennt in diesem Falle sofort, daß in einer Gruppe mit Fundamentalbereich keine solche Operation vorkommen kann, in der ϑ_1 und ϑ_2 einzeln oder zugleich irrational sind. Ist nämlich zunächst nur ein ϑ irrational, so kann man durch Potenzieren der Operation zu beliebig kleinen Drehwinkeln und damit zu infinitesimalen Operationen gelangen. Sind aber ϑ_1 und ϑ_2 beide irrational, so lehrt ein Satz von Minkowski [5]), daß man auf die gleiche Weise zu infinitesimalen Operationen gelangen kann. Nach diesem Satze kann man nämlich zwei beliebige Irrationalzahlen simultan durch rationale Brüche mit gemeinsamem Nenner beliebig nahe approximieren. Wenn aber von vornherein nur ein ϑ etwa ϑ_1 von Null verschieden ist, so kann die Operation auf die folgende Form gebracht werden:

---

1) Cf. z. B. Muth: Theorie und Anwendung der Elementarteiler (Leipzig 1899), pag. 176.

2) Schläfli: Ueber invariante Elemente einer orthogonalen Substitution etc. Crelles Journal, Bd. 65 (1866), pag. 185.

3) Goursat: Sur les substitutions orthogonales et les division régulières de l'espace. Ann. d. l'ec. norm sup. ser 3 t. 6 (1889).

4) Cayley: Sur quelques propriétés des déterminants gauches. Crelles Journal, Bd. 32 (1846); cf. auch Klein: Nichteuclidische Geometrie. Autogr. Vorlesung 1892, II, pag. 115.

5) Minkowski: Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896—1910 oder Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, pag. 8.

Digitized by Google

$$\text{(A)} \qquad \begin{vmatrix} \cos \vartheta_1 2\pi & -\sin \vartheta_1 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ \sin \vartheta_1 2\pi & \cos \vartheta_1 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T_2 \end{vmatrix}$$

6. Ich werde nun folgenden Satz beweisen:

I. Eine Bewegungsgruppe mit *endlichem* Fundamentalbereich kann keine Operation (A) enthalten in der ϑ irrational ist.

Aus dem Vorkommen einer solchen Operation werden wir nämlich schließen, daß entweder die Gruppe einen Fundamentalbereich besitzt, der sich durchs unendliche zieht, oder daß sie infinitesimale Operationen enthält.

Beim Beweise benutze ich den folgenden Satz:

II. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Operation B die Operation A in eine andere Operation der gleichen Form transformiert, besteht darin, daß B von der folgenden Form ist:

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 . 2\pi & -\sin \varphi_1 . 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 . 2\pi & \cos \varphi_1 . 2\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_2 . 2\pi & -\sin \varphi_2 . 2\pi & B_1 \\ 0 & 0 & \sin \varphi_2 . 2\pi & \cos \varphi_2 . 2\pi & B_2 \end{vmatrix}.$$

Ich bilde nun zunächst die Operation A^n. Durch Wahl von n kann ich erreichen, daß ihr Drehwinkel beliebig klein wird. Gleichzeitig wachsen aber dabei die Translationskomponenten ins unbegrenzte. Um das auszudrücken, will ich die Folge von Operationen A^n mit $A(\varepsilon)$ oder da keine Mißverständnisse möglich sind mit A_1 bezeichnen.

Ich bilde nun folgende Kette von Operationen. Zunächst definiere ich eine Operation A_0. Es muß in der Gruppe immer eine Operation A_0 geben, die nicht dieselbe Form wie A_1 besitzt. Denn anderenfalls müßte sich der Fundamentalbereich in Richtung der Ebene, die durch das Fehlen der Translationskomponente ausgezeichnet ist, durchs unendliche ziehen. Diese Operation ist dann auch nicht mit A_1 vertauschbar. Nun bilde ich

$$A_2 = A_0^{-1} A_1^{-1} A_0 A_1.$$

Nach Satz II ist dann A_2 von der Identität verschieden und besitzt auch nicht die Form von A_1. Ich bilde

$$A_3 = A_2^{-1} A_1^{-1} A_2 A_1$$

und mache denselben Schluß. So fahre ich fort. Ich behaupte, daß dies Verfahren nach endlich vielen Schritten (deren Zahl nur

Digitized by Google

von der Dimension des Raumes abhängt und sich auf Grund des erwähnten Satzes von Minkowski leicht angeben läßt), zu einer Operation A_i führt, die sich mit abnehmendem ε der Identität beliebig nähert, ohne sie jedoch zu erreichen. Man sieht das sofort ein, wenn man bemerkt, daß vom zweiten Schritte an, die Stärke, mit der sich die Koeffizienten des orthogonalen Teiles denjenigen der identischen Drehung nähern mit jedem Schritte um mindestens eine Einheit wächst, während die Stärke des Wachsens der Translationskomponente fortwährend abnimmt. Damit ist der Satz I bewiesen.

7. Ich werde nun den folgenden Satz, der sich wie Satz I in allen Beweisen des zwei- und dreidimensionalen Satzes vorfindet, allgemein beweisen.

III. Jede Bewegungsgruppe mit endlichem Fundamentalbereich enthält eine Translationsuntergruppe mit n Erzeugenden d. h. eine Translationsuntergruppe, die keinen im n-dimensionalen Raum enthaltenen linearen Raum in sich transformiert.

Man erkennt zunächst, daß es ausreicht die Existenz nur einer Translation nachzuweisen. Dies geschieht dadurch, daß man beweist:

IV. Eine Bewegungsgruppe mit endlichem Fundamentalbereich kann nicht lediglich aus orthogonalen Transformationen bestehen.

Sonach muß also mindestens eine Operation mit Translationskomponente vorkommen. Der Drehwinkel derselben muß nach Satz I rational sein. Deshalb erhält man durch Potenzieren derselben eine Translation.

8. Wenn wir die orthogonalen Bestandteile der Bewegungen unserer Gruppe allein betrachten, und auf einen gemeinsamen Drehpunkt beziehen, so erhalten wir eine der Bewegungsgruppe isomorphe Gruppe orthogonaler Operationen. Wir wollen sagen, diese orthogonale Gruppe ist der Bewegungsgruppe zugeordnet. Diese Gruppe ist notwendig endlich. Darüber hinaus kann aber noch der folgende Satz bewiesen werden:

V. Der Grad der einer Bewegungsgruppe zugeordneten Gruppe orthogonaler Substitutionen übersteigt eine nur von der Dimensionenzahl des Raumes abhängige Grenze nicht.

Dieser Satz kann direkt durch Betrachtung der Gruppen orthogonaler Transformationen bewiesen werden. Ich möchte hier

Digitized by Google

einen anderen Weg einschlagen. Man kann nämlich leicht den folgenden Satz beweisen:

VI. Jede einer Bewegungsgruppe des n-dimensionalen Raumes zugeordnete Gruppe orthogonaler Substitutionen ist einer endlichen Gruppe unimodularer ganzzahliger linearer Transformationen isomorph.

Der Beweis dieses Satzes entspringt aus dem Umstand, daß durch Ausübung der orthogonalen Transformationen unserer Gruppe auf die Translationsuntergruppe aus einem Fundamentalbereich derselben, einem sogenannten primitiven Parallelepipedon, wieder ein primitives Parallelepipedon der gleichen Gruppe entspringen muß.

Nun gilt aber der folgende Satz:

VII[1]). Jede endliche Gruppe linearer Substitutionen läßt eine positive quadratische Form ungeändert.

Nun hat aber Minkowski[2]) den folgenden Satz bewiesen:

VIII. Der Grad einer Gruppe ganzzahliger Substitutionen die eine positive quadratische Form in sich überführt, übersteigt eine nur von n abhängige Grenze nicht[3]).

Damit ist dann auch Satz V bewiesen[4]).

9. Für unsere weiteren Zwecke benötigen wir aber noch mehr.

Eine gegebene endliche Gruppe kann auf mannigfaltige Weisen durch reelle lineare Substitutionen von n-Variablen dargestellt werden. Frobenius[5]) hat zuerst bewiesen, daß es nur endlich viele inäquivalente Darstellungen einer gegebenen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen von n-Variabeln gibt. Zwei Darstellungen heißen dabei äquivalent, wenn sich eine lineare Substitution angeben läßt, durch die die beiden Darstellungen ineinander transformiert werden können. Ich will hier weitergreifend den folgenden Satz beweisen:

IX. Eine gegebene Gruppe kann nur auf endlich viele inäquivalente Weisen durch orthogonale Sub-

---

1) Loewy: Comptes rendus 1899, pag. 168; Moore: Math. Ann., Bd. 50, pag. 213.

2) Minkowski: Zur Theorie der positiven quadratischen Formen. Crelles Journal, Bd. 101.

3) Der Inhalt dieses Satzes folgt übrigens schon aus dem unter 10 erwähnten Satze von Minkowski.

4) Cf. hierzu J. Schur: Sitzungsber. der Berl. Akad. 1905, pag. 80.

5) Frobenius: Ueber die Darstellung der endl. Gruppen durch lineare Substitutionen, I und II. Sitzungsber. der Berl. Akademie 1897 und 1899.

Digitized by Google

stitutionen dargestellt werden. Dabei heißen zwei Darstellungen äquivalent, wenn sich eine reelle orthogonale Substitution angeben läßt, die die beiden Darstellungen ineinander überführt.

Dieser Satz wird bewiesen sein, wenn die folgenden Sätze bewiesen sind:

X. Jede endliche reelle Gruppe ist einer reellen orthogonalen äquivalent.

Diesen Satz haben Frobenius und J. Schur[1]) bewiesen:

XI. Wenn zwei reelle lineare Gruppen überhaupt äquivalent sind, so können sie durch eine reelle lineare Transformation ineinander übergeführt werden.

Dieser Satz ist selbstverständlich.

XII. Wenn zwei Gruppen reeller orthogonaler Substitutionen überhaupt äquivalent sind, so können sie durch eine reelle orthogonale Substitution ineinander übergeführt werden.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung eines Satzes, den zuerst Frobenius[2]) aufgestellt und bewiesen hat:

Wenn zwei orthogonale Formen äquivalent sind, so sind sie orthogonal äquivalent.

Den Beweis von Satz XII erhalte ich durch den Beweis der folgenden beiden Sätze:

XIII. Jede reelle homogene lineare Substitution läßt sich in der Form $O_1 M O_2$ darstellen, wobei O_1 und O_2 orthogonale Transformationen sind, M dagegen eine Multiplikation.

XIV. Wenn eine orthogonale Substitution durch Transformation mit einer Multiplikation wieder in eine orthogonale Substitution übergeht, so muß die Multiplikation mit derselben vertauschbar sein.

Die Richtigkeit von Satz IX kann auch aus XV gefolgert werden, wenn man beachtet, daß die orthogonale Gruppe durch Transformation aus der unimodularen ganzzahligen hervorgeht und nach XII durch sie bis auf orthogonale Transformationen bestimmt ist.

---

1) Frobenius und J. Schur: Ueber die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1906, pag. 186.

2) Frobenius: Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Crelles Journal, Bd. 84 (1878).

Digitized by Google

10. Einen dem Satz IX analogen Satz will ich nun auch für Gruppen ganzzahliger unimodularer Substitutionen beweisen.

XV. Eine gegebene Gruppe kann nur auf endlich viele inäquivalente Weisen durch ganzzahlige unimodulare Substitutionen von n Variablen dargestellt werden. Dabei heißen zwei Darstellungen äquivalent, wenn sich eine ganzzahlige unimodulare Substitution angeben läßt, die die beiden ineinander überführt.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus dem Satze von Minkowski[1]), daß der reduzierte Raum der positiven quadratischen Formen nur endlich viele Nachbarkammern besitzt.

11. Wie wir gesehen haben, ist jeder Bewegungsgruppe eine Gruppe orthogonaler Substitutionen zugeordnet. Orthogonal äquivalente orthogonale Gruppen führen zu den gleichen Bewegungsgruppen.

Durch die zugeordnete orthogonale Gruppe wird die Translationsuntergruppe in sich übergeführt. Dem Uebergang von einen primitiven Parallelepipedon zu den durch die zugeordnete orthogonale Gruppe aus diesem hervorgehenden entspricht eine unimodulare ganzzahlige Gruppe. Unimodular ganzzahlig äquivalente Gruppen unimodularer ganzzahliger Substitutionen führen auf die gleichen Bewegungsgruppen. Fassen wir alle Bewegungsgruppen, welchen die gleiche orthogonale und unimodulare ganzzahlige Gruppe zugeordnet ist, in eine Klasse zusammen, so gilt der folgende Satz:

XVI. Es gibt nur endlich viele Klassen von Bewegungsgruppen.

12. Ich betrachte eine einzelne Klasse. Die Bestimmung der Translationsuntergruppe hängt von der Auflösung eines Systemes homogener linearer Gleichungen ab, die sich aus den Angaben von 11 ergeben. Gemäß dieser Entstehungsweise sind zwei Translationsgruppen der gleichen Klasse von vornherein in völlig bestimmter Weise isomorph aufeinander bezogen.

Ich betrachte nun zwei Bewegungsgruppen der gleichen Klasse. Ich will ihre Operationen in bestimmter Weise einander zuordnen und dann untersuchen, wann durch diese Zuordnung die beiden Gruppen isomorph aufeinander bezogen sind. Dadurch werde ich auf das Schlußglied des Endlichkeitsbeweises hingeführt werden.

---

1) Minkowski: Diskontinuitätsbereich für arithmetische Aequivalenz. Crelles Journal 129 (1905).

Digitized by Google

Um die in Aussicht gestellte Zuordnung anzugeben, stelle ich mir zwei Räume vor, für jede Bewegungsgruppe einen. In jedem denke ich mir ein primitives Parallelepipedon der jedesmaligen Translationsuntergruppe, deren Kanten vermöge der eben erwähnten isomorphen Zuordnung der beiden Translationsgruppen einander zugeordnet sind. Ich fasse zwei entsprechende Ecken ins Auge. In dieselben denke ich mir die Drehpunkte der beiden den Bewegungsgruppen zugeordneten orthogonalen Gruppen verlegt. (Diese orthogonalen Gruppen stimmen für beide überein, da ja beide derselben Klasse angehören.) Die in unseren Gruppen vorkommenden „Schraubungen" gehen aus den „Drehungen" dieser zugeordneten orthogonalen Gruppe durch hintere Multiplikation mit Translationen (die der Gruppe nicht angehören) hervor. Andererseits aber gehen alle Schraubungen der Gruppe, die derselben Drehung entsprechen auseinander durch hintere Multiplikation mit Translationen der Gruppe hervor. Das führt darauf, gewisse reduzierte Schraubungen in der Gruppe zu definieren. Eine Schraubung nenne ich reduziert, wenn sie aus der zugeordneten Drehung durch hintere Multiplikation mit einer Translation hervorgeht, die im Drehpunkt beginnt und im Inneren oder auf der Oberfläche des zugrunde gelegten Parallelepipedons endigt. Zu jeder Schraubung gehört im allgemeinen eine und nur eine reduzierte Schraubung aus der sie durch hintere Multiplikation mit einer Gruppentranslation hervorgeht. Nun kann ich die in Aussicht gestellte Zuordnung der beiden Gruppen angeben.

Ich will immer diejenigen reduzierten Schraubungen einander zuordnen, die der gleichen Drehung entsprechen. Darüber hinaus sollen immer zwei Schraubungen einander zugeordnet werden, die aus zugeordneten reduzierten Schraubungen durch hintere Multiplikation mit zugeordneten Translationen hervorgehen.

Dadurch sind nun die Operationen der beiden Gruppen einander eindeutig in völlig bestimmter Weise zugeordnet.

13. Wann ist nun die so gewonnene Zuordnung der beiden Gruppen eine isomorphe Zuordnung der beiden?

Um das zu entscheiden, fasse ich zwei reduzierte Schraubungen A und B ins Auge. Ihr Produkt wird gleich dem reduzierten Produkt mal einer Gruppentranslation. Man erkennt:

XVII. Dafür daß die in 12 angegebene Zuordnung der beiden Gruppen eine isomorphe Zuordnung ist, ist notwendig und hinreichend, daß die eben defi-

Digitized by Google

nierten Gruppentranslationen für alle Produkte zugeordneter reduzierter Schraubungen immer selbst zugeordnete Translationen sind.

14. Nun können wir den Endlichkeitsbeweis zu Ende führen. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß die eben erwähnten Gruppentranslationen nur auf endlich viele verschiedene Weisen gewählt werden können. Dabei ist zu beweisen, daß diese endliche Zahl nicht von der speziellen zugrunde gelegten Translationsgruppe abhängt, sondern einzig und allein von der ganzzahligen endlichen Gruppe, durch die die Klasse bestimmt ist. Der Beweis gestaltet sich ungefähr folgendermaßen. Seien A und B die beiden reduzierten Schraubungen. Seien a, b die Translationen die bei hinterer Multiplikation die A, B zugeordneten Drehungen in A, B überführen. Es kommt alles darauf an zu zeigen, daß die Translation $B^{-1}aB$, wenn sie im oft benutzten Drehpunkt beginnt, in einem von m primitiven Parallelepipeden endigt, wobei die Zahl m und die Wahl dieser Parallelepipeda nur abhängt von der B zugeordneten ganzzahligen Substitution. Ich denke mir alle Ecken des gedrehten Parallelepipedon ausgedrückt durch die ursprünglichen Erzeugenden der Translationsgruppe. Die hierbei auftretenden Koeffizienten hängen nur von der ganzzahligen Gruppe ab. Es sei s der absolut größte hierbei auftretende Koeffizient. Dann lagere ich neben das primitive Parallelepipedon in Richtung einer Kante nach beiden Seiten je s kongruente Parallelepipeda an das erste an. An dies neue lagere ich in Richtung einer zweiten Kante nach beiden Seiten wieder je s mit diesem kongruente an. So fahre ich fort und bekomme so schließlich ein Parallelepipedon, das aus $(2s)^n$ primitiven Parallelepipeda aufgebaut ist. In diesem muß notwendig die Translation $B^{-1}aB$ endigen. Damit sind wir am Ziel unserer Betrachtungen angelangt.

15. Ich habe die Absicht in einer in einiger Zeit erscheinenden größeren Abhandlung auf die Einzelheiten der hier nur angedeuteten Beweise einzugehen. Ich werde dort auch noch einige weitergehende Sätze über Bewegungsgruppen aufstellen und beweisen. Im besonderen werde ich auch auf die Gruppen mit unendlichem Diskontinuitätsbereich und auf die Gruppen zweiter Art eingehen, d. h. auf die Gruppen, in deren zugeordneten orthogonalen Gruppen auch orthogonale Substitutionen negativer Determinante vorkommen.

Digitized by Google

Bemerkung über Oszillationstheoreme.

Aus einem Schreiben an Herrn Klein.

Von

Otto Haupt in Würzburg.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 26. Februar 1910.

Durch Ihre Arbeiten über Lamésche Funktionen und lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung[1]) haben Sie zuerst wieder die Aufmerksamkeit auf die Oszillationstheoreme gelenkt. Nun hat mich Herr Hilb im Anschlusse an die von Ihnen und ihm in letzter Zeit durchgeführten Untersuchungen aufgefordert, mittels einer von ihm gegebenen Methode die Sturmschen Sätze auf die Fälle zu übertragen, welche vermittels der Hilbertschen Theorie der linearen Integralgleichungen[2]) zugänglich sind und die von Herrn Hilbert angegebenen Randbedingungen[3]) I ... IV* als spezielle Fälle enthalten.

Sei die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\varphi(x).y=0$$

gegeben. p ist nebst seiner 1. und 2. Ableitung im ganzen Intervalle $x=0$ bis $x=1$ einschließlich der Grenzen stetig, von Null verschieden und positiv; φ sei eine im Intervalle und an den Grenzen 2mal stetig differentiierbare Funktion von x, die nie negativ wird.

Wir schreiben dann für y und dessen 1. Ableitung y' die beiden Randbedingungen vor:

---

1) Vergl. Klein, Zur Theorie der Laméschen Funktionen, Göttinger Nachr. 1890 und Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung 1890—91 und 1893—94.

2) Göttinger Nachrichten 1904, 2. Mitteilung.

3) l. c. S. 216.

Digitized by Google

$$[c_{11}y + c_{12}y']_{x=0} + [d_{11}y + d_{12}y']_{x=1} = 0,$$
$$[c_{21}y + c_{22}y']_{x=0} + [d_{21}y + d_{22}y']_{x=1} = 0.$$

Damit alle zu festen derartigen Randbedingungen gehörige Lösungen der Differentialgleichung ein orthogonales System bilden, ist notwendig und hinreichend das Bestehen der Beziehung:

$$(1) \qquad p(0).[d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}] - p(1).[c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}] = 0.$$

Man bezeichne jede einer vorgelegten Randbedingung, für die (1) erfüllt ist, genügende Lösung der Differentialgleichung als Eigenfunktion und nenne die Anzahl ihrer Nullstellen im Innern des Intervalles die zugehörige Oszillationszahl; sie soll, wie man festsetzt, um eins vermehrt werden, wenn in einem oder in beiden Randpunkten eine Nullstelle der Lösung auftritt.

Faßt man den speziellen Fall ins Auge:

$$c_{12} = c_{21} = 0, \quad d_{12} = d_{21} = 0,$$

so überzeugt man sich sofort, daß der Sturmsche Satz in seiner ursprünglichen Fasung nicht auch für die allgemeine Randbedingung gelten kann; denn die den Eigenfunktionen zugehörigen Oszillationszahlen sind im vorliegenden Falle entweder sämtlich gerade oder sämtlich ungerade.

Für den allgemeinsten Fall ergibt sich folgender Satz:

Die von Null verschiedene Oszillationszahl $2n$ steht — je nach der Art der vorliegenden Randbedingung — zur Oszillationszahl $2n+1$ (bezw. $2n-1$) in folgendem Reziprozitätsverhältnis: Gibt es zu $2n$: 0, 1 oder 2 Eigenfunktionen, so existieren zu $2n+1$ (bezw. $2n-1$) gerade 2, 1 oder 0 Eigenfunktionen.

Die schärfere Formulierung dieses Theorems würde hier zu weit führen. Die Uebertragung der Resultate auf Differentialgleichungen, die zu polaren Integralgleichungen führen, erfolgt ohne Schwierigkeit, ebenso ihre Ausdehnung auf lineare Differentialgleichungen 4. Ordnung von der Form

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \lambda\varphi(x)y = 0$$

wenigstens für eine größere Zahl von speziellen Greenschen Randbedingungen.

Würzburg, Februar 1910.

Digitized by Google

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XXIII.

W. H. Perkin jun. und **O. Wallach:**

Ueber das Δ^3-Menthenol (8) und das $\Delta^{3,8(9)}$-Menthadien.

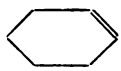
Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Dezember 1909 von O. Wallach.

Je weiter die Forschung auf dem Gebiet der hydroaromatischen Verbindungen fortgeschritten ist, umso mehr hat sich herausgestellt, wie große Schwierigkeiten es bereitet, manche Verbindungen und namentlich die ungesättigten Kohlenwasserstoffe, welche dieser Gruppe zugehören, im Zustand absoluter Reinheit und Einheitlichkeit zu isolieren. Für die chemische Charakteristik der Substanzen bildet allerdings die Anwesenheit eventuell selbst erheblicher Beimengungen oft nur ein geringfügiges Hindernis. Man kann z. B. α-Terpinen (= $\Delta^{1,3}$-p-Dihydrocymol = $\Delta^{1,3}$-Menthadien) auf Grund der Darstellung seines Nitrosits oder des oxydativen Abbaus zu $\alpha\alpha'$-Dioxy-$\alpha\alpha'$-Methyl-isoprophyl-adipinsäure jetzt mit größter Sicherheit nachweisen, obgleich es bisher noch nicht gelungen ist, den Kohlenwasserstoff rein zu isolieren. Man kann ebenso die Entstehung von Dipenten bei einer Reaktion mit Leichtigkeit erkennen, obgleich man noch keinen Weg kennt, synthetisches Dipenten ganz frei von Isomeren oder von Sauerstoff haltigen Verunreinigungen (wie Cineol) herzustellen. Höchst störend wirken aber solche schwer vermeidlichen Verunreinigungen dann, wenn es sich darum handelt, die physikalischen Eigenschaften der Substanzen fehlerfrei fest-

Digitized by Google

zulegen, um die Beziehungen aufdecken zu können, welche bei Isomeren zwischen der Bindung der Atome und dem physikalischen Verhalten bestehen. Es genügt als Beispiel an die abweichenden Beobachtungen über die Molekularrefraktion des α-Terpinens und über den Siedepunkt des synthetischen Dipentens zu erinnern.

Leichter wie für die eigentlichen Terpene und die ihnen analog gebauten Kohlenwasserstoffe gelingt eine Reindarstellung schon bei den zugehörigen Alkoholen und namentlich bei den Ketonen, sofern sie gut kristallisierbare und daher gut zu reinigende Derivate liefern, aus denen man die Muttersubstanz unverändert regenerieren kann. Die Festlegung der physikalischen Konstanten begegnet daher bei letztgenannten Körpergruppen geringeren Schwierigkeiten, wenn sie auch keineswegs immer eine ganz einfache Aufgabe ist.

Für Gewinnung zur physikalischen Untersuchung genügend reiner ungesättigter Kohlenwasserstoffe u. s. w. sind wir hauptsächlich auf den synthetischen Weg angewiesen, der ja auch nicht ohne Erfolg von verschiedenen Forschern schon beschritten ist. Daß aber auch während des Ganges scheinbar eindeutig verlaufender Synthesen mit der Möglichkeit von Atomverschiebungen gerechnet werden muß, dafür haben die neuesten Untersuchungen wieder schlagende Beispiele geliefert. Es braucht nur an den in einigen Fällen beobachteten unerwartet leichten Uebergang der Säuren vom Typus  – CHR . CO_2H in die Kohlenwasserstoffe = CHR während der bei relativ niedriger Temperatur verlaufenden Kohlensäureabspaltung erinnert zu werden [1]).

Zur Erzielung möglichst sicherer Resultate wird daher anzustreben sein, dieselbe Substanz auf verschiedenen Wegen zu erhalten und ebenso das auf demselben Wege, aber mit vielleicht etwas abweichender Arbeitsweise, von verschiedenen Forschern gewonnene Material in Bezug auf chemisches und auf physikalisches Verhalten sorgfältig zu vergleichen. Derartige Arbeit kann bei dem augenblicklichen Stand der chemischen Forschung auf dem fraglichen Gebiet für den Fortschritt unter Umständen nützlicher werden, als die Häufung von Synthesen neuer Verbindungen.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend haben wir uns zu Untersuchungen vereinigt, welche die Gewinnung einiger Verbindungen bezweckten, deren physikalische Konstanten zu kennen für die

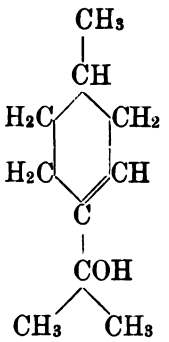
1) Wallach, Annal. **365**, 259 (1909).

Digitized by Google

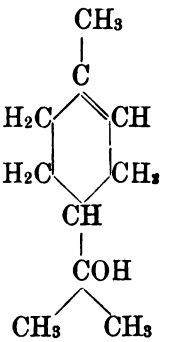
Frage nach der Abhängigkeit physikalischer Eigenschaften von der Lage der Doppelbindung bei Isomeren von Wert ist.

Es handelt sich in der folgenden Mitteilung namentlich um eine genaue Charakteristik des Δ^3-Menthenol (8), welches aus verschiedenem Ausgangsmaterial, einerseits von W. H. Perkin, andererseits von Wallach dargestellt worden ist, ferner um Zwischenprodukte, durch welche die Darstellung hindurchführt und dann namentlich um die Eigenschaften des aus dem isomeren Terpineol gewinnbaren $\Delta^{3,8(9)}$-p-Menthadien.

Das Δ^3-Menthenol (8) unterscheidet sich vom lange bekannten α-Terpineol durch die Lage der Aethylenbindung:

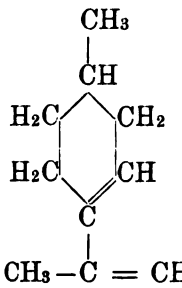


Δ^3-Menthenol (8)

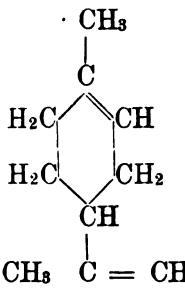


α-Terpineol = Δ^1-Menthenol (8)

Das $\Delta^{3,8(9)}$-Menthadien unterscheidet sich entsprechend vom Limonen (Dipenten):



$\Delta^{3,8(9)}$-Menthadien



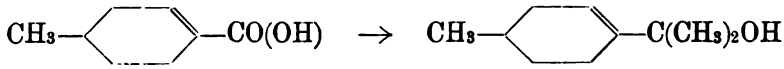
$\Delta^{1,8(9)}$-Menthadien = Limonen.

Im ersten Kohlenwasserstoff liegen die Doppelbindungen konjugiert und infolgedessen wird man nach jetziger Ansicht bei ihm eine Abweichung hinsichtlich der Molukarrefraktion gegenüber dem Limonen erwarten dürfen.

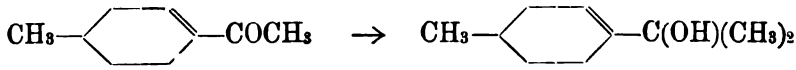
Die verschiedenen Wege, welche zur Gewinnung des Alkohols $C_{10}H_{17}OH$ eingeschlagen wurden, sind folgende:

Digitized by Google

W. H. Perkin und Pickles[1]) gingen von der Δ^3-Tetrahydro-p-Toluylsäure aus und verwirklichten den Vorgang:

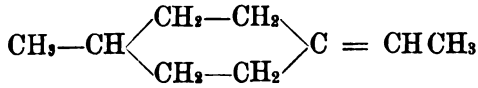


Wallach[2]) synthetisierte das Δ^3-Tetrahydro-p-acetyltoluol und wandelte dieses mit Hülfe der Grignardschen Reaktion ab:

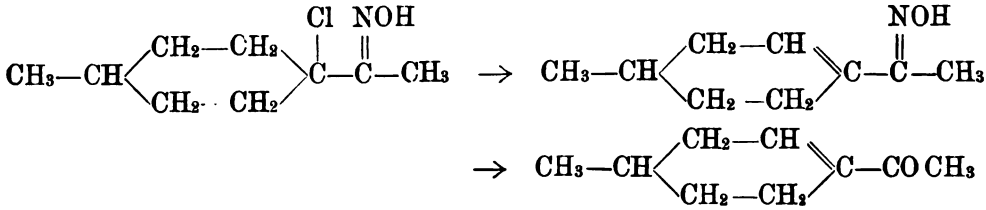


Δ^3-Tetrahydro-p-acetyltoluol.

Zu dieser Verbindung kann man bekanntlich gelangen, indem man von dem semicyclischen Kohlenwasserstoff



ausgeht[3]), von diesem das Nitrosylchlorid-Additionsprodukt herstellt, daraus Salzsäure abspaltet und das entstandene Oxim mit Säuren zerlegt. Folgende Formelbilder machen den Vorgang deutlich:



Unter welchen Bedingungen der semicyclische Kohlenwasserstoff Bindungsverschiebungen erleidet, wird bei anderer Gelegenheit erörtert werden. Seine Darstellung in größerem Maßstabe hat es ermöglicht, das Vorkommen einiger raumisomeren Formen bei seinen Derivaten festzustellen, auf welche kurz aufmerksam gemacht werden soll. Das in vorzüglicher Ausbeute erhältliche Nitrosochlorid-Additionsprodukt läßt sich durch fortgesetzte fraktionierte Kristallisation aus Aceton[4]) in zwei verschiedene Bestand-

1) Journ. chem. Soc. **1905**, 639.

2) Anal. d. Chem. **365**, 272 (1909).

3) Wallach, Annal. **360**, 52 (1908); **365**, 271 (1909).

4) Ueber die Zweckmäßigkeit der Verwendung von Aceton bei der Kristallisation von Nitrosochloriden und ähnlichen Verbindungen s. Wallach, Terpene und Kampfer, S. 65 und Annal. **336**, 43 (1904).

Digitized by Google

teile zerlegen. Der schwerer lösliche bildet Nadeln vom Schmelzpunkt 117—118°, der leichter lösliche dicke durchsichtige Kristallplatten vom Schmelzpunkt 113—114°[1]). Beide Modifikationen sind mit Wasserdampf ziemlich leicht flüchtig und lassen sich auf diesem Wege nicht trennen.

Bei der vorsichtigen Umsetzung mit Piperidin erhält man aus dem höher schmelzenden Nitrosochlorid ein Nitrolpiperidid vom Schmelzpunkt 130—131°, aus dem niedriger schmelzenden ein Nitrolpiperidid vom Schmelzpunkt 119—120°. Man kann nun beobachten, daß das einmal geschmolzene und dann wieder erstarrte, ursprünglich bei 119—120° schmelzende Nitrolpiperidid seinen Schmelzpunkt erhöht. Schmilzt man nun eine etwas größere Menge der Base vom Schmelzpunkt 119—120° im Reagensrohr, so tritt starker Piperidingeruch auf. Es tritt also partielle Zersetzung in dem bekannten Sinne (unter Oximbildung) ein[2]). Der Schmelzfluß erstarrt erst nach längerer Zeit wieder. Kristallisiert man die abgepreßten Kristalle nun um, so schmelzen sie bei 130—131°.

Die beiden Nitrolpiperidide lassen sich also in einander überführen. Das erklärt auch, warum sie bei der Umsetzung der isomeren Nitrosochloride gelegentlich gleichzeitig entstehen und man dann ein unscharf oder niedriger schmelzendes Produkt erhält. Uebrigens kristallisieren beide Modifikationen aus Methylalkohol so ähnlich, daß man sie durch die Form der Ausscheidung nicht wohl unterscheiden kann.

Daß es sich hier nur um räumliche und nicht um chemische Isomerie handelt, geht nun auch daraus hervor, daß die beiden Nitrosochloride bei der Salzsäureabspaltung dasselbe Oxim liefern.

Man darf zur Ueberführung in das Oxim also unbedenklich das Nitrosochlorid-Gemisch verwenden, falls man von einigermaßen einheitlichem Kohlenwasserstoff ausgegangen ist. Was zweckmäßig vermieden wird, ist aber die Anwendung von Natriummethylat für die Salzsäureentziehung. So gute Dienste dies Agens gelegentlich auch leisten kann und bekanntlich auch geleistet hat, so ist seine Verwendung namentlich wo es sich um Auffindung etwaiger isomerer Oxim-Formen handelt, deshalb zu beanstanden, weil immer die Möglichkeit gegeben ist, daß sich nur ein Teil des Nitrosochlorids in gewünschtem Sinne zerlegt, ein anderer

---

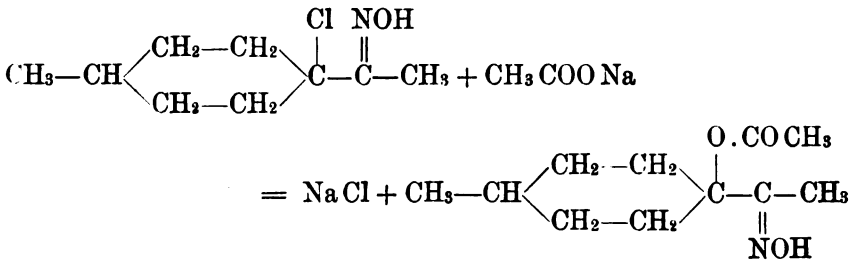
1) Für das noch nicht getrennte Nitrosochlorid-Gemisch wurde früher der Schmelzpunkt 108—110° gefunden.

2) Wallach, Terpene und Kampfer S. 80.

Digitized by Google

Teil Chlor gegen Methoxyl (OCH_3) austauscht. Beimengungen solcher oft recht beständiger Methoxyl-Verbindungen zum Oxim können aber zu irrtümlichen Feststellungen hinsichtlich der Eigenschaften der Oxime führen[1]).

Zu den schon recht zahlreichen Beispielen der Entstehung von Methoxyl-oximen[2]) hat Deussen[3]) letzthin noch einige neue beigebracht. Zur Salzsäureabspaltung wurde im vorliegenden Fall daher ausschließlich die bequeme Natriumacetatmethode[4]) verwendet, die auch vortreffliche Resultate gab. Jedoch wurde bei dieser Gelegenheit zum ersten Mal die Erfahrung gemacht, daß auch bei Anwendung dieser Methode ein relativ beständiges Zwischenprodukt auftreten kann, dessen Bildung ganz analog wie bei den eben erwähnten Methoxylverbindungen, durch Austausch von Chlor gegen die Essigsäure-Gruppe bedingt ist. Die Reaktion erfolgt also in dem Sinne:



Der so entstandene Essigsäureester eines Ketoximalkohols ist in diesem Fall gut kristallisiert, spaltet aber bei der trockenen Destillation Essigsäure ab und liefert das gewünschte ungesättigte Oxim (s. oben). Auf diese Weise kann man die Verbindung, deren Anwesenheit sonst störend für die Gewinnung der weiteren Produkte sein würde, eliminieren.

Am besten destilliert man das bei der Umsetzung des Nitrosochlorids mit Natriumacetat entstandene Produkt zunächst im Vakuum, dann im Eikolben bei gewöhnlichem Druck und kristallisiert das leicht erstarrende Oxim aus Methylalkohol um. Wie früher schon angegeben wurde[5]), schmilzt das Oxim bei 116—117°.

Hat man die ersterwähnte Acetoxyl-Verbindung, welche in ganz reinem Zustand bei 111—112° schmelzende, durchsichtige,

1) Ueber ein Beispiel s. Annal. **359**, 303.
2) Wallach, Terpene und Kampfer S. 82; Annal. **359**, 301.
3) Annal. **369**, 62 (1909).
4) Wallach, Terpene und Kampfer S. 86.
5) Wallach, Annal. **365**, 272 (1909).

Digitized by Google

große Kristalle bildet, aus dem Oxim nicht vor dem Umkristallisieren vollständig entfernt, so erhält man aus den Mutterlaugen Anteile, welche bei etwa 85° schmelzen und aus einem Gemenge des Oxims mit der Acetoxyl-Verbindung bestehen. Dies Gemenge ist in Methylalkohol viel löslicher als die Komponenten und nur durch langwierige Kristallisationen zu trennen. Von der Acetoxylverbindung soll bei anderer Gelegenheit noch weiter die Rede sein.

Um zu dem reinen Δ^3-Tetrahydro-p-Acetyltoluol zu gelangen, wurde das in genügender Menge bereitete bei 116—117° schmelzende reine Oxim zunächst durch Erwärmen mit verdünnter Schwefelsäure und darauf folgender Destillation mit Wasserdampf zerlegt. Ein so gewonnenes Präparat ist aber nie ganz rein, sondern enthält etwas Oxim, das sich der Hydrolyse entzieht und mit den Ketondämpfen übergeht. Es gilt das übrigens, wie bei der Gelegenheit ein für alle Mal bemerkt sein mag, für alle ähnliche Fälle, wo es sich um Isolierung eines wirklich reinen Ketons handelt. Man muß das mit Wasserdämpfen überdestillierte Keton nochmals an Semicarbazid binden und das umkristallisierte Semicarbazon, das in diesem Fall, wie früher schon angegeben wurde, bei 222° schmilzt, wiederum mit Schwefelsäure oder Oxalsäure zerlegen. Das so bereitete, getrocknete und bei gewöhnlichem Druck konstant siedende Keton zeigte folgende Eigenschaften[1]):

Siedepunkt 210—211°, $d_{20} = 0.942$, $n_D = 1.4830$ bei 20°

Berechnet für $C_9H_{14}O$ F	Gefunden
M = 41.22	41.84

Bei starkem Abkühlen erstarrt das Keton zu einer schön kristallinischen Masse, die bei etwa $-20°$ wieder schmilzt, in Wasser ist es ziemlich löslich, der Geruch ist anisartig.

0.1703 Gramm gaben 0.4887 CO_2 und 0.1581 H_2O

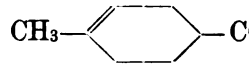
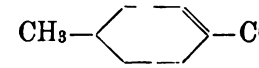
Berechnet für $C_9H_{14}O$	Gefunden
C 78.18	78.27
H 10.24	10.41

Es ist nun von Interesse, das Δ^3-Tetrahydroacetyltoluol mit dem Δ^1-Tetrahydroacetyltoluol zu vergleichen, welches durch Abbau von β-Terpineol (Smp. 32°) gewonnen werden kann[2]), denn es handelt sich hier um Verbindungen, die sich nur durch die Lage der Aethylenbindung unterscheiden. Folgende Tabelle gibt über die Unterschiede Auskunft:

1) Vgl. auch Annal. **360**, 53—54; (1908); **365**, 269 (1909).

2) Annal. **324**, 89.

Digitized by Google

	Δ^1-Tetrahydro-p-Acetyltoluol		Δ^3-Tetrahydro-p-Acetyltoluol
			
Siedepunkt	= 205—206°		210—211°
d	= 0.940		0.942
n_D	= 1.4719		1.4830
M	= 41.10	(ber. 41.22)	41.84
Smp. des Oxims	51°		116—117°
„ „ Semicarbazons	165°		222°

Die Unterschiede, welche beide Ketone im physikalischen Verhalten aufweisen, stehen in guter Uebereinstimmung mit Regeln, welche auf Grund des von ihnen untersuchten Materials, kürzlich K. Auwers und F. v. d. Heyden[1]) abgeleitet und in folgenden Satz gefaßt haben:

„Tritt eine ursprünglich entferntere Doppelbindung des Ringes in konjugierte Lage zur doppelten Bindung des Carbonyls, so steigen Siedepunkt, Dichte, Brechungsvermögen".

Wobei für unseren Fall die Aenderung bezüglich des Brechungsvermögens am deutlichsten in die Erscheinung tritt.

Δ^3-p-Menthenol (8) aus Δ^3-Tetrahydro-p-Acetyltoluol.

Zur Ueberführung des Ketons in den tertiären Alkohol wurden folgende Versuchsbedingungen eingehalten.

Je 20 Gramm Keton wurden in 60 ccm trockenem Aether gelöst und zu einer Grignard-Lösung zufließen gelassen, die durch Erwärmen von 6 gr Magnesium, 36 gr Jodmethyl und 110 ccm absolutem Aether bereitet war. Nachdem alles Keton eingetragen war, wurde das Gemisch noch 2 Stunden auf dem Wasserbad erwärmt. Dann wurde das Reaktionsprodukt mit Wasser versetzt und (ohne vorherigen Zusatz von Säure) der Dampfdestillation unterworfen. Nachdem der Aether übergegangen ist, wechselt man die Vorlage: Das nun übergehende Δ^3-Menthenol erstarrt gewöhnlich schon im Kühlrohr und in der Vorlage. Wenn er jedoch, selbst nur geringfügige, Verunreinigungen enthält, bleibt er flüssig.

0.1560 gr gaben 0.4462 CO_2 und 0.1632 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{18}O$	Gefunden
C 77.84	78.00
H 11.74	11.70

1) Ber. chem. Ges. 42, 2406 (1909).

Digitized by Google

Für das reine, leicht erstarrende Δ^3-Menthenol (8) wurden folgende Eigenschaften festgestellt: Siedepunkt 97° unter 14 mm, 205° unter gewöhnlichem Druck unter geringer Zersetzung. Schmelzpunkt 39°. Einmal geschmolzen kann das Präparat (ähnlich wie α-Terpineol) lange Zeit in überschmolzenem Zustand verharren, was die Feststellung der sonstigen Konstanten erleichtert. Gefunden wurde

$$d_{18} = 0.921,\ n_D = 1.4769 \text{ bei } 18^0$$

Berechnet für $C_{10}H_{17}OH$	Gefunden
M = 47.16	47.19

Das Präparat zeichnet sich durch einen starken, sehr angenehmen, dem α-Terpineol ähnlichen Geruch aus. In Berührung mit Säuren spaltet es mit außerordentlicher Leichtigkeit Wasser ab, unter Bildung von p-Menthadien (s. unten).

Mit Nitrosylchlorid gibt das Δ^3-p-Menthenol keine feste Verbindung, dagegen vereinigt es sich sehr leicht mit Carbanil zu dem Phenylurethan $C_{10}H_{17}OCONHC_6H_5$, welches nach dem Umkristallisieren aus Methylalkohol bei langsamem Erhitzen bei 128° unter Zersetzung schmilzt.

0.1335 gr gaben 0.3609 CO_2 und 0.1007 H_2O

Berechnet für $C_{17}H_{23}O_2N$	Gefunden
C 74.65	74.74
H 8.50	8.57

Δ^3-p-Menthenol aus Tetrahydro-p-toluylsäure.

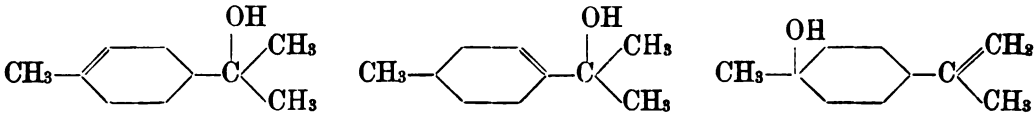
Die Darstellung des Alkohols auf diesem Wege ist schon von W. H. Perkin und S. S. Pickles[1]) früher beschrieben. Die damals ermittelten Eigenschaften[2]) des Δ^3-p-Menthenols weichen nur unbedeutend von den oben beschriebenen ab. Der Schmelzpunkt wurde zu 38—40° gefunden, der Siedepunkt unter 14 mm bei 102°. Die Verbindung ist jetzt noch einmal von W. H. Perkin nach dieser Methode bereitet, um sie direkt mit dem auf dem vorher beschriebenen, anderen Wege dargestellten Terpineol $C_{10}H_{17}OH$ vergleichen zu können. Die vollkommene Identität konnte dadurch erwiesen werden, daß ein Gemisch beider Substanzen keine Schmelzpunktsdepression zeigte.

Von besonderem Interesse ist es, die Konstanten des Δ^3-p-Menthenols mit denen der Bindungs- und Stellungs-Isomeren zu vergleichen, namentlich mit den eigentlichen Terpineolen. Es ergibt sich:

1) Journ. Chem. Soc. **1906**, 647.
2) l. c. S. 647, 648, 851.

Digitized by Google

Δ^1-p-Menthenol (8) (α-Terpineol) | Δ^3-p-Menthenol (8) | $\Delta^{8(9)}$-p-Menthenol (1) (β-Terpineol)

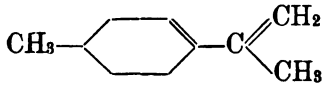


Siedep.	218°	205°	209—210°
Schmelzp.	35°	39°	32°
d_{20}	0.938	0.921	0.919
n_D	1.4820	1.4764	1.4747
Schmelzp. des Phenylurethans	113°	128°	85°

Diese Uebersicht läßt einige sehr auffallende Erscheinungen hervortreten. Ganz im Gegensatz zu den Ketonen (s. oben) fällt nämlich mit dem Näherrücken der Aethylenbindung zum sauerstoffhaltigen Radikal (bei den direkt vergleichbaren Verbindungen) Siedepunkt, Dichte und Brechungsexponent ganz merklich, während der Schmelzpunkt ansteigt.

Es wird zu untersuchen sein, ob in anderen Reihen sich ähnliche Verhältnisse finden und ob man es also hier mit einer Gesetzmäßigkeit zu tun hat, die sich in Zweifelfällen für Konstitutionsbestimmungen verwerten läßt.

$\Delta^{3,8(9)}$-p-Menthadien.



Das Δ^3-p-Menthenol (8) spaltet, wie schon bemerkt wurde, mit außerordentlicher Leichtigkeit Wasser ab, nicht nur beim Erwärmen mit Wasser bindenden Mitteln, wie Kaliumbisulfat, sondern schon unter den Bedingungen, unter denen α-Terpineol unter Wasseraddition in Terpin übergeht. Schüttelt man z. B. den tertiären Alkohol mit 1%iger Schwefelsäure einige Tage auf der Schüttelmaschine, so liefert er $C_{10}H_{16}$. Dasselbe findet statt, wenn man das Menthenol mit 5%iger 80° warmer Oxalsäurelösung umschüttelt.

Der auf den letzterwähnten Wegen gewonnene Kohlenwasserstoff wurde in üblicher Weise durch Destillation mit Wasserdampf gereinigt und dann zur Entfernung unveränderten Alkohols mehrfach über metallischem Natrium fraktioniert. Die Analyse dieses Präparats ergab:

Digitized by Google

0.1202 gr gaben 0.3882 CO_2 und 0.1314 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{16}$	Gefunden
C 88.13	88.08
H 11.87	12.25

Aus dem Kohlenwasserstoff konnten weder durch Wechselwirkung mit Brom, noch mit Nitrosylchlorid, noch mit Stickoxyden, noch mit Halogenwasserstoffsäuren feste Verbindungen erhalten werden [1]). Der im Geruch von Limonen kaum zu unterscheidende, auf dem letzterwähnten Wege erhaltene Kohlenwasserstoff zeigte folgende Konstanten:

Siedepunkt 184—185°, $d_{19} = 0{,}858$, $n_D = 1.4924$ bei 19°

Berechnet für $C_{10}H_{16}F^2$	Gefunden
M 45.24	46.02

Die Konstitution des Kohlenwasserstoffs wurde durch den oxydativen Abbau mit 1%iger Permanganatlösung sicher gestellt. Als Produkt der in bekannter Weise bei 0° ausgeführten Operation wurde in guter Ausbeute eine feste Säure erhalten, die nach dem Umkrystallisieren aus Benzol unter Zusatz von Ligroïn bei 94—96° schmolz. Das Silbersalz kam zur Analyse:

0.1270 gr gaben 0.0730 Ag.

Berechnet für $C_7H_{10}O_4$ Ag.	Gefunden
Ag. 57.85	57.48

Es ist daher nicht zweifelhaft, daß man es mit inaktiver β-Methyladipinsäure zu tun hat, deren Bildung aus dem Kohlenwasserstoff mit der Bindung Δ^8 im Ring sich gut erklärt, während bei keiner anderen Lage der Bindung im Ring die Entstehung von β-Methyladipinsäure möglich ist. Ebenso wenig könnte sich diese Säure bilden, wenn sich beide Aethylenbindungen im Ring befänden.

Der auf dem eben angegebenen Wege erhaltene Kohlenwasserstoff weist für ein Terpen der Limonenreihe auffallend hohen Siedepunkt, hohe Dichte und hohes Brechungsvermögen auf, Eigenschaften, die sich aber durch die konjugierte Lage der Aethylenbindungen erklären würden.

W. H. Perkin hat nun schon früher [2]) aus dem aktiven Δ^3-Menthenol (8) beim Erwärmen mit Magnesiumjodmethyl ein Menthadien erhalten, das ähnliche Eigenschaften aufwies, nämlich den Siedepunkt 184° unter 748 mm und $d_{25} = 0.8574$. Dagegen

1) Vergl. Perkin und Pickles, Journ. Chem. Soc. **1906**, 648.

2) Journ. chem. Soc. **1906**, 848.

Digitized by Google

hatte ein aus dem inaktiven Δ^3-Menthenol (8) entsprechend dargestellter Kohlenwasserstoff zwar denselben Siedepunkt, aber $d_{20} = 0.83579$ gezeigt [1]).

Da s. Z. nur kleine Mengen der letzteren Substanz zur Verfügung standen, konnte die Abweichung bezüglich der Dichte durch Anwesenheit geringer Verunreinigungen bedingt sein. Da die Sicherstellung der physikalischen Konstanten gerade in diesem Fall nun von besonderer Wichtigkeit ist, so ist der mühevolle Weg, den Kohlenwasserstoff nach dem Perkin'schen Verfahren in größerer Menge darzustellen, noch einmal beschritten. Aus einer sehr erheblichen Menge Ausgangsmaterial wurden mehr als 40 ccm inaktives $\Delta^{3,8(9)}$-Menthadiën dargestellt und durch mehrfache Rectifikation über Natrium [2]) daraus in der Hauptmenge ein Präparat von folgenden Eigenschaften gewonnen:

Siedepunkt 184—188°, $d_{20} = 0.8600$, $n_D = 1.4915$ bei 20°,
daraus M = 54.84.

Vergleicht man die auf verschiedenen Wegen von verschiedenen Experimentatoren hergestellten Präparate von $\Delta^{3,8(9)}$-Menthadien, so ergibt sich eine so große Uebereinstimmung, daß man nicht daran zweifeln kann, daß der Kohlenwasserstoff jetzt richtig charakterisiert ist. Gefunden wurde für Präparate verschiedener Herkunft:

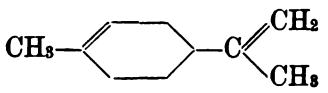
Siedepunkt	d	n_D	M
184—185°	0.858	1.4924	46.02
184—188°	0.860	1.4915	45.84

Berechnet für $C_{10}H_{16}$: 45.24.

Dagegen zeigt Limonen:

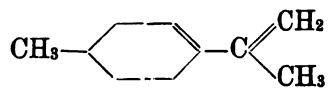
Siedepunkt	d	n_D	M
175—176°	0.846	1.4746	45.23

Es ergibt sich demnach aus einem Vergleich der Formeln für



Limonen

und



$\Delta^{3,8(9)}$-Menthadien

daß das Näherrücken der Aethylenbindung im Ring zu der Aethylenbindung in der Seitenkette eine erhebliche Steigerung des Siedepunkts bewirkt und daß ebenso die Dichte und der Brechungsexponent wächst.

1) Journ. chem. Soc. **1906**, 850.

2) Der an sich sehr veränderliche Kohlenwasserstoff wird übrigens bei der Destillation über Natrium bei gewöhnlichem Drucke etwas angegriffen.

Digitized by Google

Die Veränderungen der Konstanten bei den Kohlenwasserstoffen bewegen sich also in ganz entsprechendem Sinne, wie es oben für die Ketone hervorgehoben worden ist.

Die hier gemachten Feststellungen sind übrigens geeignet, auf die Ursache für die so oft beobachtete Tatsache einiges Licht zu werfen, warum bei der synthetischen Darstellung von inaktivem Limonen (Dipenten) gewöhnlich Präparate entstehen, welche höher als Dipenten siedende Anteile enthalten, die aber nicht Terpinolen sind [1]). Man wird jetzt die Annahme nicht von der Hand weisen können, daß diese Erscheinung wahrscheinlich darin begründet ist, daß Limonen (Dipenten) sich unter bestimmten Bedingungen in dem Sinne teilweise isomerisieren kann, daß die Aethylenbindung von Δ' sich nach der die zweite Aethylenbindung enthaltenden Seitenkette hin verschiebt. Da charakteristische Reaktionen für das $\Delta^{2,8(9)}$- und $\Delta^{3,8(9)}$-Menthadien noch nicht bekannt sind, so ist der direkte Nachweis ihres etwaigen Vorhandenseins in den betreffenden Präparaten vorläufig noch nicht zu führen.

1) Wallach, Ber. chem. Ges. **40**, 606 (**1907**).

Göttingen und Manchester 1909.

Digitized by Google

Digitized by Google

Die Aerologischen Ergebnisse im Jahre 1909

am Samoa-Observatorium

der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Von

Dr. **Kurt Wegener.**

Vorgelegt von Herrn H. Wagner in der Sitzung vom 12. März 1910.

Vorbemerkungen.

Technisches. Die Hauptaufgaben des Samoa-Observatoriums sind magnetischer und seismischer Art.

So liegt es auf der Hand, daß die aerologische Forschung im Jahre 1909 nur in primitiver Form betrieben werden konnte. Die Drachenaufstiege erfolgten mit einer Handwinde; zur Verfügung standen nur 3—4 Drachen [2 Köppen'sche, 1 x-Drachen], da das ältere Material durch Gebrauch deformiert und unzuverlässig war.

Zum Anvisieren von Pilotballons, die zur Bestimmung von Windrichtung und Stärke in der Höhe dienen sollten, kam es nur 2mal im Anfang 1909. Von 8 aus vergangenen Jahren noch vorhandenen Ballons konnten nämlich nur 2 überhaupt gefüllt werden, und auch diese wurden während des Aufstiegs offenkundig undicht, so daß ihre Resultate wertlos sind. Vermutlich hatten die Ballons zu lange unbenutzt gelegen. Der Gummi verträgt hohe Temperaturen nur kurze Zeit.

Die geringen, für die Füllung der Pilotballons erforderlichen Gasmengen wurden mit einem Calciumhydrür-Apparat erzeugt. Das Verfahren besteht darin, daß Calciumhydrür in Wasser geworfen wird, und unmittelbar ein ziemlich reines Wasserstoffgas erzeugt. Nachdem wir bemerkt hatten, daß viel frisches Wasser

Digitized by Google

erforderlich war, ging die Füllung leidlich sparsam und gut von statten.

Später wurde ein Versuch mit Fesselballons nach dem Muster des Kgl. Preuß. Aeronaut. Observatoriums in Lindenberg gemacht.

Die Verbindung Samoa's mit der Außenwelt wird nur durch eine englische Dampferlinie hergestellt, die für den Transport von Gasflaschen, wegen der angeblichen Gefährlichkeit derselben, so ungeheuerliche Summen forderte, daß eine Anwendung dieser Füllungsmethode ausgeschlossen war. Daher wurde versuchsweise der Wasserstoff aus Schwefelsäure und Eisen hergestellt. Auch hier ließen die unerhört hohen Transportkosten für die Schwefelsäure eine Wiederholung des Versuches von vornherein nicht ratsam erscheinen. Die Füllung selbst wurde im Jahre 1909 3mal versucht, und mißlang eben so oft.

Beim 3. Mal — 11. bis 12. Dezember — dauerte sie zwar nur noch 48 Stunden, aber das Gas war doch so unrein, daß der Ballon nicht stieg.

Das Blei, mit dem die Fässer ausgeschlagen waren, war von einer deutschen Firma in Samoa bezogen, aber australischer Herkunft, und so stark mit andern Metallen verunreinigt, daß es nach jedem Füllungsversuch von der Schwefelsäure durchgefressen war und erneuert werden mußte.

So blieb denn nichts übrig, als die Methode, die in Lindenberg so große Erfolge gebracht hatte, einstweilen bei Seite zu legen.

Der Betrieb der Handwinde machte nach einigen maschinellen Änderungen keine Beschwerden. Die Aufstiege wurden am Nord-Strande der Halbinsel Mulinúu ausgeführt, wo der frische Passat die Unannehmlichkeiten der Sonnenstrahlung verminderte. Der Strand ist nur schmal, und wenn wir bei Niedrigwasser, möglichst weit ab von den Palmen am Ufer, den Aufstieg begannen, kam es wohl öfters vor, daß wir ihn erst bei Hochwasser, bis an den Leib im Wasser stehend, beendeten. Aber das bedeutete keine große Erschwerung, da die Temperatur des Seewassers in Samoa sehr angenehm ist. Bei Regenwetter bauten unsre samoanischen Hülfskräfte sogar absichtlich die Winde von vornherein im Wasser auf: wenn dann eine Regenböe kam, brauchten sie nicht frierend und zähneklappend den kalten Regen auf ihre nur mäßig bekleideten Körper klatschen zu lassen, sondern sie duckten sich dann in die warme See, so daß nur die Köpfe dem Regen ausgesetzt waren.

Von einem Motor zum Aufwickeln des Drahtes hätten wir nur wenig Vorteil gehabt. Die Arbeitsleistung der Samoaner ist zu-

Digitized by Google

verlässiger als die eines Motors. Auch hätte niemand ein Interesse gehabt, den Motor in Stand zu halten, und so wäre er wohl jedesmal bei Beginn des Aufstiegs an irgend einem Punkte reparaturbedürftig gewesen.

Einen erheblichen Vorteil muß man sich hingegen auch in Samoa von einem größeren zweckmäßig gebauten Motorboot versprechen. Die Lagune bietet bei Hochwasser, also 2mal täglich auf je ca. 3 Stunden, eine ausgezeichnete, von Seegang freie Wasserfläche dar, die zum Hochwerfen der Drachen sicherlich ausgenutzt werden könnte. Dazu kämen die Erleichterungen bei einer Drachenjagd, ferner die Möglichkeit, durch Kuppeln des Motors mit der Winde den Drachendraht durch ersteren aufzuwickeln, und endlich die Aussicht, an andre Stellen der Insel zu gehen und so von dem in den untersten Schichten sicherlich stark lokal beeinflußten Apia freizukommen.

Ein $5^1/_2$pferdiges Motorboot, das ich mir zu Versuchszwecken schließlich persönlich anschaffte, erwies sich — meine Mittel reichten nicht weiter — als zu klein, so daß man die Winde nicht ohne Gefährdung hineinsetzen konnte. Die Versuche sind aber noch nicht abgeschlossen. Es wird für das nächste Jahr geplant, den Motor in ein größeres Segelboot einzusetzen, das im Jahre 1909 zu Kartographierungs-Arbeiten gebraucht wurde, und auf dem die Drachenwinde mehr Platz hat. Das Segelboot wurde bereits wiederholt bei auflandigem Wind für aerologische Zwecke benutzt. Die Winde wurde dann daraufgesetzt, und das Boot draußen verankert. Nun wurde ein kleines Boot, mit einem Mann darinnen, der den Drachen trug, treiben gelassen, bis ein Auflassen des Drachens ratsam schien. Dann bremste man an der Winde, der Draht straffte sich, und der Mann im Beiboot ließ den Drachen hoch.

Die Instrumente. Als Instrumente wurden die beiden billigen Bosch'schen Drachenapparate 304 und 305 benutzt; sie boten keinen Anlaß zu Klagen; 305 muß ein ausgezeichnetes Uhrwerk besitzen, da er dreimal in die See gefallen ist, ohne Schaden zu nehmen[1]). Dagegen sind die beiden alten Marvin-Apparate wohl als verbraucht zu betrachten. Sehr rasch hintereinander wurden alle Bourdongefäße und Röhren defekt. Ersatz wurde nur für 1 Instrument beschafft. Auch die Uhren mußten erneuert werden. Die Neuanschaffung, eine verbesserte Uhr von Bunge, Berlin, versagte aber in dem feuchten Klima. Endlich bekam die

1) Es wurde jedesmal sogleich mit Benzin gereinigt und in Öl gelegt.

Digitized by Google

Hebelübertragung des Apparates starke Reibung und Luft, so daß die Kurven unzuverlässig wurden. Die Reparaturen an den Marvin-Apparaten kosteten mehr wie ein neuer Bosch-Apparat und waren erfolglos.

Zwei Konstantenbestimmungen an den Bosch-Instrumenten im Laufe des Jahres 1909 ergaben keine Änderung. Im Übrigen wird eine aufmerksame Betrachtung der beobachteten Zustandskurven die gleichen Dienste tun können wie eine Konstantenbestimmung im Laboratorium.

Die Ergebnisse. Die Resultate der Aufstiege sind in der von Herrn Aßmann eingeführten Form mitgeteilt, unter Fortlassung des Luftdruckes, der hier in den Tropen wegen seiner Konstanz am Erdboden fast ausschließlich die Bedeutung eines Hülfsmittels zur Berechnung der Höhe besitzt.

Für die Höhenberechnung aus Luftdruck und Temperatur wurde die Jordan'sche Höhentafel benutzt, sowie die nach dieser berechnete Tabelle für 500 m-Stufen in „Ergebnisse d. Arbeiten d. Kgl. Pr. Aeronaut. Observat. b. Lindenberg, i. J. 1905“ (Braunschweig, Vieweg und Sohn).

Um den Fehler, der durch die Annahme einer mittleren Temperatur der Luftsäule entsteht, zu verkleinern, wurde, wie üblich, die Höhe stufenweise berechnet.

Jordan's Tafeln gelten für 50° Nordbreite. Samoa liegt auf 14° Südbreite. Es mußte daher der veränderten Schwere Rechnung getragen werden. Die geringere Schwere in Apia wird auf die Berechnung der Höhe ebenso wirken wie eine Erhöhung der Lufttemperatur. Es sei hierüber auf die eingehenden Erörterungen Hann's in seinem Lehrbuche, V. Buch, 7. Kapitel verwiesen. Wir erhalten eine hinreichende Korrektion, wenn wir mit einer um 0.7° erhöhten Mitteltemperatur der Luftsäulen rechnen.

Auch die Dampfspannung in Apia ist erheblich verschieden von der in Jordans Tafeln angenommenen. Dort wird $\frac{e}{p} = \frac{1}{100}$ gesetzt; also bei $p = 760$ mm $e = 7.6$ mm gewählt. Das entspricht wenigstens im Durchschnitt den Verhältnissen in mittleren Breiten. Denn bei einer Temperatur von 15° unten und einer Kondensationsbasis von 900 m, wie dies ungefähr mittleren Verhältnissen entsprechend wäre, würden wir auf eine Dampfspannung von ca. $6^1/_2$ mm kommen.

In Samoa herrscht ziemlich gleichmäßig die Temperatur 28° unten bei einer Wolkenbasis von 900 m, und das würde einer Dampfspannung von 15 mm entsprechen.

Digitized by Google

Auch eine Zunahme der Dampfspannung wirkt gewichtverringernd; auch sie läßt sich daher durch eine Korrektion der in die Rechnung eingeführten mittleren Temperatur der 500 m-Stufe berücksichtigen, und zwar ist nach Hann (l. c.) ein Fehler von 1 mm Dampfdruck aequivalent einem Temperaturfehler von 0.1°.

Wir müßten daher wegen der höheren Dampfspannung in Samoa die beobachtete Mitteltemperatur der Stufen zur Durchführung der Höhenberechnung um 0.7° erhöhen.

Der Unterschied der Dampfspannung verringert sich langsam mit der Höhe, so daß er in 3000 m nur noch 5 mm, aequivalent 0.5°, ausmachen würde.

Im Ganzen wären also $\left(0.7 + \frac{0.7 + 0.5}{2}\right) = 1.3^0$ in Samoa zu den beobachteten Mitteltemperaturen zuzuzählen, wenn man Schwere und Dampfspannung angenähert berücksichtigen will.

Beispiel:

Luftdruck	Höhe nach Tabelle	Δ_t	$\frac{t'+t''}{2}$ Temp. Korrect.	$\left[\frac{t'+t''}{2} + 1.3^0\right]$	Verb. Temp. Korr.
762mm	0m	0.0	$\frac{28^0+18^0}{2} = 23^0$	24.3	24.3 × 3.7
672	1008	3.7			
rohe Höhendiff.	1008m	3.7 × 23 = 85m			93m
rohe Temp. Korr.	85				
verbess. » »	90				

1093m mit der Tabelle gerechnet,
1098m auf Dampfspannung und Schwere korrigiert.

Wir können eine weitere Vereinfachung vornehmen, indem wir unkorrigiert rechnen und zu dem Resultat bei 1000 m rund 5 m, bei 2000 m rund 10 m zuzählen.

Da die Temperatur (bzw. analog der Luftdruck) auch bei den besten Meßinstrumenten um ca. 0.1° unsicher ist, müssen die Höhen dann noch auf Dekameter abgerundet werden; denn einer Temperatur-Änderung von 0.1° entspricht im Minimum eine Höhen-Änderung um 10 m.

Die Aufstiege schlossen sich nach Möglichkeit an die internationalen Termine an. — Als 0-Höhe ist mittl. Niedrigwasser angenommen, das auch die Grundlage der bisherigen Karten bildet.

Der Vollständigkeit halber ist auch der Aufstieg vom 31. Dez. 08 publiziert, der noch in die Amtsperiode meines Vorgängers

Digitized by Google

Dr. Angenheister fiel, wenn er auch von mir ausgeführt wurde. Auch an den Januar-Aufstiegen hat Herr Dr. Angenheister insofern Anteil, als er die seismischen und erdmagnetischen Registrierungen weiter führte, so daß ich Zeit erhielt zur Ausführung der Drachenaufstiege.

Die eingehenden Wolkenbeobachtungen, deren Resultat mitunter wichtiger ist als dasjenige nur mittelhoher Drachenaufstiege, werden mit verwertet.

Die Aufstiege.

31. Dez. 08, 10a—12.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0 m	29.3°	80 %	ENE	8
500	24.3	90	ENE	9
1000	20.0	100	ENE	9
1420	19.0	80	NE	10

fr.-cu (5^{0-1}) [1]) aus ENE zwischen 900 und ca. 1200; a-str (7^{1}) verwaschen, diesig, bei ca. 2000, regendrohend, aus N mit ca. 12 m/s; ci schwach, Bewegung nicht erkennbar. Zwischen 1200 und 1400 geringe Inversion. Drache wird oben unstabil.

6. Jan. 09 9—11a. Der Wind ist zu schwach; 2 Drachen havarieren. Cu (2°) bei ca. 1000 m, mit 6 m/s. aus ENE; a-str (ci-str?) (3°) sehr langsam aus W (!).

7. Jan. 09 9—11a. Cu-Türme zwischen 300 und 3000; in dieser Höhe werden die Köpfe zu einer a-str-Decke ausgebreitet, die ohne merkliche Bewegung ist. Die Passatschicht zieht mit 5—6 m/s. aus ENE. Ein Drachenversuch (390 m Höhe) zeigt streng adiabatisches Temperaturgefälle.

In jedem cu-Turm wurde der Auftrieb des Drachens durch das Aufsteigen der Luft merklich vermehrt. 50 m vor und hinter der Wolke hingegen war die absteigende Luftbewegung so stark, daß die Drachen rasch fielen.

8. Jan. 09, 10a—12.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0 m	29.5	80 %	E	7
500	25.0		EzN	8
1000	21.3	ver-	ENE	9
1500	18.5	sagt.	NE	9
2000	16.5		NE	8
2300	12.7		NE	8

1) Die Bezeichnung in Klammern ist bei jeder Wolkenart auch bei den fol-

Digitized by Google

cu (6^{1-2}) und cu-ni zwischen 700 und 3000, Köpfe zu einer a-str-Decke (2—3°) ausgebreitet. Über West-Upolu (Seeseite) zieht sich das übliche stationäre Gewitter zusammen, mehrfach ⌇. Eine der von See kommenden Regenböen passiert den Aufstieg, um sich mit den Wolkenmassen über Upolu zu vereinigen. Auf der Rückseite der Böe schwenken die Drachen stark nach rechts. Die auffällige, den Erwartungen zuwiderlaufende Drehung ist nicht durch Schiefstehen der Drachen veranlaßt.

11. Jan. 09, 12—3 p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0 m	28.7	90	ENE	5
500	23.8	95	NE	4—6
725	21.2	100	NE	4—6

Lebhafter vertikaler Luftaustausch. Trotzdem 4 große Drachen verwendet wurden, waren wegen Windmangels keine größeren Höhen zu erreichen. Passatwetter: cu zwischen 1000 und 3000 in Türmen, Köpfe nach N ausgeweht. Morgens ziehen a-cu (Höhe der cu-Köpfe) langsam aus S-SW.

12. Jan. 09. Landregen und Stille tagsüber. Ni (Basis 400) langsam aus NE. Nur zeitweise bricht die Wolkendecke auf. Schwache a-str sehr langsam aus SW. Pilotballon Aufstieg: Ballon wird undicht.

13. Jan. 09. Über der See flache cu, bewegungslos; cu-ni über der Insel, bis ca. 4000 m reichend, breitet sich gegen Mittag aus ($●^{0-1}$); Kopf wird als a-str-Decke sehr langsam nach NE geweht.

Die Schichtung in den vergangenen 3 Tagen zeigt das Bild, das man in der Nähe des Aequators nördlich der Sonne erwarten sollte. In der Tat steht die Sonne vom November bis Januar südlich von Samoa. Indessen können wir uns trotzdem auf Grund dieser vereinzelten Beobachtungen nicht für berechtigt halten, die gefundene Schichtung als besonders typisch oder normal anzusehen.

16. Jan., 11 a—1 p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0 m	28.5	85	NW	8—9
500	22.5	95	NW	9
1000	18.9	100	NW	8—9
1500	16.3	95	NNW	8
2000	13.3	100	NNW	8
2500	11.7	85	N?	6

Wechselnde Bewölkung; cu-ni, fr-ni, a-str, von 7^{0-1} bis 10^{1} ni. Unterste Wolkenfetzen liegen bei ca. 500 m, sie schließen sich nach oben stellenweise zu

genden Beobachtungen so gewählt, als ob die übrigen Wolken nicht vorhanden wären.

Digitized by Google

kompakten Wolkenbergen bis zu 3000 m auf; a-cu zwischen den Böenwolken bei 2000 m, darüber kein nennenswerter Sprung. Aus den Böen häufig ⌈ and ●.

18. Jan. 09, 3—4 p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0 m	29.2	90	NNW	5—8
310	26.1	95	NW	4—6

Lebhafter vertikaler Luftaustausch. Der übliche cu-ni (⌈) über Upolu.

18. Jan. 09, 4—5 p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0 m	29.7	90	NNW	7—9
500	24.0	100	NNW	Abnahme
570	23.2	100	NNW	3--6

In Maximalhöhe wird der Aufstieg von einer Regenböe passiert. ●². In 400 m sinkt die Temperatur in 15 Minuten um 2.4°, am Boden von 29.7 auf 24.4. Anscheinend wird die Luft durch die Regentropfen abgekühlt und nicht durch Konvection, da man in letzterem Falle gleichmäßigere Abkühlung erwarten sollte. Unter der Voraussetzung, daß unsere Annahme richtig ist, wäre der Ursprung des Regens, oder der Beginn des Fallens, auf ca. 1000 m Höhe zu setzen; in dieser Höhe wäre die Änderung der Lufttemperatur durch den Regen 0. — Wolkenbasis senkt sich gegen Ende der Böe auf **100 m** (!); cu-mammati. Lebhafte Linksdrehung auf der Rückseite der Böe.

20. Jan. 09, 10 a—2 p. Drachenaufstieg auf ca. 2500 m. Luftdruck nicht aufgezeichnet. Die Drachen reißen ab, und fallen 10 km weit. Bewölkung ähnlich der des SE-Abhanges europäischer Depressionen. Fr-ni 800—900, nach vorn ausgeweht, mit 10—12 m/s aus NW, darüber bei 2500—3000 ni-str, nicht erreicht. Um 2 p schließen sich die fr-ni stellenweise mit der oberen Decke zusammen, um 3 p 10^1 ni, strömender Regen, NW 10—15 m/s.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0 m	26.4	90	NW	9
500	(21.4)	100	NW	9
1000	(17.4)	95	NW	10
1500	(15.1)	98	NW	10
2000	(12.6)	100	NW	10
2500	10.3	100	NW	10

Die Basis der fr-ni lag bei 800 m, hier sind also unter der nach den bisherigen

Digitized by Google

Erfahrungen wohl berechtigten Annahme adiabatischer Temperaturabnahme 18.4° anzunehmen Sticht man den zugehörigen Punkt auf der Feuchtigkeitskurve ab, so ergibt sich, daß gleich darauf, der Temperatur 17.4° entsprechend, die Feuchtigkeit um ca. 5 Proz. sinkt. Von hier ab bis zur Maximalhöhe herrschte unter der Voraussetzung, daß die erreichten Höhen nicht erheblich größer sind, als nach Winkelhöhe und Drahtlänge angenommen wurde, streng das Temperaturgefälle der Kondensationsadiabate (vgl. Neuhoff, Adiabatentafeln, Abhandlungen d. Kgl. preuß. Meteorol. Instituts Band I, Nr. 6).

Bemerkungen.

Offenkundig, und den normalen Verhältnissen gut entsprechend ist bei den Aufstiegen im Januar das Abwechseln eines schwachen E-Passates und des NW-Böenwindes. Auf die ausgesprochene Schichtenbildung sei nur kurz hingewiesen, wir werden sie eingehender an der Hand der folgenden Monate erörtern.

Die Aufstiege im Januar hatten praktisch vor allem die Bedeutung, eine allgemeine Orientierung zu schaffen; man mußte erst lernen, merkwürdige Einzelheiten und die wesentlichen großen Züge auseinander zu halten. Ersteren ist im Januar eine über ihre allgemeine Bedeutung wohl etwas hinausgehende Aufmerksamkeit geschenkt worden. Letzteren gelten nach den Vorversuchen im Januar die folgenden Aufstiege.

3. Febr. 09. Wegen zu schwachen Windes kein Aufstieg; cu mit 2—3 m/s aus NE (Regenböen). Unter den cu frischt der Wind unter heftigen Stößen bis zu 10 m/s auf, aber nur minutenlang. Wolkenbasis 700.

4. Febr. 09. Wegen zu schwachen Windes kein Aufstieg. Bewölkung 4^{0-1} aufklarend auf 2^{0-1}. Cu aus NNE mit 2—3 m/s, zwischen 700 und (wechselnd) 1000—2000; a-str bei ca. 4000 mit ca 8 m/s aus N.

Bemerkungen.

Wir können an beiden Tagen auf 2 Schichten schließen, eine untere zwischen Erdboden und ca. 1000 m, welche im Allgemeinen sehr langsam aus NE zieht, und eine obere bis ca. 4000 m (Höhe der a-cu), die wegen Fehlens der a-cu-Decke am 3. nicht zur Beobachtung gelangt, und ziemlich schnell aus N zieht. Sie bringt vermutlich, trotzdem sie aus aequatorialen Gegenden kommt [1]), kältere Luftmassen heran, welche das Gleichgewicht mit der unteren Schicht von Zeit zu Zeit labil werden lassen. Beim Durchsinken nach unten behalten die Luftvolumina ihre bisherige horizontale Komponente bei und erzeugen unten heftigen Böenwind. Die an ihrer Stelle aufgestiegenen Volumina der unteren Schicht hingegen kondensieren lebhaft und bewirken Regengüsse.

3. März 09. Unten still. Cu und fr-cu, Basis 700, Köpfe (geschätzt) zwischen 1500 und 2000, schwach nach WSW ausgeweht, aus NE mit 3—4 m/s. Ci-str langsam aus SSE.

4. März 09. In der Nacht haben Böenwolken aus N schwere Regengüsse und N-Wind 8—10 m/s mit sich gebracht. Tagsüber bleibt es regnerisch. Cu-ni, 6^{9}—10^{1-2} zwischen 300 (Basis) und ca. 6000, mit ca. 2 m/s aus NNW. Darüber ci (ausgewehte Köpfe der cu-ni). Unter den cu-ni und in denselben heftiger aber stößiger Wind von 8—15 m/s; zwischen den Böen unten Stille.

---

1) Der meteorologische Aequator liegt zu dieser Zeit etwa bei Samoa. Die Sonne ist im Zurückgehen nach Norden begriffen; s. a. Schluß.

Digitized by Google

9^{30}a — 11^{30}a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	25.5	90	NNE	9
500	20.6	100	N	8—15
730	19.5	100	N	6—7

Beim Abstieg zwischen Erde und 300 m Stille.

5. März 09. Wieder schönes Wetter. Unten Passat, ENE 5—6 m/s, mit der Höhe rasch abnehmend. Ein Drachenversuch auf 100 m Höhe zeigt dort E 4—5 m/s. Passat-cu ziehen mit ca 6 m/s aus NE. Basis bei 800; Köpfe, schwach nach Süden übergekippt, bei 1000 bis 1200. Darüber nur noch ci und ci-str, die rasch aus SE ziehen. Spät nachmittags ballen sich die Passatwolken zu kleinen Böen zusammen. Ein neuer Drachenversuch (70 m Höhe) zeigt das gleiche wie am Vormittag.

Bemerkungen.

Auch in diesem Monat wird eine untere Passatschicht zwischen Erde und ca. 1200 m beobachtet, an deren Oberfläche cu schwimmen. Sie ist an allen 3 Tagen fast bewegungslos; darüber, bis ca. 4000 m, befindet sich eine Schicht, die wieder im Allgemeinen nach Süden strömt. Sie verursacht, wie im Februar, Böenentwicklung. Am 3. wird sie durch die nach WSW ausgewehten cu-Köpfe angedeutet; in der folgenden Nacht sinken Luftmassen aus ihr zur Erde durch und bringen böigen Nordwind. Am 4. zeigt sie sich in der Zugrichtung der cu-ni, am 5. wieder in dem Auswehen der cu-Köpfe. A-cu an ihrer Oberfläche fehlen diesmal.

Zwischen 4000 und 10000 wird eine dritte Schicht durch die ci-Wolken angedeutet, die an ihrer Oberfläche schwimmen. Sie ziehen am 3. langsam aus SSE, am 5. schnell aus SE.

Es sei bereits hier nachdrücklich darauf hingewiesen, daß die Schichtung der Atmosphäre daraus nicht so sehr von der allein bisher eingehend erforschten im Bereich des nördlichen Polarwirbels so sehr verschieden ist, als man zunächst glauben sollte, daß vielmehr die Schichtenfolge bis zu hohem Maße die gleiche ist. Nur die Strömungsrichtung der einzelnen Schichten, und die größere Regelmäßigkeit der untersten, die durch die gleichmäßigere Erwärmung der Wasserflächen des Oceans erklärlich wird, bildet einen Unterschied.

30. März 09 a. m. Unten still. Ci-str ziemlich schnell aus ESE, über der See meist wolkenlos. Über dem Gebirge stationäre dicke Mittagscumuli, schwach nach NW geneigt. Mittags Gewitter (●, ⟍) Bew. 8^{1-2}, cu und ni zwischen 500 und 2000 sehr langsam aus W. A-str stehen still.

31. März 09. Untere Wolken (cu, fr-cu) aus SE; a-str und a-cu bei ca. 2000 aus SSW. Tagsüber heiter bei umlaufenden schwachen Winden.

1. April 09. Cu, Basis 500, Köpfe wechselnd bis 2000, oben nach NE vorgeweht, mit ca. 3—4 m/s aus SW. Darüber bei ca. 2000 a-cu, Bewegung nicht zu erkennen. Unten umlaufende schwache Winde. Tagsüber heiter.

2. April 09. Unten nur Land- und Seewind, ersterer schon um 6 Abends sehr frisch. Str-cu bei 2000 mit 3—4 m/s aus SE, ci mäßig schnell aus SE. Tagsüber heiter.

Digitized by Google

3. April 09. Tagsüber heiter bei umlaufenden schwachen Winden. Ci mäßig schnell aus SSE—S. Auf den Berggipfeln (700 m., Lanutóo) N-Wind 10 m/s. Fast wolkenlos. Nachts nimmt die Bewölkung zu, am nächsten Tage herrscht Böenwetter aus N, bei meist schwachem Wind, und Regen.

Bemerkungen.

Auch im April finden wir die drei üblichen Schichten wieder. Die unterste (bis 1200 m) ruht, wie im März; die zweite, deren Mächtigkeit diesmal nur gering geschätzt wurde, und zwar übereinstimmend auf 2000, strömt am 30. III mit nördlicher Komponente (aus SE?), am 31. III aus SW, am 1. IV ruht sie, am 2. IV zieht sie sehr langsam aus SE, am 3. IV ziemlich rasch aus N. Letzteres hat, wie im März, Böenwetter zur Folge.

Die oberste Schicht, deren obere Begrenzung die ci bilden, zieht am 30. III ziemlich schnell aus ESE, am 2. IV und 3. IV mäßig schnell aus derselben Richtung.

5. Mai 09, 10a—11. Drachenaufstieg auf 500 m. Drache fliegt fort. Die Kurve zeigt adiabatische Temperaturabnahme und schwache Abnahme des Windes unter Linksdrehung. Wolken wurden nicht erreicht.

Passat-cu zwischen ca. 800 (am Gebirge geschätzt) und ca. 1500 (sehr wechselnd) aus NE mit ca. 6 m/s. Später Türme und Regenschauer. Ci-str flott aus NW.

6. Mai 09. Kein Drachenwind, cu langsam aus W. A-cu (2000 m) ohne merkliche Bewegung, ci-str langsam aus NW.

7. Mai 09. Still und heiter. Ci fehlen. Zeitweise schwacher SE.

8. Mai 09. Vereinzelte Böenwolken mit häufigen elektrischen Entladungen innerhalb der Wolke, und strichweisem Regen.

Cu aus ENE, oben ausgeweht als a-cu oder a-str bei 2000 nach N (oben vermutlich Südwind); von ca. 2500 m an, wohin einzelne Köpfe der cu gelangen, W- oder NW-Wind.

Bemerkungen.

Die Schichtenfolge ist diesmal unregelmäßiger. Die unterste (Passat)-Schicht zieht am 5. langsam aus ENE—NE, an den folgenden Tagen ruht sie. Sie reicht bis ca. 1000 m; die Böen, welche sich in den letzten Tagen durch vereinzeltes Emporsteigen ihrer Luftmassen entwickeln, stoßen bis 2500 m durch. Die a-cu-Schicht, die auch hier nur niedrig ist (bei 2000 m) wird am 5. nicht beobachtet, sie ruht am 6., und zieht langsam aus S am 8. Die oberste Schicht dagegen zieht diesmal, obwohl die Passatzeit längst eingesetzt hat, aus NW, und am 8. reicht sie wahrscheinlich von ca. 2500 m bis zur Höhe der Cirren.

29. Mai 09, 9a—1p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29.9	90	E	9
500	24.6	95	E	8
1000	20.7	90—100	E	7
1170	19.9	80—90	E	6

Ci-str ziehen aus WNW. Bew. 4—6^{0-1} cu (5^{0-1}) und ci-str (3^{0}). Störungen wurden nicht beobachtet, cu meist zwischen 900 und 1100.

Digitized by Google

2. Juni 09, 10a — 12.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29.0	90	E	9
500	24.0	95	E	9
1000	20.0	100	E	9
1500	18.0	100	E	9
1800	16.8	70—80	E	8

In Maximalhöhe reißt der Aufstieg ab, weil ein Drache Kopfsprünge macht. Er fällt nach Safune (Upolu, 5 km WNW) wo er mit Boot gejagt wird. Der Luftdruck ist schlecht aufgezeichnet. Bewölkung 6 (4^{0-1} cu, 3^{0} ci) cu zwischen 900 und 1500. Ci ziehen aus WNW.

Bemerkungen.

Bei beiden Aufstiegen findet sich keine Beobachtung über die mittlere Schicht. Ob diese fehlt, läßt sich natürlich ohne weiteres nicht sagen.

Am 29. Mai und 2. Juni zieht übereinstimmend die erdnahe Schicht als reiner Passat aus E; die oberste Schicht hingegen, die an den ci und ci-str an ihrer Oberfläche kenntlich wird, an beiden Tagen aus WNW.

29. Juni 09, 10a — 12.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	30.0	90	ENE	5—9
500	25.0	95	SSE	9
1000	20.0	100	SSE	8
1500	16.5	100	SSE	6
1830	15.4	90—100	NE	8

Bew. 4—6 cu, a-cu. Erstere zwischen 1000 und 1500, letztere bei ca. 3000, aus NE ziehend. Bis 200 m ENE-Wind, wohl nur lokal, weil Apia auf der Leeseite der Insel liegt.

30. Juni 09. Still und heiter. Nur cu, die unentschieden, im Allgemeinen aus E ziehen.

1. Juli 09, 10a — 12.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	28.5	90	E	9
500	23.5	95	E	9
1000	18.5	100	ENE	8
1500	16.6	80	E?	6
2010	15.0	100	S	8

cu 7^{0-1} zwischen 1000 und 1200, darüber bis 1400 Isothermie. 1^{0} falsche (?)

Digitized by Google

Cirren aus SW. Die untere Grenze der zweiten Schicht wird vom Drachen erreicht. Es ist bemerkenswert, daß die obere südliche Strömung, obgleich sie aus höheren Breiten kommt, höhere Temperaturen bringt.

2. Juli 09, 11 a — 1 p.

Höhe	Wind- Richt.	Geschw.
0	ENE	7—10
500	E	9
1000	ESE	7
1500	NE	6
2000	NE	8

Registrierung versagt; cu 5^{0-1} zwischen 800 und 1200, darüber starke Linksdrehung.

2. Juli 09, 3—$4^1/_2$ p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	30.0	90	E	6—9
500	25.0	95	SE	8
1000	22.0	100	SE	6
1290	21.0	90	NE	7—8

Über den Passatwolken (800—1000) nur Abnahme des Temp.-Gefälles, aber keine Temp.-Umkehr. Apia liegt offenkundig auf der Leeseite der Inseln. Rechts und links sieht man die Wolkenmassen entlang ziehen, während es über dem Aufstiegsorte wolkenlos bleibt. Der nächste Tag bringt Regen.

Bemerkungen.

Die zweite Schicht hat ihre normale Mächtigkeit und erstreckt sich, soweit die Beobachtungen das erkennen lassen, von rund 1000 bis rund 4000 m. Ihre Zugrichtungen sind

29. VI. aus NE ca. 10 m/s
30. VI. „ ?
1. VII. „ SW „ 10 m/s
2. VII. „ NE „ 8 m/s.

Über die oberste Schicht liegen keine Beobachtungen vor.

4. Aug. 09. Beobachtungen in Savaii, an den Dampfwolken des Vulkans.

Höhe	Wind- Richt.	Geschw.
0	SE	6
500	S	4
700	S	4

Digitized by Google

Nachmittags schwere Regenwolken über der Hauptkuppe, Wolkenköpfe bis ca. 5000 m, schwach nach N ausgeweht.

4./5. Aug. 09. Beobachtungen auf dem Krater.

Höhe	Wind- Richt.	Geschw.
0	SW	3
500	S	3
700	S	4

Gegen Morgen vereinzelt Regen, ni aus S bei ca. 1000 m.

5. Aug. 09. In Savaii.

Höhe	Wind- Richt.	Geschw.
0	SE	4
500	C	
700	C	

Wolkenlos. In Apia umlaufende Winde. Fr-cu mit 4 m/s aus E bei 1000 m; a-cu (2000) aus S.

6. Aug. 09. Zwischen Erde und 1000 m ESE-Passat, 3—4 m/s, vereinzelte Regenböen. Oben Windabnahme oder Stille. — Der Land-(Nacht-)Wind erstreckt sich in diesen Tagen (Südwinter) auf der Nordseite der Inseln bis ca. 5 km vor die Küste, in der Regel reicht er nur 2—3 km weit, bei einer durchschnittlichen Stärke von ca. 1—2 m/s.

30. Aug. 09, 9a—1p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	27.8	94	E	5—7*
500	23.0	94	E	5—7*
1000	21.5	50	ESE	5
1420	19.2	55	ESE	5

*Energischer vertikaler Luftaustausch. Zwischen 500 (Oberfläche der Passatschicht?) und 600 geringe Inversion. Str-cu zwischen 1200 und 1500 aus ESE mit ca. 6 m/s. Luft außergewöhnlich durchsichtig.

Digitized by Google

31. Aug. 09, 9a — 12.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	27.2	93	E	6—9*
500	22.5	90	EzN	6—7*
1000	19.0	90	ESE	5
1380	17.2	50	ESE	6—7

*Lebhafter vertikaler Luftaustausch. Str-cu zwischen 1100 und 1200, darüber keine Temperaturumkehr, aber Feuchtigkeitsfall und Windzunahme. Die Windrichtung bei 500 m ist wohl lokal durch die Berge hervorgerufen. Luft außergewöhnlich durchsichtig.

1. Sept. 09. 9a — 1p.

Höhe	Wind- Richt.	Geschw.
0	E	8—10
500	ENE	8
1000	E	8
1500	EzN	7
2000	ENE	6

Registrierung versagt. Cu zwischen 1000 und 2000, Köpfe zu einer glatten Fläche bei 2000 m ausgebreitet. Darüber starke Linksdrehung und Windabnahme, vermutlich auch Temperaturumkehr.

2. Sept. 09, 9a — 12.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	28.0	88	E	6—8
500	23.0	75*	EzN	7
1000	18.0	90	E	4
1180	16.9	95	ENE	4

*lokal, in Lee über dem Lande. Diesig, wolkenlos. Morgens cu bzw. str-cu zwischen 1200 und 1500. Mäßiger vertikaler Luftaustausch. Typischer Passattag. Nachts zuvor 18°. (Absolutes Minimum in Apia ist 17°.)

Bemerkungen.

Die 4 Aufstiege August bis Sept. 09 liefern nur Beobachtungsmaterial über die untersten beiden Schichten. Die Passatschicht strömt in allen Fällen aus E bis ESE, darüber herrscht Windabnahme.

Bemerkenswert ist die Beobachtung vom 1. Sept. Auch hier finden wir eine zweite Schicht, bis 2000 m reichend, an der Oberfläche begrenzt durch str-cu, und hier finden wir oberhalb dieser Schicht Nordwind an-

Digitized by Google

gegeben. Es ist nicht ausgeschlossen, daß eine analoge Schichtung auch früher vorhanden war, aber durch vertikalen Luftaustausch, also Mischung zweier Schichten, verdeckt wurde.

Die Neigung zur Schichtenbildung wird ja jetzt, im „Winter" Samoa's, nach Analogie höherer Breiten am größten sein.

5. Okt. 09, 8 — 10a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29.5	90	E	7
500	24.5	95	E	8
1000	19.5	98	E	9
1500	17.5	90	EzN	6
1870	16.1	90	ENE	6

Bew. 4° cu zwischen 1000 und 1200 mit 8 m/s aus E, darüber geringe Störung ; 1° a-str bei ca. 4000, sehr langsam aus ENE.

6. Okt. 09, 8 — 10a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	30.0	90%	E	7—10
500	25.0	100	E	7—10
1000	20.0	100—70	ENE	7
1370	17.6	Abnahme? (Haar zerrissen)	ENE	6

Bew. 4^{0-2} cu, zwischen 500 und 1000 bis 4000 wechselnd; häufig zu Böenwolken sich umformend, mit lebhaftem vertikalem Luftaustausch (Kreisen des Drachens) und Regenschauern. 3° a-str mit Wogen, NW—SE streichend, bei ca. 4000 m, sehr langsam aus S W. 4° ci darüber, schnell aus SW. Die Streichrichtung der Wogen macht es wahrscheinlich, daß keine weitere Schicht mehr dazwischen liegt. Im vertikalen Luftaustausch Temperaturschwankungen bis zu 1°.

7. Okt. 09. 8a—10a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29.3	88	E	9
500	24.3	100	ENE	12
1000	19.7	70	E	14
1500	15.6	70	SE	10
2200	12.9	37	ESE	6

Bewölkung 6° cu, zwischen 500 und 600. Sonst wolkenlos. Kleine Störung bei 600, ferner Inversion von 14.3 auf 15.2 zwischen 1700 und 1800, verbunden mit

Digitized by Google

sprunghaftem Feuchtigkeitsfall. In Maximalhöhe Luftwogen, durch Temperaturschwankungen schön ausgeprägt.

8. Okt. 09. 9a—11a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29.8	88	E	7
500	24.5	100	E	7
1000	20.9	90	ENE	6
1540	17.8	70	NW	?

Bew. 4^{0-1} cu, meist 100 m dick, zwischen 500 und 600 (darüber Isothermie bis 800 und Feuchtigkeitsfall auf 70%), vereinzelt stoßen die cu durch bis auf 1400 m; a-cu aus NNE. Geringe Inversion zwischen 1400 (Höhe der a-cu) und 1540; neuer Feuchtigkeitsfall und anscheinend NW-Wind, in welchen der Drache aber nicht vollständig hineinzudrehen vermag.

Bemerkungen.

An allen 4 Tagen zog die unterste (Passat-)Schicht aus E. Ihre Mächtigkeit betrug am 5. X. 1200

6. X. 1000

7. X. 600

8. X. 700 m. Wir sehen also einen starken Sprung zwischen dem 6. und 7. Das Gleiche zeigen die Beobachtungen über die zweite Schicht, wie folgende kleine Tabelle nachweist.

Datum	Mächtigkeit von	bis	Dicke in m (rund)	Zugrichtung aus
5. X	1200	4000	3000	ENE sehr langsam
6. X	1000	4000	3000	SW „ „
7. X	600	1700	1000	SE 10 m/s
8. X	700	1400	700	ENE 6 m/s

Die einzige Beobachtung über Cirren, und damit über die höchste der für den Meteorologen interessanten Schichten, gelang am 6. X. Die Cirren zogen schnell aus SW.

3. Nov. 09. 8—10a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	30.4	85	E	7—9
500	25.4	95	E	9
1000	20.4	100	E	8
1250	19.3	90—100 (schwankend)	E	3—4

Digitized by Google

Bewölkung 5^{0-1} cu, Basis bei 1000, Köpfe meist bis ca. 1200 (flach), vereinzelt bis 3000 m. In größerer Höhe werden die Köpfe nach NE zurückgeweht, es scheint oben SW 1—3 m/s zu herrschen. Ueber Savaii liegen stationäre cu-ni-Massen. Bei 1200 m scheint, nach der Abflachung der cu zu schließen, die Grenze zwischen der unteren E-Strömung und der oberen SW-Strömung mit geringer Unstetigkeit der Temperatur zu liegen.

4. Nov. 09. Unten tagsüber C. A-cu bei ca. 4000 ziehen mit ca. 6 m/s aus N. Vormittags 8—10 kurze schwere Regenböe, aus N kommend, ●², N 10 m/s, Bew. 10^2. Später cu, bewegungslos, zwischen ca. 1000 und 1200.

5. Nov. 09. Unten tagsüber C. Cu-ni. Nachts zuvor schwere Regengüsse und Wetterleuchten. A-str (4^0) mit 5—10 m/s aus N.

6. Nov. 09. 10a—1p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	30.6	85	E	8
500	25.6	90	EzN	9
1000	21.0	100	EzN	7
1500	18.3	70	NE bis NNE	7
2030	13.2	100	NNE bis N	8

Bew. 5—6^1; 3^1 cu zwischen 900 und 1100, darüber Inversion um 0.6^0 bis 1200 und Feuchtigkeitsfall auf 65%; darüber 4^0 a-str, mit ca. 8 m/s aus N ziehend; darüber 4^0 ci-str, mit 5—10 m/s aus W kommend. In beiden beobachteten Schichten streng adiabatisches Gefälle der Temperatur mit der Höhe.

7. Nov. 09. Nachts zuvor schwere Regengüsse. Bewölkung im Laufe des Tages wechselnd zwischen 4^0 und 10^2 ●¹; cu-ni mit ca. 6 m/s aus ENE, zwischen ca. 1000 und meist 3—4000; darüber a-str, Bewegung nicht erkennbar; 5^0 ci-str sehr rasch aus W.

Bemerkungen.

Der Passat im Anfang Oktober war schon nicht mehr ganz typisch, und nunmehr finden wir wieder analoge Verhältnisse wie am Ende der vorigen Regenzeit. Die Passatschicht, die öfter als in der eigentlichen Passatzeit zur Ruhe kommt, reicht bis ca. 1200 m. Die nächste Schicht weist allgemein eine bemerkenswerte Konstanz auf. Sie zieht zwar am 3. langsam aus SW, an allen folgenden Tagen aber „programmgemäß" aus N, indem sie regelmäßig grobe Böen verursacht. Die oberste Schicht zeigte, soweit sie durch Auftreten von Cirren zur Beobachtung gelangte, die nun schon nicht mehr selten zu nennende W-Strömung an.

Eine dynamische Erklärung dieser oberen westlichen Strömung, die inzwischen auch von einer Expedition des Kgl. Aeronaut. Observatoriums am Victoria Njanza beobachtet wurde, steht noch aus.

Bisher hatte man eine Ostströmung in größeren Höhen in den Tropen als Folge der von NE und SE zusammentreffenden und aufsteigenden Passatströmungen als so selbstverständlich betrachtet, daß man darüber versäumt hatte,

Digitized by Google

das theoretische Postulat durch Beobachtungen genügend zu belegen. Und nun scheint es fast, als ob in der weit überwiegenden Mehrzahl der Fälle in großen Höhen allgemein Westwind wie in den gemäßigteren Zonen herrscht.

Einstweilen müssen wir uns mit dem negativen Resultat zufriedengeben, daß unsere bisherigen Vorstellungen von der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre sich in sehr wesentlichen Punkten nicht aufrecht erhalten lassen, ohne die Vorstellungen berichtigen zu können.

8. Nov. 09. In der Nacht vom 7./8. und am 8. tagsüber schwere Regengüsse bei E-Wind.

9. Nov. 09. 9—11 a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29.5	94	E	9
500	24.5	98	EzS	10
1000	21.0	100	EzS	9
1210	20.0	90—100	E	7

Bewölkung 7^1, cu-ni, a-cu. 4^1 cu-ni, fast stationär, zwischen 800 und ca. 3000; 1^0 cu, flach, zwischen ca. 800 und 1200 auf der See; 3^0 a-cu bei 3000, mit 6 m/s aus E ziehend. Hohe Wolken nicht vorhanden.

10. Nov. 09 11 a—1 p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29.0	95	E	8
500	26.0	60	E	8
1000	21.0	90	ESE	7
1160	20.5	70—100	ESE	7

Bew. 7^{0-2} cu-ni, cu, a-cu, ci-str. 2^0 cu-ni stationär über der Leeseite von Upolu. 1^0 cu (bei 400?) flach. 3^0 a-cu mit 5—8 m/s aus ESE bei 3000. 4^0 ci-str mäßig schnell aus WSW. Zwischen 400 und 500 Inversion von 25.0 auf 26.0 und Feuchtigkeitsfall von 100 auf 60 %. Weiterer Temperatursprung anscheinend in Maximalhöhe, verbunden mit neuem Feuchtigkeitsfall.

10. Dez. Schwerer cu-ni, bis ca. 4000 m reichend, über der Leeseite Upolus. Nachmittags Gewitter und Regen. Morgens wolkenlos. Schwache umlaufende Winde.

11. Dez. 09. Wie am 10. Dez.

12. Dez. 09. Desgl. Der endlich nach 2tägiger Arbeit gefüllte (20 m^3 Fessel-)Ballon steigt nicht, weil das erzeugte Gas zu schlecht ist.

Digitized by Google

Zusammenfassende Schlussbetrachtungen.

Die meteorologischen Vorgänge, die, wenigstens in einer gewissen Regelmäßigkeit, sich nach der Entfernung vom Aequator anordnen, bleiben nicht stationär, sondern sie verschieben sich nach Norden und Süden, im allgemeinen dem Stande der Sonne mit einer Verspätung von rund 3 Monaten folgend.

Die Fachliteratur hat deshalb als Ergänzung zu dem geographischen die Bezeichnung „meteorologischer Aequator" eingeführt.

Am besten werden wir diesen als die Linie relativ stärkster Erwärmung definieren können, relativ nämlich insofern, als wir dabei einen Punkt dieser Linie mit den übrigen Punkten desselben Längengrades vergleichen.

Die Temperatur der Luft hängt durch die Vorgänge der Konvektion von der Erwärmung der Erdoberfläche ab.

In erster Näherung erhalten wir ein Bild von der wirksamen Temperatur der Erdoberfläche, wenn wir die Temperatur des Oberflächenwassers der See betrachten. Zu einer genaueren Kenntnis ist es notwendig, sich zu vergegenwärtigen, daß Länder und Gebirgsmassen in tropischen Gegenden im Gegensatz zu mittleren und hohen Breiten im ganzen erhöhend auf die Lufttemperatur einwirken.

Das Hinströmen der Luft an die Linie relativ stärkster Erwärmung findet nicht überall in gleicher Weise statt. Hierzu ist das absolute Maß der Erwärmung auf dem meteorologischen Aequator zu verschieden, ganz abgesehen von zeitlichen Schwankungen.

Die Segelanweisung bemerkt über diesen Punkt für die Umgebung Samoa's folgendes:

„Die endlose Wasserfläche zwischen Australien und Südamerika zerfällt in zwei Hälften, von denen die östliche fast aller Inseln bar, die westliche dagegen, besonders innerhalb des Wendekreises, mit einzelnen Inseln, Inselgruppen und Riffen übersät ist. Diese Inseln, zusammen doppelt so groß als Bayern, aber kleiner als ein Viertel von Neu-Guinea, bilden nur einen verschwindenden Bruchteil der umgebenden Wasserfläche, aber trotzdem üben sie durch ihre Menge, Verteilung und Lage innerhalb der Tropen einen großen Einfluß aus, der sich weithin geltend macht."

Der meteorologische Aequator läuft im Südwinter, aus ENE kommend, über Tokelau südlich der Ellice-Gruppe nach WNW, im Südsommer zwischen Tonga und Samoa nach WSW; aber der

Digitized by Google

meteorologische Unterschied zwischen Nord und Süd ist an vielen Stellen geringer als der zwischen Ost und West.

Auch für Samoa werden also verallgemeinernde Schlüsse aus meteorologischen Beobachtungen auf die Vorgänge in einem ideellen Passat nur mit Vorsicht gezogen werden dürfen, unter steter Erinnerung, daß wir in Samoa nicht in einem reinen Passatgebiet liegen, das durch südnördliches Druckgefälle erzeugt ist, sondern daß, vielleicht superponiert über dieser Erscheinung, sich ein ostwestliches Druckgefälle bemerkbar macht, erzeugt durch den Gegensatz des inselfreien Meeres im Osten zu dem inselerfüllten im Westen.

Allerdings sind ähnliche Erwägungen wohl in allen Punkten irgend eines Passatgebiets anzustellen.

Bevor modernere Forschungsmethoden in die Meteorologie Eingang gefunden hatten, waren die Vorstellungen über den Passat sehr einfacher Art.

Man dachte sich, daß eine Luftschicht von einigermaßen gleichförmiger Mächtigkeit auf den Aequator zuströmte, eine Trägheitsbahn beschreibend. Am Aequator sollte dann ein gemeinsames Aufsteigen stattfinden, und Zurückströmen in größerer Höhe.

Für Samoa hätte man bei Ost-Wind unten, der durch die Lage des meteorologischen Aequators erklärt ist, in der Höhe einen NE bis E erwarten sollen.

Aus den Drachen- und Wolkenbeobachtungen ergibt sich in runden Zahlen, daß eine „Passat"schicht bis rund 1000 oder 1200 m reicht; darüber, mit wechselnder Mächtigkeit, zieht die Luft aus sehr verschiedener Richtung, im allgemeinen nach SW, wie theoretisch erwartet. Die Oberfläche dieser zweiten Schicht liegt bei 2—4000 m.

Ab dies der Antipassat ist, oder vielleicht nur eine von der Wetterlage abhängige Zwischenschicht, läßt sich nicht mit Sicherheit angeben.

Die meiste Verwunderung muß die darüber liegende Strömung erregen, deren Oberfläche durch die Cirren bei 10—15000 m angedeutet wird. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, das sie gelegentlich bei stabiler Schichtung zum Ausgleich horizontaler Temperaturdifferenzen Unterschichten bildet, indessen werden wir uns doch für berechtigt halten dürfen, sie im großen und ganzen als ein Einheitliches zu betrachten. Sie zieht auch in der Passatzeit aus W—NW, während man am meteorologischen Aequator in großen Höhen einen Ost-Wind hätte erwarten sollen.

Digitized by Google

Die Dynamik dieser Schicht wird man einstweilen als unaufgeklärt betrachten müssen.

Es sei darauf hingewiesen, daß, abgesehen von der Strömungsrichtung und Geschwindigkeit, nunmehr anscheinend in allen Breiten die Dreischichtung der Atmosphäre bis zur Höhe der Cirrus-Wolken beobachtet ist[1]), wobei der Charakter der Schichten in allen Breiten derselbe bleibt: an der Erdoberfläche eine Strömung mit mehr oder minder ausgeprägter unmittelbarer Abhängigkeit von der Erde, also vertikalem Luftaustausch (Erwärmung) oder Erdboden-Inversion (Abkühlung). An ihrer Oberfläche geht die cu-Bildung vor sich. Darüber liegt eine Schicht, welche sich teils im Absteigen befindet, wie aus ihrer häufigen Trockenheit geschlossen werden kann, teils die aus der unteren Strömung sich entwickelnden Regenwolken aufnimmt, und hierüber ein meist wolkenfreier mächtiger Strom. Bemerkenswert ist die verhältnismäßig große Gleichmäßigkeit in der Mächtigkeit der Schichten in allen Breiten und zu allen Zeiten.

Einen weiteren Strom oberhalb der Cirrus-Wolken, der bisher überall übereinstimmend gefunden wurde, haben wir dabei fortgelassen. Er scheint kein direktes meteorologisches Interesse zu haben, da er ohne Zusammenhang mit den unteren Schichten ist. Er ist erheblich zu warm (relativ), als daß Luftmassen aus diesen in ihn hineindringen könnten. So schwimmt er als leichtere kosmische Decke auf den kälteren, dichteren Luftmassen, die von der Erde abgekühlt und erwärmt werden. Seine Basis scheint in polaren Breiten bei 6—7000, und in aequatorialen bei rund 15000 m zu liegen. Seine Temperatur wird durch Strahlung, nicht durch Konvektion bestimmt.

Regenwolken, wie überhaupt die Hauptwolkenmassen, gehören in Samoa, analog den mittleren Breiten, im wesentlichen den beiden untersten Schichten an, und nur vereinzelte mächtige cu-ni, die sich infolge der Erhitzung der gebirgigen Inseln über diesen bildeten, sah man bis in die Höhen von 5—7000 m sich erstrecken. Im allgemeinen aber scheinen diese Höhen ganz wie in mittleren Breiten, ziemlich wolkenfrei zu sein, abgesehen von der dünnen Cirrus-Decke an ihrer Oberfläche. Die Cirri werden heute wohl allgemein als die ausgebreiteten Köpfe der cu-ni gedeutet[2]). Ein

---

1) In polaren Gebieten erst neuerdings durch meinen Bruder Dr. Alfred Wegener, an der Nordostküste Grönlands, auf ca. 77° Nordbreite.

2) Vgl. De Quervain, Meteorol. Zeitschrift 1908, 451 ff.

Digitized by Google

vertikaler Luftaustausch zwischen diesen Höhen und der Erdoberfläche existiert in der Breite von Samoa anscheinend nur in sekundärer Form.

Bei dem Heranströmen der Luft an die Stelle stärkster Erwärmung und bei dem Aufsteigen dürfen wir uns, wie aus den Beobachtungen hervorgeht, nicht einen gleichmäßigen allgemeinen Vorgang denken, vielmehr findet das Heben nach oben in die „rückkehrende" Antipassatschicht ruckweise in Böenwolken statt.

Die Dynamik des Vorganges sei an einem Beispiel vor Augen geführt.

Ueber einer nicht kondensierenden Passatschicht von 1000 m Mächtigkeit und adiabatischem[1]) Temperaturgefälle (1.0° pro hundert Meter, wie wir es ja in allen Beobachtungen finden) ruhe eine stabil gelagerte zweite Schicht von 0.7° Temperaturgefälle.

Innerhalb der Passatströmung mit ihrem adiabatischen Temperaturgefälle würde ein leichter Anstoß genügen, um ein Luftvolumen vom Boden bis an die Oberfläche steigen zu lassen; es kühlt sich beim Aufsteigen ja adiabatisch ab, d. h. in unserm Fall, unter der Voraussetzung, daß keine Kondensation stattfindet, um 1° pro hundert Meter, und hat so überall die gleiche Temperatur und das gleiche Gewicht wie die Umgebung.

Das analoge ist bei sinkenden Luftvolumina der Fall. — Der erforderliche leichte Anstoß wird durch zwei Faktoren geliefert, einmal dadurch, daß die Passatströmung von kühleren zu wärmeren Meeresteilen strömt, und dauernd eine geringe Überwärmung der untersten Luft eintritt; und ferner durch die wirbelbildende Reibung der Luft an der Erdoberfläche. So wird der Passatstrom unaufhörlich durcheinander gemischt.

In der oberen Schicht hatten wir ein Temperaturgefälle von 0.7° pro 100 m angenommen. Bewegen wir ein Luftvolumen dieser Schicht um 100 m aufwärts, so wird es sich hierbei — alles unter Voraussetzung des Trockenstadiums — um 1° abkühlen, ist also um 0.3° kälter wie die benachbarte Luft, mithin schwerer, und wird demnach wieder auf seine frühere Stelle zurücksinken. Bewegen wir es unter der gleichen Bedingung abwärts, so wird es sich um 1° erwärmen, also 0.3° wärmer sein als seine Umgebung, und demnach ebenfalls auf seine frühere Stelle zurückstreben·

---

1) Für dies und das folgende s. Neuhoff Adiabatentafeln, Abhandl. d. Kgl. Preuß. Met. Instituts Band I, No. 6, Berlin, sowie Bezold Ges. Abh. a. d. Geb. d. Meteorologie u. d. Erdmagn., Braunschweig 1906.

Digitized by Google

Eine solche Schicht, in der also das Spiel auf und niedersteigender Ströme ausgeschlossen ist, ist stabil geschichtet, stabil auch gegenüber der unteren Passatschicht, für deren Mischungsvorgänge sie eine scharf definierte obere Begrenzung bildet. Ob nun noch an der Berührungstelle ein Temperatursprung oder eine Inversion liegt, ist an und für sich unwesentlich. Nur wird in diesem Fall auch das vorübergehende Eindringen hochsteigender (durch Trägheit) Luftvolumina mehr oder minder erschwert.

Für die Entstehung des langsamen Temperaturgefälles in mittleren Schichten möge man berücksichtigen, daß diese Schichten häufig mit Wolken erfüllt sind. Fallen letztere in Form von Regen heraus, so bleibt zunächst eine dampfgesättigte Schicht mit unverändertem Temperaturgefälle (der Kondensationsadiabate) bestehen. Senkt sich die Schicht dann auch nur wenig, so wird aus dem früher indifferenten Gleichgewicht ein stabiles im Trockenstadium. Dazu kommt die temperaturausgleichende, stabilisierende Wirkung der Regentropfen und die Temperaturleitung selber innerhalb der Schicht.

Die Kondensationsbasis für die Luft der untersten Schicht liege bei 1100 m. Nun komme die untere strömende Passatschicht über ein Inselchen, auf dem die Temperatur der Erdoberfläche um 0.5° höher sei. Dann wird auch die darüber hinströmende Luft diese Temperatur annehmen: sie wird leichter als ihre Umgebung und steigt empor. (Vgl. Tabelle).

Höhe	vorhandene Temperatur	Temp. d. aufsteig. Volumens	Δ (Auftrieb)
0	28.0	28.5	0.5
1000	18.0	18.5	0.5
1100	17.3	17.5	0.2 Min. (krit. Punkt)
2000	11.0	13.5	2.5

Bei 1100 m wird sie nur noch 0.2° wärmer sein als die benachbarte Luft, aber nun tritt Kondensation ein, und der Auftrieb der sich nun nach der Kondensationsadiabate, also nur sehr langsam beim Steigen abkühlender Luft (eine Folge der frei werdenden sogenannten Verdampfungswärme) gegenüber der Nachbarschaft nimmt nun beständig zu, wie die kleine Tabelle dies an einem Beispiel zeigt; bis das Temperaturgefälle der erreichten

Digitized by Google

Schichten sich verlangsamt, oder Verdunstung und Reibung dem weiteren Emporstreben ein Ende bereiten.

Es ist wohl klar, daß die Zahlen in jedem einzelnen Fall verschieden aussehen werden. Bei langsamem Temperaturgefälle der oberen Schicht, verbunden vielleicht mit einer Inversion, oder bei hoch gelegener Kondensationsbasis mag die Wolkenbildung aus der unteren Schicht überhaupt unterdrückt werden. Kommt die Luft aber über ihren kritischen Punkt hinweg, so wird die Erscheinung wie ein Saugrohr oder ein Schornstein wirken, und auch weniger stark erwärmte Luft der Umgebung unten am Erdboden wird herangezogen und in die Höhe gefördert werden. Es ist dann nicht mehr erforderlich, daß die von unten nachsteigende Luft den kritischen Punkt (in unserm Fall bei 1100 m) selbst zu überwinden vermag: die über ihr steigende Luft saugt nach; sie selbst wird durch die Wirkung der Trägheit weiter getrieben, während die seitwärts des kritischen Punktes gelegenen Volumina sich nicht zusammenschließen, sondern ebenfalls infolge Trägheit verharren, und in größerer Höhe gewinnt sie ja an Auftrieb, um diese Saugwirkung selbst übernehmen zu können. — Das Gesagte wird ausreichen, um die Wirkungsweise der großen Böen zu erklären. Die bedeutenden Regenmengen der tropischen Böen und Gewitterwolken werden verständlich, wenn man die hohen Temperaturen berücksichtigt neben der geringeren Stabilität der Schichtung. Bei einer Temperatur von 25° unten, wie sie Samoa ziemlich gleichmäßig aufweist, und einer Kondensationsbasis von 1000 m, wie sie wohl mittleren Verhältnissen im Passat entspricht, sind im kg Luft rund 15 g Wasser in Dampfform enthalten, während man in mittleren Breiten auf rund 5 g pro kg Luft rechnen kann.

So werden die Luftmassen der Passatströmung auf ihrem Wege zur Stelle stärkster Erwärmung stoßweise gehoben, und man darf sich nicht eine schematische untere, dem meteorologischen Aequator zustrebende Schicht denken, und darüber eine von dort zurückkehrende, vielmehr tritt während des Strömens eine mehr oder minder starke Mischung der Schichten und fortgesetzte Zerstörung der sich immerfort neubildenden Antipassatschicht ein, die beim Absteigen trocken und relativ warm zu werden strebt.

Anstelle der aufsteigenden, meist energische Regen niedersendenden Luftmassen müssen nun entweder andre herabstürzen, oder die unterste Schicht muß mehr zusammensinken.

Letzterer Fall dürfte im allgemeinen in der eigentlichen Passatzeit eintreten, zu der die untere Passatschicht aus relativ kalten,

Digitized by Google

die mittlere Schicht aus wärmeren, und die oberste aus sehr warmen Gegenden stammt.

Man könnte meinen, daß der Ursprung jedenfalls der oberen beiden Schichten gleichgültig ist, da sie bei stabiler Schichtung unabhängig vom Erdboden bleiben. Hierauf wäre zu erwidern, daß die Geschwindigkeiten der oberen Schichten nur klein sind, sodaß jeder Temperatureinfluß auf dem langen Wege sich ziemlich stark geltend machen wird, und ferner, daß auch die vereinzelt emporstoßenden Böenköpfe, ohne daß sie die Schichtung selbst zerstören, einen Temperatureinfluß der Erdoberfläche und der untersten Luftschicht auf die oberste, wenn auch durch Temperaturinversionen von dieser getrennte zustande bringen können. Daher erscheint es möglich, daß auch der Zustand einer stabil gelagerten, scheinbar von der Erde unabhängigen Luftschicht in geringem Maße von dem durchmessenen Wege beeinflußt wird.

In der Passatzeit ist die Lagerung der obersten Schicht verhältnismäßig stabil. Auch regnerische Böenwolken, die eine energische Hebung der Passatluftvolumina in die zweite Schicht und ein Zusammensinken der ersteren Strömung herbeiführen, vermögen in dieser Zeit nicht in den obersten Strom einzudringen. Sie breiten sich an seiner unteren Begrenzungsfläche zwischen 2000 und 4000 m aus.

Anders in der sogenannten Regenzeit, also dem Südsommer. Hier kommt die oberste Schicht aus relativ kalten, die unterste dagegen aus warmen Gegenden, sodaß die Neigung zu labilem Gleichgewicht vorhanden ist. Wenn in dieser Zeit ein Emporddringen der erdnahen Luft in die oberste Schicht stattfindet, so stürzen die Luftmassen dieser, Richtung und bis zu gewissem Maße auch Geschwindigkeit beibehaltend, als schwerer W bis N auf die Erde herab; hierbei scheint mir ein Vorgang wie bei dem vorhin geschilderten Beispiel (Saugrohr), nur in umgekehrter Richtung, vorzuliegen. Das wären etwa die Erscheinungen, die als Unterbrechung des Passats der sogenannten Regenzeit mit ihren meist nur kurze Zeit währenden, aber oft tagelang rasch aufeinander folgenden Regenböen ihr Gepräge geben.

Wir hatten weiter oben die Frage offen gelassen, ob in dem Zustand der obersten Luftschicht eine Aenderung anzunehmen ist, oder ob das Südwärtsgehen der Sonne und die stärkere Erhitzung der Erdoberfläche auf 14° Südbreite allein schon genügenden Grund gibt zu labilem Gleichgewicht.

Um hierüber einen Überblick zu bekommen, benutzen wir die Angaben der Veröffentlichung des Samoa-Observatoriums, die die

Digitized by Google

bisherigen meteorologischen Ergebnisse enthält. (Ergebnisse der Arbeiten d. Samoa-Observ. d. Kgl. Ges. d. Wiss. z. Göttingen II. 1908, Abhandl. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. Neue Folge Band VIII Nr. 2.)

Dort finden wir als mittlere Luftdruckschwankung im Laufe eines Jahres 3.5 mm, als zugehörige Temperaturschwankung am Observatorium 1.4°. Ein Blick in die Höhentabelle zeigt uns, daß wenn die Temperaturschwankung bis ca. 1000 m gereicht hat, die zugehörige Luftdruckschwankung von 3.5 mm durch sie erklärt ist. Wenn nun auch die Temperaturschwankung in 1000 m Höhe wahrscheinlich etwas geringer gewesen sein wird als 1.4°, so daß eine geringere Temperaturschwankung noch erheblich höher hinaufgereicht hat, so können wir immerhin sagen, daß die Luftdruck- und Temperaturbeobachtungen es unwahrscheinlich machen, daß eine Aenderung der Temperatur in mehr als 3000 m Höhe stattgefunden hat. Da wir nun andererseits wissen, daß viel größere Höhen in der Regenzeit von den Böenwolken erreicht werden, und auf diese Weise die Temperatur vom Boden aus erhöht wird, so ist wohl der Schluß berechtigt, daß die ursprüngliche Temperatur der obersten Schicht im Südsommer niedriger ist als im Südwinter, daß sie aber durch die emporstoßenden Böenköpfe auf die Temperatur in letzterer Jahreszeit erhöht wird.

Wir können demnach mit einiger Wahrscheinlichkeit die erdnahe Schicht für die ausschlaggebende halten. Sie bildet den Passat, und ihre Überhitzung gibt den Anstoß zu den NW-Böen der Regenzeit.

Fassen wir nun zum Schluß die Resultate über die allgemeine Zirkulation zusammen.

1. Bemerkenswert ist an der erdnahen Schicht, daß sie ihre Strömungsrichtung im wesentlichen auch in der Regenzeit beibehält [1]), zu der die Sonne südlich von Samoa steht. Das hängt vielleicht damit zusammen, daß das ziemlich unverändert bleibende ost-westliche Luftdruck- und Temperaturgefälle so stark ist. Sie weist auch in Samoa in der unmittelbaren Nähe des meteorologischen Aequators die gleiche Mächtigkeit auf, die im NE-Passat dicht bei den Roßbreiten gefunden wurde.

2. Die ihr entsteigenden Luftvolumina werden von einer zweiten (Antipassat-)Schicht aufgenommen, die von ca. 1000—

1) In den gelegentlichen W- und N-Böen sahen wir Einflüsse fremder Schichten.

Digitized by Google

4000 m reicht. Diese Schicht strömt entsprechend ihrer größeren Mächtigkeit nur langsam nach Süden. Als südnördliche Komponente des SE-Passates kann man im allgemeinen wohl 2—3 m/s annehmen, abgesehen von der lokalen Unregelmäßigkeit in Samoa. Werden die Passatvolumina in einer Schicht von der dreifachen Mächtigkeit südwärts geführt (Antipassat), so müßte theoretisch als Südkomponente dieser Strömung eine Geschwindigkeit von 1 m/s erwartet werden. Das entspricht gut den Beobachtungen.

Nun liegt es auf der Hand, daß bei einer so geringen Geschwindigkeit schon geringe, lokal auftretende Kräfte imstande sein werden, die Strömungsrichtung gelegentlich ganz zu verkehren. Das ist so selbstverständlich, daß wir eine besondere Erörterung über die häufigen Schwankungen in der zweiten Schicht nicht für erforderlich halten.

Wir erinnern uns, daß Herr Hergesell über dem NE-Passat des atlantischen Ozeans eine Schicht fand, deren Trockenheit auf ein Absteigen schließen ließ, deren Strömungsrichtung aber, und diesmal bei der Mehrzahl der Beobachtungen, nach Süden statt nach Norden wies. Herr Hergesell nannte diese Schicht den „relativen" Antipassat.

In der Tat wird bei dem Antipassat des atlantischen Ozeans, der theoretisch nach Norden mit etwa 1 m/s strömen sollte, ebenso leicht wie bei dem Antipassat in Samoa die Strömungsrichtung durch lokale Einflüsse geändert werden können.

Herr Hergesell stellte seine Untersuchungen in der Nähe des nordafrikanischen Kontinents an. Dieser wird erheblich stärker erhitzt, als die benachbarte See, und erzeugt analog europäischen Tiefdruckgebieten ein lebhaftes Südwärtsströmen der Luft auf See.

Hierdurch wird die Passatströmung verstärkt und die Antipassatströmung leicht umgekehrt werden können.

Es ist bekannt, daß die Untersuchungen Herrn Hergesells auf Widerspruch, unter anderm von seiten Herrn Teisserenc de Borts gestoßen sind: nach reiflicher Ueberlegung können wir indessen nicht umhin, der Meinung Herrn Hergesells beizustimmen. Die von ihm eingeführte Bezeichnung eines relativen Antipassats wäre in Samoa allerdings im allgemeinen nicht anzuwenden, sie wäre vielmehr zweckentsprechend auf die einzelnen Fälle zu beschränken, wo die Schicht in andrer als der normalen Richtung strömt.

3. Ueber die oberste beobachtete Schicht von 4—15000 m läßt sich nichts bestimmtes aussagen. Die Beobachtungen zeigten

Digitized by Google

nie, daß sie wesentlich mit Wolken erfüllt gewesen wäre. Es ist aber möglich, daß dieser Fall nur eintritt, wenn sie durch darunter liegende Wolken verdeckt ist.

Denn vermutlich ist auch sie, wenn auch in geringerer Weise als die beiden untersten Schichten, an dem Ausgleich der Gleichgewichtsstörungen der Atmosphäre beteiligt, die durch die ungleiche Erwärmung der Erdoberfläche hervorgerufen werden und die die Grundlage aller meteorologischen Vorgänge bilden.

Digitized by Google

Konforme Abbildung der Oberfläche einer räumlichen Ecke.

Von

Robert König.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung am 26. Februar 1910.

Ich möchte hier kurz auseinandersetzen, wie auf Grund des Dirichlet'schen Prinzips — in der von Hilbert streng begründeten[1]) und neuerdings modifizierten[2]) Fassung — die Erledigung des allgemeinen Eckenabbildungsproblems gelingt, dessen Bedeutung für die Riemann'sche Funktionentheorie hinreichend bekannt ist[3]).

Es sei also ein einfach zusammenhängender, von einer gewöhnlichen Kurve berandeter Bereich $\mathfrak{Q}$ gegeben, der von einer endlichen Anzahl regulär analytischer Flächenstücke gebildet wird, welche in einem Punkte E zusammenstoßen. Ich setze dabei voraus, daß jedes einzelne Flächenstück mit einem von Null verschiedenen Winkel an E heranreicht. Den zweifach zusammenhängenden Bereich, der aus dem nicht abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{Q}$ durch Fortnahme des Eckpunkts entsteht, bezeichne ich der Kürze wegen mit $\overline{\mathfrak{Q}}$.

---

1) D. Hilbert, Über das Dirichlet'sche Prinzip. Math. Ann. Bd. 59.

2) D. Hilbert, Zur Theorie der konformen Abbildung, Göttinger Nachrichten 1909 (p. 314—323). S. auch P. Koebe: „Über die Hilbert'sche Uniformisierungsmethode". Gött. Nachr. 26. Februar 1910.

3) Eine Methode zur Lösung des allgemeinen Eckenabbildungsproblems hat zum ersten Mal P. Koebe in seiner Note „Konforme Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke auf die schlichte ebene Fläche eines Kreises", Göttinger Nachrichten 1908, skizziert.

Digitized by Google

Das Problem, den Bereich Ω (präziser: das Innere von Ω) konform — im Eckpunkt selbst nur stetig — auf die schlichte, mit einem geradlinigen Schlitz versehene Ebene abzubilden, ist offenbar aequivalent mit der Auffindung einer eindeutigen komplexen Funktion des Ortes auf der Fläche $U+iV$, welche in einem Punkt O von $\overline{\Omega}$ einen Pol erster Ordnung besitzt, sich sonst in $\overline{\Omega}$ regulär verhält, im Eckpunkt stetig ist und deren Imaginärteil V auf dem Rande einen konstanten Wert hat.

Die Untersuchung gliedert sich in zwei Teile. Der erste betrifft den Existenzbeweis für den Realteil U, der zunächst nur in $\overline{\Omega}$ definiert wird; der zweite den Nachweis, daß die komplexe Funktion, deren Realteil U ist, auf dem Rande und vornehmlich im Eckpunkt das gewünschte Verhalten zeigt.

Ad 1) gilt der Satz: Es existiert in $\overline{\Omega}$ eine eindeutige Potentialfunktion U, welche daselbst überall regulär ist ausgenommen den O-Punkt, wo sie in vorgeschriebener Weise von der ersten Ordnung unendlich wird und für welche das Dirichlet'sche Integral

$$\iint_{\Omega^*} \Delta_1 U \, d\omega$$

ein Minimum wird. $\Delta_1 U$ bedeutet hierbei den bekannten Beltrami'schen Differentialparameter erster Ordnung, $d\omega$ das Flächenelement von Ω, und Ω^* einen Bereich, welcher aus Ω dadurch entsteht, daß man die Umgebung des 0-Punktes durch eine analytische Kurve ausschließt. Zum Vergleich sind nur solche Funktionen zugelassen, welche auf dieser Kurve dieselben Werte wie U annehmen.

Was den zweiten Teil anlangt, so stellt sich zunächst als direkte Folge der Minimaleigenschaft von U heraus, daß der zu U gehörige Imaginärteil V die oben geforderten Eigenschaften, insbesondere der Eindeutigkeit und Stetigkeit im Eckpunkt, besitzt. Vor allem handelt es sich aber um die Entscheidung der Frage, ob auch der Realteil U selbst im Eckpunkt sich bestimmt verhält oder, wenn wir die durch die komplexe Funktion $U+iV$ vermittelte Abbildung des Bereiches $\overline{\Omega}$ auf die U-V-Ebene betrachten, ob sich der dem Eckpunkt entsprechende Schlitz auf einen Punkt reduziert[1]).

1) Auf diesen Nachweis geht Herr P. Koebe l. c. nicht ausführlich ein. Die mir nach Beendigung meiner Untersuchungen durch mündliche Mitteilung bekannt gewordene bezügliche Methode des Herrn Koebe ist von der meinigen wesentlich verschieden.

Digitized by Google

Daß dem in der Tat so ist, zeige ich auf die Art, daß ich auf der Fläche eine Folge von Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ konstruiere, welche den Eckpunkt umschließen und sich im Limes für $n = \infty$ auf diesen selbst zusammenziehen und für welche der Wert des Integrals $\int_{C_n} \sqrt{\Delta_1 U}\, ds$ gegen Null konvergiert. Dasselbe ist aber nichts anderes als der Ausdruck für die Länge der Bildkurven in der U-V-Ebene und diese müßte, wenn der Schlitz die von Null verschiedene Länge a hätte, notwendig oberhalb der positiven Größe $2a$ bleiben, was einen Widerspruch ergäbe.

Wegen einer ausführlichen Darstellung verweise ich auf eine demnächst in den Math. Annalen erscheinende Arbeit.

Göttingen, Februar 1910.

Digitized by Google

Ueber das Verhalten des Nervensystems nach Exstirpation der Extremitätenanlagen beim Frosch.

Vorläufige Mitteilung einiger Ergebnisse. (Mit 5 Figuren.)

Von

Bernhard Dürken (Göttingen).

Vorgelegt von E. Ehlers in der Sitzung am 26. Februar 1910.

Seit einiger Zeit beschäftigt mich eine Untersuchung, welche die Beziehungen der Extremitäten zur Ausgestaltung des Zentralnervensystems, insbesondere des Gehirns bei Wirbeltieren zum Gegenstand hat. Diese Aufgabe enthält ein Doppeltes: einmal eine entwicklungsphysiologische Frage, die man als das morphogenetische Problem hinstellen kann, dann einen morphologischen Teil, der vergleichend-anatomisch, aber auch experimentell zugänglich sein muß.

Ich möchte nun hier nicht näher auf die einzelnen Probleme und die bei ihrer Behandlung auftauchenden Fragen eingehen, sondern nur kurz über einige vorläufige Ergebnisse berichten, wie sie bei Versuchen an Froschlarven zutage getreten sind, da der Abschluß der genannten Untersuchung erst in einiger Zeit zu erwarten ist.

Wie sich schon aus vorhergehendem ergibt, suchte ich der Lösung des Problems auf experimentell-entwicklungsgeschichtlichem Wege näher zu kommen. Die Versuche wurden im Frühjahr 1908 an Krötenlarven (*Bufo vulgaris*) begonnen, doch lieferten sie nur geringe Ergebnisse, da sie infolge äußerer Verhältnisse vorzeitig abgebrochen werden mußten. Im Frühjahr 1909 wurden die Experimente an Froschlarven (*Rana temporaria*) mit größerem Erfolge wiederholt, doch hat sich eine nochmalige Wiederholung, die im

Digitized by Google

Frühling dieses Jahres (1910) stattfinden soll, als notwendig herausgestellt. Die Versuche bestanden darin, daß möglichst frühzeitig den jungen Larven die kleinen Extremitätenknospen exstirpiert wurden; dabei bemühte ich mich, tiefergehende Verletzungen zu vermeiden, um eben nur die Extremitätenanlage zu entfernen. Erfolgte eine Regeneration, so wurde eine nochmalige, eventuell eine dritte Operation vorgenommen. Die Larven vertragen die Operation ziemlich gut, doch gehen namentlich nach Amputation der vorderen Beinknospe sehr viele ein. Die Weiterzüchtung erfolgte teilweise bis zum völligen Abschluß der Metamorphose und darüber hinaus. Während die Ernährung der Kaulquappen ja gar keine Mühe verursacht, ist die genügende Fütterung der Tiere, sobald sie das Wasser verlassen haben, mit großen Schwierigkeiten verknüpft, zumal wenn durch das Fehlen einer oder mehrerer Extremitäten die Ortsbewegung des Tieres mehr oder minder beschränkt ist. Es gelang mir zwar, (operierte) junge Frösche bis zu zwei Wochen nach Abschluß der Metamorphose am Leben zu erhalten, doch ist diese Zeit noch zu kurz, da die Markscheidenentwicklung, welche für die Untersuchung von wesentlicher Bedeutung ist, in den meisten Teilen des Gehirnes kaum eben begonnen hat.

Die Untersuchung erfolgte größtenteils an genau orientierten Querschnitten, doch ist erst ein verhältnismäßig kleiner Teil des vorliegenden Materials zu Präparaten verarbeitet. Hauptsächlich berücksichtigt werden sollen in dieser vorläufigen Mitteilung die Ergebnisse bei Amputation der linken Hinterextremität.

Die Amputation der Anlage der linken Hinterextremität wurde ausgeführt in den Tagen vom 11.—19. Mai; das älteste zur Untersuchung benutzte Exemplar dieser Operationsserie wurde am 12. August konserviert, sodaß es nach der Operation mindestens noch 85 Tage lebte. Die Länge der zu den Operationen benutzten Larven betrug vom Mund zum After 5—6 mm.

Die Form der amputierten Extremität ist eine 0,3—0,5 mm lange, runde Knospe. Irgendwelche Differenzierungen sind in ihr auf diesem Entwicklungsstadium noch nicht bemerkbar. Sie besteht aus gleichartigem, dichtem Mesenchymgewebe und wird von einem zweischichtigen Epithel umhüllt. Die zum Lumbo-Sacralplexus gehörenden Nerven (VIII., IX., X. Spinalnerv) lassen sich nur bis in den proximalsten Teil der Beinknospe verfolgen; diese zeigt weiter distal noch keine erkennbaren Spuren eines nervösen Gewebes, sodaß bei der Amputation der Knospe das periphere Nervensystem nur in seinem distalsten Teile verletzt wird. Das

Digitized by Google

ganze Nervensystem ist noch marklos; im Gehirn und Rückenmark sind bereits Fasermassen gebildet, doch sind in den motorischen Kernen der Extremitätennerven im Rückenmark spezifisch gestaltete Ganglienzellen noch nicht zu erkennen.

Die Annahme nun, daß infolge der Amputation der Extremitätenanlage irgendwelche Folgerscheinungen im Zentralnervensystem eintreten würden, welche es ermöglichen, die zu den Extremitäten in unmittelbarer oder auch mittelbarer Beziehung stehenden Teile des Zentralnervensystems festzustellen und dadurch eine Grundlage auch für die morphologische Betrachtung des Wirbeltiergehirns zu gewinnen, hat sich bestätigt.

Mit Sicherheit konnte ich bis jetzt solche Einwirkungen, die als anormale Asymmetrien des Nervensystems in die Erscheinung treten, nachweisen in den Spinalganglien und den zugehörigen peripheren Nerven, den dorsalen wie ventralen Wurzeln, im Rückenmark, im Mittelhirn und in den Hemisphären des Vorderhirns; ziemlich sicher auch im Nachhirn (Oblongata), Hinterhirn (Kleinhirn) und vielleicht auch im Zwischenhirn; doch ist hier noch eingehendere Prüfung erforderlich. Außer im Nervensystem treten auch andere anormale Asymmetrien auf, besonders im Becken. Auf dem Entwicklungsstadium der Operationszeit ist von ihm noch nichts vorhanden; auch fehlt noch jeder Ansatz zur Wirbelbildung.

Die der operierten Seite zugehörige Beckenhälfte wird nun überhaupt nicht gebildet. Der Querfortsatz des Sakralwirbels, durch den das *Ileum* mit der Wirbelsäule verbunden wird, ist auf der extremitätenlosen Seite zwar vorhanden, aber wesentlich schwächer und kürzer ausgebildet als auf der normalen. Schon äußerlich fällt diese Halbbildung des Beckens stark auf; das vorhandene (rechte) Hinterbein steht fast genau in der geradlinigen Verlängerung der Wirbelsäule.

Wenn ich vorhin von anormalen Asymmetrien des Gehirns als Folgeerscheinung des einseitigen Ausbleibens der Extremitätenbildung sprach, so ist hinzuzufügen, daß im Zwischenhirn des Frosches eine normale Asymmetrie vorhanden ist, da die beiden am Dache dieses Hirnteiles liegenden *Ganglia habenulae* ungleich gestaltet und von ungleicher Größe sind, ein Verhalten, das in der Literatur bisher ungenügend betont wurde. Insbesondere weist das linke Ganglion einen komplizierteren Bau und reichlichere Fasermassen auf als das rechte. Wie weit jedoch die im Zwischenhirn nicht immer in gleichem Grade auftretenden Asymmetrien normal sind oder auf dem künstlich erzeugten Mangel

Digitized by Google

von Extremitäten beruhen, bedarf noch der genaueren Untersuchung.

Gegen Abschluß und nach Vollendung der Metamorphose zeigen die Spinalganglien und die peripheren Nerven des Lumbo-Sacralplexus (der VIII., IX., X. Spinalnerv) folgendes Verhalten. Auf der Amputationsseite sind die Nerven ebenso vorhanden wie auf der normalen (rechten) Seite. Sie lassen keinerlei Degenerationserscheinungen erkennen, aber ihr Durchmesser ist wesentlich geringer als der der normalen Nerven, wenn er auch nach der Amputation zugenommen hat. Der IX. Spinalnerv, der ganz in den Lumbo-Sacralplexus aufgeht, fehlt also ebensowenig, wie der VIII. und X., ist aber nur sehr schwach ausgebildet. Als Beispiel lasse ich die Durchmesser der drei Nerven von einem Frosch mit beginnender Reduktion des Ruderschwanzes folgen; gemessen ist kurz vor dem Eintritt der Nerven in den Plexus.

	Normal (rechts)	Anormal (links)
VIII.	45,6 μ	22,8 μ
IX.	102,6 μ	28,5 μ
X.	57 μ	22,8 μ

Die Nerven der linken Seite lassen sich distal von diesem Plexus noch ein gutes Stück verfolgen, bis sie schließlich auf der Höhe des *Acetabulums* der rechten Seite zwischen dem übrigen Gewebe undeutlich werden. Ihre distale Endigungsweise ist noch nicht im einzelnen festgestellt.

In anderen Fällen zeigen jedoch die Nerven der Amputationsseite ein ganz anderes, aber nicht minder auffälliges Verhalten: sie endigen dann nicht, wie eben angegeben, auf der gleichnamigen (linken) Seite, sondern treten über den Enddarm hinweg zur rechten Seite hinüber, wo sie mit dem normalen (rechten) Lumbo-Sakralplexus verschmelzen. Die quere Verbindung wird dargestellt durch einen dicken, dicht über dem Enddarm verlaufenden Nervenast, der aus der Vereinigung der drei linksseitigen Beinnerven hervorgeht und an der Verschmelzungsstelle des rechtsseitigen *Nervus ischiadicus* und *N. cruralis* in die rechten Beinnerven derart eintritt, daß eine Unterscheidung der rechts- und linksseitigen Bestandteile des Vereinigungsproduktes völlig unmöglich ist. Bei dieser Sachlage sind die linksseitigen Nerven, welche ebenso wie der quere Verbindungsstrang eine normale histologische Beschaffenheit aufweisen, zwar ein wenig schwächer als die rechtsseitigen, doch ist der Unterschied nicht allzu auffallend; zugleich zeigen sich im zentralen Nervensystem keine anormalen Asymmetrien,

Digitized by Google

höchstens, daß die linksseitigen Spinalganglien einen etwas kleineren Durchmesser haben, als die entsprechenden rechtsseitigen.

Deutlicher noch als im peripheren System treten die anormalen Asymmetrien als Folgeerscheinungen der Amputationen in den Spinalganglien zutage. Auch in diesen sind irgendwelche Degenerationserscheinungen nicht nachweisbar; die Größen der betreffenden Ganglien seien von demselben Objekt, dem die Maße für die peripheren Nerven entstammen, hier angegeben.

Größte Durchmesser der drei Lumbo-Sacralganglien (VIII., IX., X.):

		Normal (rechts)	Anormal (links)
X.	1) in der Ebene des Querschnitts	376,2 μ	102,6 μ
	2) senkrecht zu der Ebene des Querschnitts	300 μ	165 μ
IX.	1)	364,8 μ	171 μ
	2)	300 μ	150 μ
VIII.	1)	273 μ	218 μ
	2)	165 μ	60 μ

Vergleicht man die Maße der Spinalganglien am Ende der Metamorphose mit den entsprechenden Durchmessern zu der Zeit, in welcher die Exstirpationen der Beinknospe vorgenommen wurden, so ergibt sich zunächst, daß sämtliche Ganglien dann noch ziemlich von gleicher Größe sind, daß also die Ganglien der Beinnerven sich vor den übrigen noch nicht, wie später, durch sehr auffallende Größenunterschiede auszeichnen. Die Zunahme der Größe erfolgt zugleich mit der Ausbildung des zugehörigen Beines. Unterbleibt dieselbe infolge Exstirpation der Anlage, so nehmen die zugehörigen Ganglien zwar noch etwas an Größe zu, bleiben aber bedeutend hinter denen der normalen Seite zurück. Die Entwicklung erleidet somit eine Hemmung.

Sowohl die dorsale wie ventrale Wurzel der drei in Rede stehenden Ganglien sind links wesentlich schwächer als rechts, und dementsprechend ist auch der Querschnitt des Lendenmarks stark asymmetrisch; die linke Hälfte des Rückenmarksquerschnittes ist bedeutend kleiner als die rechte; mit anderen Worten, eine Lendenanschwellung des Rückenmarks ist nur auf der rechten, mit einem normalen Bein in Beziehung stehenden Seite vorhanden. Die Asymmetrie der Rückenmarkshälften wird verursacht durch das Fehlen bezw. durch die mangelhafte Ausbildung der großen motorischen Ganglienzellen des linken Vorderhornes und durch den linksseitigen Ausfall der mit den Wurzeln eintretenden auf-

Digitized by Google

steigenden Bahnen; namentlich der Mangel dieser Bahnen in den Dorsalsträngen ist augenfällig.

Cranialwärts wird die Asymmetrie des Rückenmarks undeutlich und bei Beginn der Cervikalanschwellung ist von ihr nichts wahrzunehmen. Eine anormale Asymmetrie wird erst wieder vorgefunden im Gehirn.

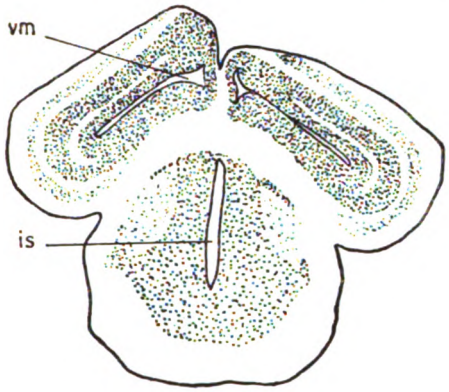
Durchaus nicht alle Frösche, denen eine oder auch mehrere Beinknospen exstirpiert wurden, zeigen als Reaktionen auf diesen operativen Eingriff anormale Asymmetrien im Gehirn, während solche im Rückenmark fast immer vorhanden zu sein pflegen. Ein Grund für das Ausbleiben dieser Reaktionen dürfte vielleicht wohl zu suchen sein in der sekundären Verbindung des zu der amputierten Anlage gehörigen Nervenplexus mit dem normalen Plexus des gegenseitigen Beines. Aber auch von vornherein lassen sich Gründe beibringen für das gelegentliche Ausbleiben jener Reaktionen. Einmal spielt offenbar die Zeit der Operation eine Rolle; je früher die Exstirpation erfolgt, um so besser wird der Organismus auf den Eingriff reagieren. Dann steht das Rückenmark in unmittelbarerer Beziehung zu den Extremitäten als das Gehirn, und außerdem hängen die Gehirnzentren, insbesondere als Assoziationszentren, noch zugleich zusammen mit ganz anderen peripheren Gebieten. Wenn nun das Ausbleiben der Beinentwicklung im Gehirn anormale Bildungen zur Folge hat, so darf man von vornherein annehmen, daß auch andere periphere Gebiete in solchen Korrelationen zum Gehirn stehen, und daß durch ungestörtes Bestehenbleiben dieser der Ausfall der Korrelationen zu der amputierten Beinanlage gewissermaßen wettgemacht wird, sodaß keine Störung in der normalen Formbildung des Hirns eintreten kann. Daher darf es auch nicht befremden, wenn in einem Teile des Gehirns anormale Asymmetrien aufgefunden werden, in einem anderen desselben Objektes dagegen nicht, während letzterer bei einem zweiten Individuum vielleicht stark beeinflußt ist.

Vor allem augenscheinlich zeigen sich die Einwirkungen der Beinexstirpationen im Mittelhirn und den Hemisphären des Vorderhirns. Im Mittelhirn treten sie hauptsächlich am Dache zutage. Besser als eine Beschreibung werden die beistehenden Abbildungen die anormale Form des Mittelhirnes veranschaulichen, die je einen Querschnitt durch den vorderen und hinteren Teil des Mittelhirns von zwei verschiedenen Tieren darstellen. Auf Einzelheiten möchte ich in dieser vorläufigen Mitteilung nicht eingehen.

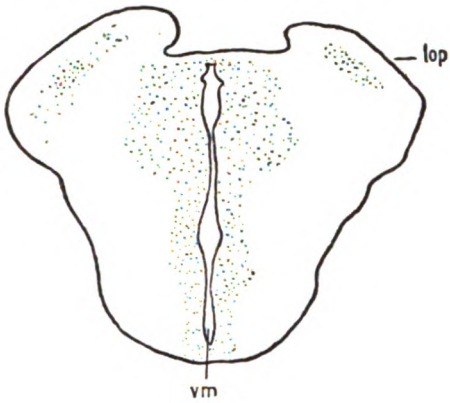
Die mit der Exstirpation der linken Hinterbeinanlage verbundene eigentümliche Form der Hemisphären des Vorderhirns

Digitized by Google

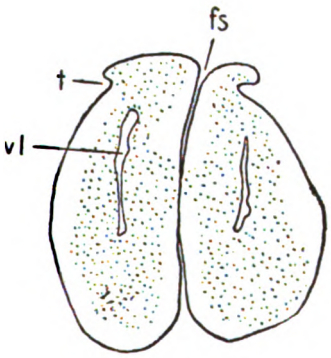
zeigen die folgenden Abbildungen. Während im Rückenmark und Mittelhirn nicht ohne weiteres ersichtlich ist, ob nur die linke (gleichseitige) Hälfte in Mitleidenschaft gezogen ist, zeigt der Schnitt



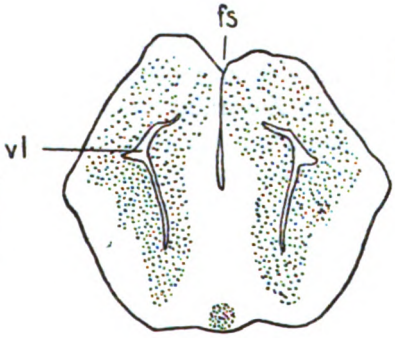
Figur 1.



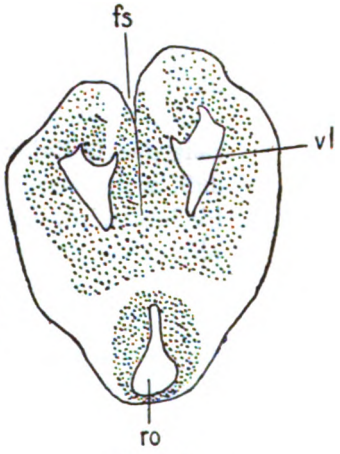
Figur 2.



Figur 3.



Figur 4.



Figur 5.

Fig. 1—4. Querschnitte durch das Gehirn von *Rana temporaria* nach Exstirpation der Anlage des linken Hinterbeines.

Alle Figuren von Tieren gegen Abschluß der Metamorphose.

fs *Fissura sagittalis;* is *Isthmus*; lop *Lobus opticus*; ro *Recessus opticus*; vl *Ventriculus lateralis*; vm *Ventriculus mesencephali.*

Fig. 1. Mittelhirn, hintere Region; das Objekt lebte nach der Operation mindestens noch 44 Tage.

Fig. 2. Mittelhirn, vordere Region. 62 Tage nach der Operation.

Fig. 3, 4. Vorderhirn, vordere und mittlere Region. Dasselbe Objekt wie in Fig. 1.

Fig. 5. Querschnitt durch das Vorderhirn von *Rana.* 49 Tage nach Exstirpation der Anlage des linken Vorderbeines.

Digitized by Google

durch den vorderen Teil der Hemisphären, daß auch die rechte (gekreuzte) Seite Anomalien aufweist (bei +), doch überwiegt immerhin die Asymmetrie der linken Seite. Ein ganz anderes Ergebnis lieferte die Exstirpation der Anlage der linken Vorderextremität, wie die folgende Figur lehrt. In diesem Falle ist die rechte Hemisphäre bedeutend kleiner als die linke. Wie weit hier eine Gesetzmäßigkeit in der gleichseitigen und gekreuzten Lokalisation der Extremitäten vorliegt, kann vorläufig noch nicht entschieden werden.

Daß auch die übrigen Gehirnteile der operierten Tiere anormale Asymmetrien aufweisen, wurde schon erwähnt: hier soll nicht näher darauf eingegangen werden.

Es ist natürlich verfrüht, aus den mitgeteilten Ergebnissen im einzelnen schon sichere Schlüsse ziehen zu wollen. Ich behalte mir vor, in einer ausführlichen Untersuchung, in der auch die Literatur gebührende Beachtung finden wird, darauf zurückzukommen und die angedeuteten Versuche eventuell auch auf andere Formen auszudehnen. Aber jedenfalls steht schon jetzt folgendes fest: zwischen dem Zentralnervensystem der Wirbeltiere und den unmittelbar oder mittelbar zugehörigen peripheren Organen bestehen wenigstens in einer gewissen, noch näher zu bestimmenden Zeit der Individualentwicklung Entwicklungskorrelationen derart, daß, wenn etwa die Entwicklung einer Extremität frühzeitig verhindert wird, im ganzen Zentralnervensystem (wie auch im peripheren) anormale Bildungen Platz greifen. Daher bietet die Methode der embryonalen Amputation einen sehr wichtigen Weg zu dem Verständnis der Entwicklung und der Morphologie des Zentralnervensystems. Sie liefert einerseits entwicklungsphysiologische Ergebnisse, andrerseits kann sie als experimentelle Morphologie bezeichnet werden.

Digitized by Google

Ueber den Thomson-Effekt in Kupfer, Eisen und Platin.

Mit einer Figur.

Von

Otto Berg.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Februar 1910 von Eduard Riecke.

Von den thermoelektrischen Konstanten der Metalle ist der Thomsoneffekt bisher am schwersten der direkten Messung zugänglich. Auch ist es wünschenswert, Messungen an solchen Metallstücken anstellen zu können, die sich auch zur Bestimmung des Halleffektes und der ähnlichen Effekte eignen. Denn um Zahlenwerte zu erhalten, an denen sich die Elektronentheorie der Metalle prüfen läßt, müssen sämtliche Konstanten an einem und demselben Stück Metall bestimmt sein, da die chemische Reinheit für die physikalischen Eigenschaften nicht allein maßgebend ist. Ich habe darum Messungen des Thomsoneffektes nach einer Methode angestellt, welche die Untersuchung der Metalle in Blechform gestattet und habe mich dabei bemüht, einige Fehlerquellen der bisherigen Methoden zu vermeiden. Weiterhin habe ich versucht, möglichst tiefe Temperaturen zu erreichen.

Die üblichen Methoden zur Messung des Thomsoneffekts schließen sich der Anordnung von Le Roux an. Zwei Stäbe des zu untersuchenden Metalls liegen parallel neben einander und werden gemeinsam an dem einen Ende erhitzt, an dem anderen abgekühlt, so daß in Längsrichtung der Stäbe ein Temperaturgefälle entsteht, während je zwei korrespondierende Stellen beider Stäbe auf derselben Temperatur sind. Schickt man nun einen Strom durch die Stäbe, der beide in entgegengesetzter Richtung durchfließt, so wird von je zwei korrespondierenden Stellen beider

Digitized by Google

Stäbe die eine erwärmt die andere abgekühlt. Durch Messung der Temperaturänderung bei Umkehrung des Hauptstromes erhält man einen Effekt, der dem 4-fachen Thomsoneffekt entspricht.

Diese Temperaturmessung geschieht meist durch Thermoelemente aus dünnen Drähten, ebenso wie die Messung des Temperaturabfalls, die zur Berechnung des Thomsoneffektes nötig ist. Werden die Drähte dieser Thermoelemente direkt an die Stäbe angelötet, so ist es nicht möglich, den Thomsoneffekt bei geschlossenem Hauptstrom zu beobachten, da man sich vor Zweigströmen nicht schützen kann. Isoliert man die Thermoelemente, so ist man nicht sicher, daß sie die Temperatur der Stäbe richtig anzeigen.

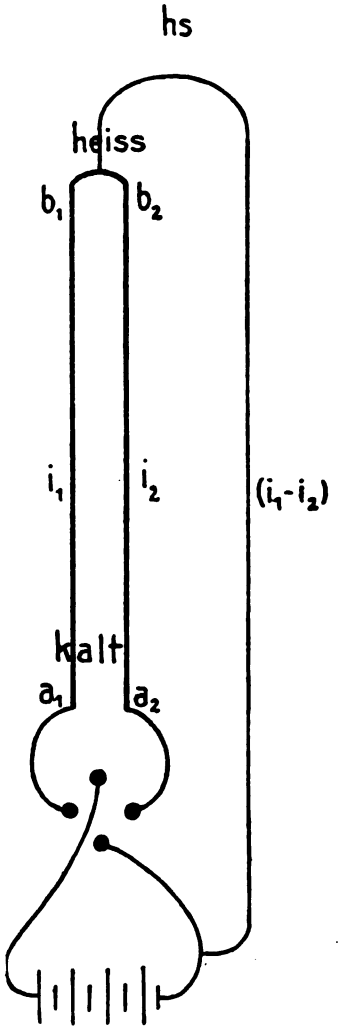
Um die Wärmeentwicklung angeben zu können, welche der beobachteten Temperaturänderung entspricht, schickt man hinterher bei konstanter Temperatur der Stäbe einen Strom durch einen derselben, den man so reguliert, daß dieselbe Temperaturänderung erfolgt, die vorher beobachtet wurde. Dabei können schwer abschätzbare Fehler entstehen, da die Wärmeableitung bei der Hauptmessung und der Hilfsmessung nicht gleich groß ist. Da ferner beide Messungen bei verschiedenen Temperaturen angestellt werden, muß die Aenderung des Widerstandes und der spezifischen Wärme mit der Temperatur berücksichtigt werden, was umständlicher ist als erwünscht.

Endlich liegt diesen Messungen die Annahme zu Grunde, daß die an einer Stelle der Stäbe beobachtete Temperaturänderung der dort entwickelten Wärmemenge entspreche. Diese Annahme ist nicht berechtigt. Stellen wir uns vor, es habe sich in den Stäben eine stationäre Temperaturverteilung eingestellt, die der äußeren und inneren Wärmeableitung und der Wärmeerzeugung bei einer bestimmten Stromrichtung entspricht. Wenn wir jetzt die Stromrichtung umkehren, so ist wegen der Thomsonwärme, die ihr Vorzeichen umkehrt, die Wärmeerzeugung eine andere, also der stationäre Zustand gestört; ein neuer stationärer Zustand kann sich im allgemeinen nur durch longitudinale Wärmeströme wieder einstellen, so daß die Temperaturänderung an einer Stelle durch die Wärmeerzeugung an den benachbarten und weiter entfernten Stellen beeinflußt wird.

Um den Einfluß dieser Wärmeströme nach Möglichkeit zu vermeiden, muß man suchen, den Thomsoneffekt schon in den ersten Sekunden nach Umkehrung der Stromrichtung zu beobachten. Das kann durch eine Art Kompensationsmethode erreicht werden, deren Prinzip in der Figur schematisch dargestellt ist. Dort sind a_1 b_1

Digitized by Google

und $a_2 b_2$ die beiden zu untersuchenden Stäbe. Der Strom einer Akkumulatorenbatterie durchfließt beide Stäbe und kann durch einen Kommutator gewendet werden. Von dem einen Pol der Batterie führt eine Zweigleitung zu den oberen Enden $b_1 b_2$ der Stäbe. Dann ist die Stromstärke in beiden Stäben verschieden; wir bezeichnen sie mit i_1 und i_2. Es möge nun dem Thomsoneffekt eine Erwärmung desjenigen Stabes entsprechen, in welchem Wärmestrom und elektrischer Strom gleichgerichtet sind (positiver Thomsoneffekt); dann legen wir die Zweigleitung am positiven Pol der Akkumulatorenbatterie an und können nun den Zweigstrom $i_1 - i_2$ so regulieren, daß durch ihn die Wirkung des Thomsoneffekts gerade kompensiert wird. Es sei nämlich w der Widerstand der Längeneinheit beider Stäbe, $\Delta\vartheta$ der Temperaturgradient und σ der Thomsoneffekt (d. h. die Wärmemenge, die ein Strom 1 in der Zeiteinheit erzeugt, der zwischen zwei Querschnitten der Stäbe mit den Temperaturen ϑ und $\vartheta - 1$ fließt). Die Bedingung, daß in beiden Stäben auf der Längeneinheit dieselbe Wärmemenge erzeugt wird, lautet dann, wenn der Strom bei a_2 eintritt: $i_1^2 w - \sigma i_1 \Delta\vartheta = i_2^2 w + \sigma i_2 \Delta\vartheta$.



Oder $\sigma = (i_1 - i_2) \cdot \frac{w}{\Delta\vartheta}$.

Der Zweigstrom $i_1 - i_2$, der zur Kompensation dient, ist also von der Stärke des Hauptstromes i_1 unabhängig. Um den Thomsoneffekt in absolutem Maße angeben zu können, ist außer diesem Zweigstrom $(i_1 - i_2)$ nur noch das Verhältnis des Widerstandes (w) zur Temperaturdifferenz $(\Delta\vartheta)$ zwischen denselben zwei Punkten der Stäbe zu bestimmen.

Die Einstellung des Zweigstromes $(i_1 - i_2)$ geschieht nun tatsächlich durch Beobachtungen beim Umwenden des Hauptstromes; außerdem sind die obigen Ueberlegungen insofern zu modifizieren,

Digitized by Google

als Widerstand und Temperaturgradient auf beiden Stäben etwas verschieden sind. Die Berücksichtigung dieser Umstände führt aber mit ausreichender Genauigkeit zu derselben Formel für die Berechnung von σ; nur ist statt des Quotienten $\frac{w}{\Delta\vartheta}$ das Mittel der Werte für beide Stäbe einzusetzen.

Für die weitere Ausführung der Messungen war die Form des Materials (Blech von 0,05 mm Dicke) maßgebend. Das zu untersuchende Blech wurde zu flachen Kästchen von 10—12 cm Länge, 10 mm Breite und 1 mm Dicke zusammengebogen. Zwei solcher Kästchen lagen mit ihren Breitseiten eng neben einander (Abstand 1 mm) und wurden außerdem durch einen eng (Abstand 1 mm) herumlaufenden Schutzmantel aus gleichem Blech umgeben. Das Ganze (Kästchen und Mantel) wurde in einem evakuierten Gefäß untergebracht und konnte von der einen Seite her durch einen elektrischen Strom erhitzt, auf der anderen Seite abgekühlt werden. Zur Kühlung wurde Eis, Kohlensäureschnee und flüssige Luft verwandt.

Zur Beobachtung des Thomsoneffektes (bez. zur Einstellung des Zweigstromes), dienten Flächenbolometer, welche an entsprechenden Stellen innerhalb der beiden Kästchen angebracht waren. Um den Quotienten Widerstand durch Temperaturgradient zu messen verfuhr ich folgendermaßen. In jedem Kästchen waren oberhalb und unterhalb des Bolometers, und zwar in 1 cm Abstand von einander, dünne Drähte von Konstantandraht (0,025 mm), eingelötet unter Beachtung von Vorsichtsmaßregeln, welche einige Gewähr dafür gaben, daß die Lötstellen auf der richtigen Temperatur waren und die Temperaturverteilung nicht wesentlich beeinflußten. Während der Hauptstrom in einer bestimmten Richtung durch die Kästchen strömte, wurde die Potentialdifferenz an den Konstantandrähten jedes der Kästchen nach einem Kompensationsverfahren bestimmt. Diese Bestimmung wurde nach Umkehrung des Hauptstromes wiederholt. Aus diesen beiden Beobachtungen für jedes Kästchen ergab sich die thermoelektrische Kraft der Temperaturdifferenz und die Potentialdifferenz, welche durch den Hauptstrom erzeugt wurde. Durch Messung der Hauptstromstärke konnte also der Widerstand erhalten werden. Aus dem Widerstande ergab sich auch die Temperatur, bei welcher der Effekt gemessen war. Es war also noch eine Hilfsmessung nötig, um Thermokraft und Widerstand in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur zu bestimmen. Diese Messung wurde an denselben Konstantandrähten ausgeführt, indem die Kästchen so, wie sie bei der

Digitized by Google

Hauptmessung benutzt worden waren (aber ohne Bolometer), in ein Toluolbad von regulierbarer Temperatur gebracht wurden.

Bei dieser Art der Messung bestimmt man den mittleren Widerstand längs einer Strecke von 1 cm, ebenso den mittleren Temperaturgradienten und auch den mittleren Thomsoneffekt, da das Bolometer den Abschnitt der Längsaxe einnimmt, der durch die Lötstellen der Konstantandrähte abgegrenzt wird. Eine genauere Berücksichtigung dieser Umstände zeigt, daß auch dann noch die oben angegebene Formel zur Berechnung des Thomsoneffektes mit hinreichender Annäherung verwandt werden kann; auch wenn berücksichtigt wird, daß die Bolometermethode nur gestattet, das Verhältnis der Temperaturen in beiden Kästchen zu beobachten.

Durch die Beobachtungen werden die eingangs angestellten Ueberlegungen bestätigt. Reguliert man den Zweigstrom so, daß im ersten Augenblick nach Wendung des Hauptstromes der Thomsoneffekt kompensiert ist, so gibt das Galvanometer der Bolometerschaltung schon nach einer Reihe von Sekunden einen Ausschlag von wachsender Stärke, der nur langsam zu einer neuen Ruhelage führt und augenscheinlich den sekundären Wärmeströmen entspricht.

Die Messungen ergaben für Kupfer einen positiven Thomsoneffekt, der in dem Temperaturintervall von -100^0 bis $+100^0$ von etwa 1 bis 2×10^{-5} Wattsekunden ansteigt. Platin zeigt einen negativen Thomsoneffekt von etwa $9 . 10^{-5}$ Wattsekunden mit kleinem Temperaturkoëffizienten. Die interessantesten Resultate wurden für Eisen gefunden. Der Thomsoneffekt ist hier darstellbar durch die Formel $\sigma . 10^5 = -4{,}0 - 0{,}0833\,\vartheta$ (ϑ = Temperatur), hat also einen außerordentlich großen Temperaturkoeffizienten, so daß er bei $+60^0$ dem des Platins gleichkommt, bei etwa -60^0 dem des Kupfers, während er bei -50^0 den Nullwert durchschreitet.

Herrn Geheimrat Riecke, durch dessen Güte mir die Hilfsmittel des physikalischen Instituts zur Verfügung standen, spreche ich meinen herzlichen Dank aus.

Florenz, den 23. Februar 1910.

Digitized by Google

Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit vier wesentlich singulären Stellen.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn F. Klein.)

Von

Richard Fuchs in Berlin.

Vorgelegt von Herrn F. Klein in der Sitzung am 30. April 1910.

Sie hatten seinerzeit die Güte, sich für meine Untersuchungen über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den wesentlich singulären Stellen $0, 1, t, \infty$ und der scheinbar singulären Stelle $\lambda = \varphi(t)$ zu interessieren und diese Untersuchungen in die Mathematischen Annalen, Bd. 63 S. 301 ff. aufzunehmen. Ich habe diese Untersuchungen jetzt fortgesetzt und bitte Sie, mir gütigst zu gestatten, daß ich Ihnen im Folgenden zunächst einen Auszug aus meinen Resultaten vorlege.

In meiner früheren Arbeit habe ich die Form der Differentialgleichung aufgestellt, bei der die Substitutionen, die ein Fundamentalsystem von Integralen bei Umläufen der unabhängigen Variablen x um $0, 1, t, \infty$ erfährt, beliebig vorgeschrieben werden können, insbesondere also von der Wahl von t unabhängig sind. Dabei zeigte es sich, daß die scheinbar singuläre Stelle als Funktion von t einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit festen Verzweigungspunkten zu genügen hat (Math. Ann. Bd. 63, S. 308, Gl. (L')). Schon damals habe ich (Nr. VIII) auf einen besonders interessanten Spezialfall hingewiesen, nämlich den, der zu der allgemeinen Differentialgleichung dieselbe Spezialisierung bildet wie die Legendresche Gleichung zur allgemeinen Gaußschen.

Digitized by Google

In diesem Spezialfalle sind die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen für alle Punkte 0, 1, t, ∞ einander gleich, und die Differentialgleichung lautet:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = py,$$

wenn

$$\text{(1)} \quad p = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-t)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda},$$

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{t} - 1\right] + \frac{1}{4}\frac{t(t-1)^2}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left[\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda-1}{t-1}\right]^2, \\ \beta = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{t-1} + 1\right] - \frac{1}{4}\frac{t^2(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left[\frac{d\lambda}{dt} - \frac{\lambda}{t}\right]^2, \\ \gamma = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda-t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right] + \frac{1}{4}\frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left[\frac{d\lambda}{dt}\right]^2, \\ \varepsilon = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1}\right] - \frac{1}{2}\frac{t(t-1)}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\frac{d\lambda}{dt}. \end{cases}$$

Für λ als Funktion von t gilt Folgendes: Ist $f(u,t)$ die durch Umkehrung des elliptischen Integrals

$$\text{(3)} \qquad u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$$

entstehende elliptische Funktion, und sind ω_1, ω_2 zwei primitive Perioden, so ist

$$\text{(4)} \qquad \lambda = f(c_1\omega_1 + c_2\omega_2, t),$$

wenn c_1, c_2 zwei willkürliche Konstanten bedeuten.

Die Gruppe der Substitutionen, die ein Fundamentalsystem y_1, y_2 bei Umläufen von x erfährt, hängt dann außer von den in der Willkür der Wahl von y_1, y_2 liegenden drei Konstanten nur noch von den beiden Konstanten c_1, c_2 ab.

Ich habe mir nun die Aufgabe gestellt, diese Substitutionsgruppe aufzustellen.

Bei der Lösung dieser Aufgabe wird zuerst die Abhängigkeit der scheinbar singulären Stelle λ von t genau studiert. Es zeigt sich, daß λ und t mit Hilfe der Modulfunktion beide als eindeutige Funktionen des Periodenquotienten $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ dargestellt werden können.

Digitized by Google

Sodann muß der Fall, in welchem λ eine algebraische Funktion von t wird, d. h.

$$\lambda = f\left(\frac{k}{n}\omega_1 + \frac{l}{n}\omega_2, t\right), \tag{5}$$

wenn k, l, n ganze Zahlen bedeuten, genauer untersucht werden. Es lassen sich der Grad der algebraischen Gleichung, die Art der Verzweigung, die Riemannsche Fläche und die Entwickelungen in der Umgebung der Verzweigungsstellen genau angeben. Ist n eine Primzahl, so ist das Geschlecht der Riemannschen Fläche

$$\left(\frac{n-3}{2}\right)^2. \tag{6}$$

Die Entwickelungen von λ lauten z. B. bei geigneter Wahl von ω_1, ω_2 in der Umgebung von $t = 0$:

$$f\left(\frac{k}{n}\omega_1\right) = \frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{n}} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{n}\cdot t + \cdots, \tag{7}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2\right) = \sin^2\frac{k\pi}{n}\cdot t + \frac{1}{8}\sin^2\frac{2k\pi}{n}\cdot t^2 + \cdots, \tag{8}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\omega_1 + \frac{l}{n}\omega_2\right) = -4\frac{e^{\frac{2\pi i k}{n}}}{2^{\frac{8l}{n}}} t^{\frac{2l}{n}} + c_1 t^{\frac{2l+1}{n}} + \cdots, \tag{9}$$

$$\text{wenn } \frac{l}{n} < \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{k}{n}\omega_1 + \frac{l}{n}\omega_2\right) = -4\frac{e^{-\frac{2\pi i k}{n}}}{2^{8\left(1-\frac{l}{n}\right)}} t^{2\left(1-\frac{l}{n}\right)} + d_1 t^{2\left(1-\frac{l}{n}\right)+\frac{1}{n}} + \cdots, \tag{10}$$

$$\text{wenn } \frac{l}{n} > \frac{1}{2}.$$

Sei nun das Fundamentalsystem y_1, y_2 von (A) so gewählt, daß seine Substitutionsgruppe von t unabhängig ist, dann läßt sich dieses Fundamentalsystem so einrichten, daß es der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = +\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x}y_i - A\frac{\partial y_i}{\partial x}, \quad A = \frac{x(x-1)}{x-\lambda}\frac{t-\lambda}{t(t-1)}, \quad (i = 1, 2), \tag{11}$$

Digitized by Google

der Integralquotient $\eta = \frac{y_2}{y_1}$ also der Gleichung

$$\frac{t(t-1)}{t-\lambda}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{x(x-1)}{x-\lambda}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{12}$$

genügt.

Bei einem Umlauf um $x = \lambda$ erleiden y_1, y_2 die Substitution

$$\Sigma_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Ferner mögen

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_t = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \gamma_3 & \delta_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

bzw. die zu $x = 0, 1, t$ gehörigen Substitutionen sein, dann lautet die zu $x = \infty$ gehörige Substitution

$$\Sigma_\infty = \begin{pmatrix} \alpha_4 & \beta_4 \\ \gamma_4 & \delta_4 \end{pmatrix} = \Sigma_\lambda \Sigma_0^{-1} \Sigma_1^{-1} \Sigma_t^{-1}. \tag{15}$$

Mit Hilfe der obigen Entwickelungen für λ gelingt es dann, die von Herrn Poincaré so genannten Fundamentalinvarianten, die zu den Substitutionen:

$$\Sigma_0, \quad \Sigma_1, \quad \Sigma_t \tag{16}$$

und den komponierten:

$$\Sigma_0\Sigma_1, \quad \Sigma_0\Sigma_t, \quad \Sigma_1\Sigma_t, \quad \Sigma_\infty \tag{16a}$$

gehören, zu berechnen.

Für die Invarianten von Σ_0, Σ_1, Σ_t, Σ_∞ ergibt sich unmittelbar der Wert -2. Der leitende Gedanke, der zur Bestimmung der drei übrigen Fundamentalinvarianten führt, und der auch in allgemeineren Fällen zur Lösung derselben Aufgabe Verwendung finden dürfte, ist der Folgende:

Gehört zu irgend einer Umlaufskurve C der Variablen x die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ von y_1, y_2, so ist die zugehörige Invariante $J = \alpha + \delta$ bekanntlich von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig, sie hängt also lediglich von der Natur der Kurve C und von den in dem Koeffizienten p von (A) auftretenden Größen ab. In der Tat zeigt dies z. B. die Günthersche Darstellung dieser Invarianten (Crelles Journal Bd. 107, S. 300 (7) und (8)). Soll nun z. B. die Invariante J_{0t} der Substitution $\Sigma_t\Sigma_0$ die zu einer die beiden Punkte 0 und t einfach umgebenden Umlaufskurve gehört, bestimmt werden, so entwickele man p mit Hilfe der Reihen

Digitized by Google

(7) bis (10) für λ nach Potenzen von t bzw. $\tau = t^{\frac{1}{n}}$. Es zeigt sich, daß in diesen Entwickelungen nur Potenzen mit positiven Exponenten vorkommen. Da nun aber die Invarianten nach der Voraussetzung über die Natur der Substitutionen von t unabhängig sind, so braucht in der Entwickelung von p nur das von t bzw. τ freie Glied beibehalten zu werden. Das heißt aber nichts anderes als: wenn die zu einem Umlauf um die beiden Punkte $x = 0$ und $x = t$ gehörige Fundamentalinvariante bestimmt werden soll, so kann statt dessen die zu dem einfachen Umlauf um $x = 0$ allein bei der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [p]_{t=0} \cdot y \tag{17}$$

gehörige Fundamentalinvariante berechnet werden, wobei nur noch zu beachten ist, ob $\lambda = 0$ oder nicht gleich Null wird, da im ersteren Falle die berechnete Invariante noch mit -1 zu multiplizieren ist. Man findet so, daß die zu $\sum_t \sum_0$ gehörige Invariante den Wert

$$J_{0t} = -2\cos\frac{2l\pi}{n} \tag{18}$$

hat.

Aus dem Satze des Herrn Poincaré, nach welchem die Fundamentalinvarianten ganze transzendente Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ sind (Acta Math. Bd. 4 S. 212 ff.) folgt dann, wenn wieder

$$\lambda = f(c_1\omega_1 + c_2\omega_2, t)$$

ist, daß diese Invarianten eindeutige und stetige analytische Funktionen von c_1, c_2 sein müssen, wobei nur zunächst die Fälle, wo c_1, c_2 unendlich groß oder beide ganzzahlig sind, auszuschließen sind. Bezeichnet man nun

$$P = J_{0t} + 2\cos 2c_2\pi, \tag{19}$$

so ist P eine eindeutige und stetige analytische Funktion von c_1, c_2. Da aber P für alle rationalen Werte c_1, c_2 den Wert Null hat, so muß es wegen der Stetigkeit für alle reellen Werte c_1, c_2 und dann nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie für alle Werte c_1, c_2 den Wert Null haben. Man findet also:

$$J_{0t} = -2\cos 2c_2\pi. \tag{20}$$

Zur Bestimmung der zu $\sum_1 \sum_t$ gehörigen Fundamentalinvarianten muß ebenso der Grenzübergang $t = 1$ und zur Bestimmung der Invarianten von $\sum_0 \sum_1$ der Grenzübergang $t = \infty$ gemacht werden. Es ergibt sich schließlich:

Digitized by Google

$$J_0 = J_1 = J_t = J_\infty = -2,$$
$$J_{0t} = -2\cos 2c_2\pi,\ J_{1t} = -2\cos 2c_1\pi,\ J_{01} = -2\cos 2(c_1 - c_2)\pi. \tag{21}$$

Mit Hilfe der Fundamentalinvarianten können dann die Fundamentalsubstitutionen selbst berechnet werden (Poincaré, Act. Math. Bd. IV, Vogt, Théses, Ann. de l'Ec. Norm. 1889). Es ergibt sich:

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} -1+a_1b_1 & -b_1^2 \\ a_1^2 & -1-a_1b_1 \end{pmatrix},\quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} -1+a_2b_2 & -b_2^2 \\ a_2^2 & -1-a_1b_1 \end{pmatrix},$$
$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} -1+a_3b_3 & -b_3^2 \\ a_3^2 & -1-a_3b_3 \end{pmatrix},\quad \Sigma_\infty = \begin{pmatrix} -1+a_4b_4 & -b_4^2 \\ a_4^2 & -1-a_4b_4 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Dabei gelten für die Größen a_x, b_x die Relationen:

$$\begin{aligned} a_1b_2 - a_2b_1 &= 2\cos(c_1-c_2)\pi, & a_1b_4 - a_4b_1 &= 2\sin c_1\pi, \\ a_1b_3 - a_3b_1 &= 2\cos c_2\pi, & a_2b_4 - a_4b_2 &= -2\sin(2c_1-c_2)\pi \\ a_2b_3 - a_3b_2 &= -2\cos c_1\pi, & a_3b_4 - a_4b_3 &= -2\sin c_2\pi. \end{aligned} \tag{23}$$

Von diesen 6 Gleichungen sind aber nur 5 von einander unabhängig, so daß also in der Tat, wie es bei der beliebigen Wahl des Fundamentalsystems notwendig ist, noch 3 Konstanten in den Fundamentalsubstitutionen willkürlich bleiben.

Um die Fundamentalsubstitutionen eines zu $x = 0$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems y_{01}, y_{02} zu erhalten, hat man jetzt nur

$$a_1 = 1 \quad b_1 = 0 \tag{24}$$

zu setzen. Dann geben die Bedingungsgleichungen (23)

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma_{10} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \Sigma_{11} &= \begin{pmatrix} -1+2a_{12}\cos(c_1-c_2)\pi & -4\cos^2(c_1-c_2)\pi \\ a_{12}^2 & -1-2a_{12}\cos(c_1-c_2)\pi \end{pmatrix}, \\ \Sigma_{1t} &= \begin{pmatrix} -1+2a_{13}\cos c_2\pi & -4\cos^2 c_2\pi \\ a_{13}^2 & -1-2a_{13}\cos c_2\pi \end{pmatrix}, \\ \Sigma_{1\infty} &= \begin{pmatrix} -1+2a_{14}\sin c_1\pi & -4\sin^2 c_1\pi \\ a_{14}^2 & -1-2a_{14}\sin c_1\pi \end{pmatrix}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Zwischen a_{12}, a_{13}, a_{14} bestehen noch die Relationen

$$\begin{aligned} a_{12}\cos c_2\pi - a_{13}\cos(c_1-c_2)\pi + \cos c_1\pi &= 0, \\ a_{12}\sin c_1\pi - a_{14}\cos(c_1-c_2)\pi + \sin(2c_1-c_2)\pi &= 0, \\ a_{13}\sin c_1\pi - a_{14}\cos c_2\pi + \sin(c_1-c_2)\pi &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Da die dritte dieser Gleichungen eine unmittelbare Folge der beiden ersten ist, so bleibt, wie es für ein zu $x = 0$ gehöriges

Digitized by Google

kanonisches Fundamentalsystem sein muß, noch eine Konstante willkürlich. Ebenso erhält man für $a_2 = 1$, $b_2 = 0$ die Fundamentalsubstitutionen eines zu $x = 1$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems y_{11}, y_{12}; für $a_3 = 1$, $b_3 = 0$ das zu $x = t$ gehörige und endlich für $a_4 = 1$, $b_4 = 0$ das zu $x = \infty$ gehörige. Auch lassen sich die sogenannten Uebergangssubstitutionen leicht hinschreiben.

Von Interesse ist die Frage, in welchen Fällen sich die Gleichung (A) durch eine Transformation

$$\xi = R(x, t), \quad y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial \xi}{\partial x}}}\eta, \tag{27}$$

wo ξ eine rationale Funktion von x ist, in eine Gleichung

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = q(\xi)\eta \tag{B}$$

überführen läßt, so daß $q(\xi)$ wieder eine rationale Funktion von ξ ist, die aber t nicht mehr explizite enthält. Es zeigt sich, daß dies, abgesehen von den trivialen Fällen

$$\lambda = f\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 1, \quad \lambda = f\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 0, \quad \lambda = f\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) = t, \tag{28}$$

nur in den Fällen

$$\lambda = f\left(\frac{k}{4}\omega_1 + \frac{l}{4}\omega_2\right) \quad \text{und} \quad \lambda = f\left(\frac{k}{6}\omega_1 + \frac{l}{6}\omega_2\right) \tag{29}$$

möglich ist.

Man findet z. B. für $\lambda = f\left(\frac{\omega_2}{4}\right) = -\sqrt{t}$

$$\xi = \frac{x(1+\lambda)^2}{(x+\lambda)^2}$$

$$q(\xi) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(\xi-1)^2} + \frac{5}{16}\frac{1}{\xi(\xi-1)}. \tag{30}$$

Für

$$\lambda = f\left(\frac{k}{3}\omega_1 + \frac{l}{3}\omega_2\right) \tag{31}$$

auf welchen Fall sich $\lambda = f\left(\frac{k}{6}\omega_1 + \frac{l}{6}\omega_2\right)$ reduzieren läßt, ist das Geschlecht der Riemannschen Fläche $\left(\frac{n-3}{2}\right)^2 = 0$; die algebraische Gleichung, der λ genügt, lautet:

Digitized by Google

$$3\lambda^4 - 4\lambda^3(1+t) + 6\lambda^2 t - t^2 = 0, \tag{32}$$

und es ergibt sich

$$\xi = -\frac{1}{4}\frac{\psi^3(\lambda)}{t^4(t-1)^4}\frac{G_2^3(x)}{\psi(x)}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} G_2(x) &= 9x^2 + 2x(3\lambda - 4 - 4t) + 3\lambda^2 - 4\lambda(1+t) + 6t, \\ \psi(x) &= x(x-1)(x-t), \end{aligned} \tag{34}$$

$$q(\xi) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\xi^2} - \frac{3}{16}\frac{1}{(\xi-1)^2} + \frac{23}{144}\frac{1}{\xi(\xi-1)}. \tag{35}$$

Digitized by Google

Zur Begründung des Dirichlet'schen Prinzipes.

Von

Richard Courant in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert am 28. Mai 1910.

Die klassische Schlußweise des Dirichlet'schen Prinzipes, die durch den Weierstrass'schen Einwand aus dem Gebäude der strengen Mathematik verbannt worden war, ist bekanntlich in neuerer Zeit von Hilbert zu einem vollgültigen Beweisverfahren erhoben worden. Die erste von Hilbert gegebene Methode zur Begründung des Dirichlet'schen Prinzipes [1]) wurde von ihm nur skizziert. Sie bezieht sich auf die Randwertaufgabe der Theorie des logarithmischen Potentials und erscheint einer unmittelbaren Ausdehnung auf die weiteren Existenztheoreme der Funktionentheorie nicht fähig. Die zweite Hilbert'sche Methode dagegen, die von ihm an dem Beispiele des Beweises für die Existenz überall endlicher Potentiale auf gegebenen Riemann'schen Flächen ausführlich dargelegt ist [2]) und die auf Überlegungen von außerordentlicher Allgemeinheit und Tragweite beruht, ist keineswegs auf das genannte Problem beschränkt. Indessen müssen bei der Anwendung dieser Methode zur Führung anderer Existenzbeweise stets noch weitere Betrachtungen hinzukommen, die, wenn sie auch nicht so prinzipiellen Charakter tragen, doch den gesamten Existenz-

1) Über das Dirichlet'sche Prinzip, Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung 1900, abgedruckt im Journ. f. Math. Bd. 129.

2) Über das Dirichlet'sche Prinzip, Festschr. zur Feier des 150jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen 1901, abgedruckt in Math. Ann. Bd. 59. Die an die beiden Hilbert'schen Abhandlungen anknüpfende Literatur ist zitiert bei Hilbert, zur Theorie der konformen Abbildung, Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen 17. Juli 1909.

Digitized by Google

beweis zu einer Kette recht tiefgehender und umständlicher Entwickelungen machen.

Die Untersuchungen meiner Dissertation [1]), die von der durch die zweite Hilbert'sche Methode verbürgten Existenz einer gewissen Potentialfunktion ausgehen, veranlaßten mich nun, nach einer Begründung des Dirichlet'schen Prinzipes zu suchen, die sich in höherem Grade die spezielle Natur des Minimalproblems zu Nutze macht und dadurch in einfacherer Weise zum Ziele führt und sich gleichförmig auf alle in Frage kommenden Existenzbeweise der Funktionentheorie anwenden läßt. Eine solche Beweismethode aufzufinden, ist mir in der Tat gelungen.

Ich möchte in dieser Note, die als vorläufige Mitteilung dienen soll, den Grundgedanken meiner Methode an einem ganz einfachen Beispiele auseinandersetzen und wähle hierzu die Randwertaufgabe der Potentialtheorie für einen ebenen, einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{R}$, dessen Begrenzung aus einer endlichen Anzahl von geradlinigen Strecken parallel zur x- und y-Axe gebildet wird.

Der Beweis beruht einerseits auf der Tatsache, daß wir die Randwertaufgabe für jedes Rechteck als gelöst ansehen können, andererseits auf einem elementaren Hilfssatze über Potentialfunktionen.

Was den ersten Punkt anbetrifft, so können wir etwa die Existenz der Green'schen Funktion für das Rechteck als Voraussetzung an die Spitze stellen. Da man das Rechteck durch eine elliptische Funktion unmittelbar auf die Halbebene konform abbilden kann und für diese die Green'sche Funktion kennt, so hat dies keinerlei Bedenken. Wir werden von unserer Voraussetzung in folgender Form Gebrauch machen: Ist eine stetige Folge von Randwerten auf dem Rande eines Rechteckes R vorgegeben, so existiert eine und nur eine in R reguläre Potentialfunktion $u(x, y)$, die diese Randwerte annimmt. Ist φ irgend eine andere in R stetige, abteilungsweise stetig differenzierbare [2]) Funktion, die die vorgeschriebenen Randwerte besitzt, so ist

$$D_R(u) < D_R(\varphi),$$

und zwar

$$D_R(u) = D_R(\varphi) - D_R(\varphi - u),$$

---

1) Über die Anwendung des Dirichlet'schen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung, Göttingen 1910.

2) Abteilungsweise stetig differenzierbar heißt eine Funktion zweier Veränderlicher in einem Gebiete, wenn man dasselbe in eine endliche Anzahl von Teilgebieten derart einteilen kann, daß die Funktion im Inneren jedes einzelnen stetig ist und stetige erste Ableitungen besitzt.

Digitized by Google

wobei

$$D_R(u) = \iint_{(R)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy,$$

$$D_R(\varphi) = \iint_{(R)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy,$$

$$D_R(\varphi - u) = \iint_{(R)} \left\{ \left(\frac{\partial (\varphi - u)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial (\varphi - u)}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

gesetzt ist, vorausgesetzt, daß diese Integrale existieren. Hinsichtlich der Existenz dieser Integrale [1]) gilt folgender unschwer zu beweisende Satz: Wenn es zu den vorgeschriebenen Randwerten eine in R stetige Funktion φ giebt, deren erste und zweite Ableitungen in R an einer oder mehreren analytischen Kurven endliche Sprünge erleiden dürfen, im übrigen aber stetig sind, und wenn $D_R(\varphi)$ existiert, so existiert auch für die Potentialfunktion u mit den vorgeschriebenen Randwerten $D_R(u)$; die Existenz von $D_R(\varphi - u)$ ist eine unmittelbare Folge der Existenz von $D_R(\varphi)$ und $D_R(u)$.

Der Hilfssatz, auf dessen Anwendung die Beweismethode in zweiter Linie beruht, lautet folgendermaßen [2]): Ist $u(x, y)$ eine im Kreise K_r mit dem Radius r reguläre Potentialfunktion und ist

$$\iint_{(K_r)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy < S^2,$$

so ist im Mittelpunkte

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 < \frac{1}{r^2\pi} S^2.$$

Beweis: Es ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}\, d\vartheta,$$

wobei $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ den Wert von $\frac{\partial u}{\partial x}$ für den Mittelpunkt des Kreises

1) Vergl. Hadamard, Bull. de la Société Math. de France, Bd. 34, 1906, wo zum ersten Male die Bemerkung gemacht ist, daß man stetige Randwerte vorschreiben kann, für die $D_R(u)$ nicht existiert.

2) Vergl. § 3 meiner Dissertation und die dort zitierte Abhandlung von Herrn Koebe sowie eine demnächst in den Math. Annalen erscheinende Arbeit von Herrn Robert König.

Digitized by Google

bedeutet und das Integral über einen zu K_r konzentrischen Kreis vom Radius $\varrho < r$ erstreckt werden soll, in dem ϑ der Zentriwinkel ist. Durch Multiplikation mit ϱ und Integration nach ϱ von 0 bis r folgt

$$\frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2\pi}\iint_{(K_r)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\,dy\,,^1)$$

also zufolge der Schwarz'schen Ungleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2 r^4 < \frac{r^2\pi}{\pi^2}\iint_{(K_r)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dy;$$

durch Addition der entsprechenden Ungleichung für $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ ergibt sich nun unmittelbar die Behauptung.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an die Lösung der oben gestellten Aufgabe, eine Potentialfunktion $u(x, y)$ zu konstruieren, die auf dem Rande Γ des gegebenen Gebietes Ω stetig vorgegebene Werte annimmt. Zu diesem Zwecke zerlegen wir Ω in eine endliche Anzahl von Rechtecken R_1, R_2, ... R_n deren Seiten den Koordinatenaxen parallel sind, derart, daß die geradlinigen Stücke des Randes Γ sowie deren Verlängerungen zu den Seiten dieser Rechtecke werden. Den Rand von R_h bezeichnen wir mit Γ_h. Ferner konstruieren wir irgend eine in Ω zweimal stetig differenzierbare Funktion φ_0, die die vorgeschriebenen Randwerte besitzt, deren Werte auf jeder in Ω liegenden Rechtecksseite eine analytische Funktion der Bogenlänge bilden und deren Dirichlet'sches Integral

$$D(\varphi_0) = \iint_{(\Omega)}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy$$

einen endlichen Wert S^2 hat. Wir setzen dabei voraus, daß die Beschaffenheit der Randwerte der Existenz einer solchen Funktion nicht widerstreitet[2]).

Die Funktion u ergibt sich nun als Lösung des folgenden Variationsproblemes. Es ist diejenige Funktion $u(x, y)$ gesucht, für die das Dirichletsche Integral

---

1) Vergl. Koebe, loc. cit.

2) Vergl. Anm. 1 auf S. 3. Es genügt etwa die Annahme analytischer Randwerte, um die Existenz einer Funktion φ_0 zu sichern. Daher läßt sich jedenfalls die Greensche Funktion für Ω durch die Methode des Dirichletschen Prinzipes konstruieren, was zur Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe für Ω ausreicht.

Digitized by Google

$$D(u) = \iint\limits_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

zum Minimum wird, wenn zum Vergleich alle Funktionen $\varphi(x, y)$ zugelassen werden, die den nachstehenden Bedingungen genügen:

1. φ ist in Ω stetig und besitzt im allgemeinen stetige erste und zweite Ableitungen; dieselben dürfen im Innern von Ω höchstens in den Ecken der Recktecke R_h zu existieren aufhören und an den Seiten der Rechtecke R_h endliche Sprünge erleiden.

2. Bezeichnet Σ eine im Inneren von Ω gelegene Seite des Rechtecksnetzes, s die Bogenänge auf Σ, Σ_ϱ ein Stück dieser Seite, dessen Endpunkte von der nächsten Seite der Rechtecks-einteilung einen Abstand $\geqq \varrho$ haben, so ist φ im Inneren von Σ eine analytische Funktion von s und der Differentialquotient $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ von φ wird auf Σ_ϱ absolut genommen nicht größer als der größere der beiden Werte $\frac{S}{\varrho\sqrt{\pi}}$ und $M(\varrho)$, wo $M(\varrho)$ das Maximum von $\left|\frac{\partial \varphi_0}{\partial s}\right|$ auf Σ_ϱ ist.

3. φ besitzt die vorgeschriebenen Randwerte.

4. Die Werte von φ in Ω liegen zwischen dem größten und dem kleinsten der Werte, die φ_0 in Ω und auf Γ annimmt.

Wir wollen zeigen, daß dieses Variationsproblem eine Lösung u besitzt und daß diese eine überall in Ω reguläre Potential-funktion ist.

Da die Funktion $\varphi = \varphi_0$ den Bedindungen 1.—4. genügt, so besitzen die Werte $D(\varphi)$ eine untere Grenze $d \leqq S^2$ derart, daß für alle den Bedingungen 1.—4. genügenden Funktionen gilt

$$D(\varphi) \geqq d$$

und daß es eine Folge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ von solchen Funktionen gibt für die

$$\lim_{h=\infty} D(\varphi_h) = d$$

ist. Aus dieser Folge machen wir uns nun eine andere, normierte Folge von Funktionen $v_1, v_2, \ldots$, die den Bedingungen 1.—4. genügen und von denen wir zeigen können, daß sie gegen eine Grenzfunktion $u(x, y)$ konvergieren, die unser Variationsproblem löst. Zu diesem Zwecke lösen wir mit den Werten, die φ_1 auf

Digitized by Google

$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ besitzt, als Randwerten für $R_1, R_2, \ldots R_n$ die Randwertaufgabe; so erhalten wir eine Funktion v_1, die in jedem R_h Potentialfunktion ist und den Bedingungen 1.—4. genügt. Es ist ferner unserer ersten Vorbemerkung zufolge $D_h(v_1) \leqq D_h(\varphi_1)$, wo

$$D_h(\varphi) = \iint_{(R_h)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

gesetzt ist. Also ist

$$D(v_1) \leqq D(\varphi_1).$$

In derselben Weise machen wir uns aus φ_2 eine Funktion v_2, u.s.w. Da $D(v_h) \geqq d$ sein muß, so folgt notwendig

$$\lim_{h=\infty} D(v_h) = d.$$

Nach einem bekannten elementaren Konvergenzsatze [1]) können wir nun wegen der Bedingungen 2. und 4. aus der Folge $v_1, v_2, \ldots$ eine solche Teilfolge $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots$ auswählen, daß für sie die Randwerte auf sämmtlichen Begrenzungen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ konvergieren, wobei nur die Eckpunkte auszunehmen sind, und daß ferner diese Konvergenz für jeden Teil des gesamten Liniensystemes der Γ_h, der keine Eckpunkte im Inneren oder auf dem Rande enthält, gleichmäßig ist. Wie man leicht erkennt, konvergieren daher die Funktionen v_{n_h} gegen eine Funktion u, die in Ω höchstens mit. Ausnahme der Eckpunkte der R_h stetig ist und in jedem R_h der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt. Wir wollen zeigen, daß sie weder auf den Seiten, noch in den Ecken der Rechtecke eine Unterbrechung der Regularität erleidet.

Um das erstere etwa für die Seite Σ einzusetzen, in der R_1 und R_2 zusammenstoßen, betrachten wir das durch Vereinigung der beiden Rechtecke R_1 und R_2 entstehende Rechteck $R_{1,2}$ und konstruieren für jedes h die in Ω stetige Funktion $v^*_{n_h}$, die im Inneren von $R_{1,2}$ eine reguläre Potentialfunktion ist und sonst überall in Ω mit v_{n_h} übereinstimmt. Setzen wir $D_{1,2}(\varphi) = D_1(\varphi) + D_2(\varphi)$, so existiert unserer ersten Vorbemerkung zufolge wegen der Existenz von $D_{1,2}(v_{n_h})$ auch $D_{1,2}(v^*_{n_h})$, und zwar ist, wenn $\delta_{n_h} = v_{n_h} - v^*_{n_h}$ gesetzt wird,

1) Wenn $f_1(s), f_2(s), \ldots$ unendlich viele in dem Intervalle $a \leqq s \leqq b$ stetige Funktionen sind, die sämtlich unterhalb einer festen Schranke G bleiben und deren Differentialquotient unterhalb einer festen Schranke G' bleibt, so läßt sich aus ihnen eine Teilfolge $f_{n_1}(s), f_{n_2}(s), \ldots$ auswählen, die in dem Intervalle gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f(s)$ konvergiert.

Digitized by Google

$$D_{1,2}(v^*_{n_h}) = D_{1,2}(v_{n_h}) - D_{1,2}(\delta_{n_h}),$$

also, sobald h hinreichend groß gewählt wird,

$$D_{1,2}(v^*_{n_h}) < S^2.$$

Die Funktion $v^*_{n_h}$, die offenbar den Bedingungen 1., 3., 4. überall und der Bedingung 2. auf allen Rechtecksseiten höchstens mit Ausnahme von Σ genügt, befriedigt daher nach unserem Hilfssatze auch auf Σ die Bedingung 2. und ist also eine der konkurrenzfähigen Funktionen. Da nun $D(v^*_{n_h}) = D(v_{n_h}) - D_{1,2}(\delta_{n_h}) \leqq D(v_{n_h})$ ist, so folgt

$$\lim_{h=\infty} D(v^*_{n_h}) = d$$

und somit

$$\lim_{h=\infty} D(\delta_{n_h}) = 0.$$

Nun konvergieren aber die Funktionen $v^*_{n_h}$ gegen eine Funktion u^*, die in $R_{1,2}$ eine reguläre Potentialfunktion ist und sonst überall in Ω mit u übereinstimmt. Setzt man $\delta = u - u^*$, so folgt aus $= \lim_{h=\infty} \delta_{n_h}$ δ und $\lim_{h=\infty} D_{1,2}(\delta_{n_h}) = 0$ leicht

$$\delta = \text{const.},$$

und zwar

$$\delta = 0;$$

mithin ist u auf Σ regulär, wie gezeigt werden sollte.

Davon, daß u sich auch in den Eckpunkten der R_h regulär verhält, überzeugt man sich nunmehr ganz analog.

Die so gefundene Funktion $u(x, y)$ ist daher eine überall in Ω reguläre Potentialfunktion, die auf Γ die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, und somit ist der gewünschte Existenzbeweis erbracht.

Daß die Funktion u unser Variationsproblem löst, ist jetzt ohne Schwierigkeit zu erkennen.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß nicht nur die Folge $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots$ gegen u konvergiert, sondern schon die Folge $v_1, v_2, \ldots$, eine Tatsache, die sich daraus ergibt, daß es nicht zwei Lösungen der Randwertaufgabe geben kann.

In einer ausführlicheren Publikation gedenke ich die Anwendung der hier entwickelten Methode auf die in Frage kommenden Existenzbeweise in Vollständigkeit darzulegen.

Digitized by Google

Zur Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips.

Von

Max Born.

Vorgelegt von Herrn W. Voigt in der Sitzung am 28. Mai 1910.

Einleitung.

Die von mir gegebene Definition der Starrheit[1]), die dem Lorentz-Einsteinschen Relativitätsprinzip genügt, hat sich als zu eng erwiesen[2]), indem sich herausgestellt hat, daß die Bewegung eines in diesem Sinne starren Körpers durch die Bewegung eines seiner Punkte im allgemeinen vollkommen bestimmt ist, bis auf einige Ausnahmefälle, die von Herrn Herglotz ausführlich diskutiert worden sind. Daher kann diese Definition keinesfalls auf die gewöhnlichen materiellen starren Körper angewendet werden[3]), wenn sie auch zur Begründung der Dynamik des Elektrons für alle beobachtbaren Erscheinungen ausreicht. Man wird aber die Aufstellung einer Starrheitsdefinition, welche eine möglichst vollkommene Analogie zum starren Körper der gewöhnlichen Kinematik darstellt, als wünschenswert ansehen müssen; denn einmal ist der starre Körper zum Aufbau der Mechanik notwendig, sodann erscheint mir auch eine Elektronentheorie ohne diesen Begriff einen wesentlichen Rückschritt zu bedeuten.

Ich habe daher versucht eine neue Definition der Starrheit aufzustellen, die eine möglichst große Analogie zur gewöhnlichen Starrheit aufweist, und will hier die Definition und diejenigen

1) M. Born, Ann. d. Phys. (4), 30, S. 1, 1910.

2) G. Herglotz, Ann. d. Phys. 31, S. 393, 1910. F. Noether, Ann. d. Phys. 31, S. 919, 1910.

3) M. Born, Phys. Zeitschr. 11, S. 233, 1910.

Digitized by Google

Folgerungen mitteilen, welche sich ohne weiteres leicht erledigen lassen. Die Eigenschaften des auf die neue Weise definierten starren Körpers, welche ich hier entwickeln will, sind die folgenden:

1) Der starre Körper hat sechs Freiheitsgrade.

2) Die von mir zuerst gegebene Definition entspricht dem Falle der Translation gemäß der neuen Definition, wobei aber die von Herrn Herglotz behandelten Ausnahmefälle nicht auftreten.

3) Das Geschwindigkeitsfeld der Punkte des Körpers wird durch Formeln gegeben, welche ein Analogon der entsprechenden Formeln der gewöhnlichen Kinematik sind.

4) Vernachlässigt man die Quadrate der Geschwindigkeiten der Punkte des Körpers gegen das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, so ist die Bewegung mit der starren Bewegung der gewöhnlichen Kinematik identisch.

5) Es existiert eine instantane Rotationsachse, d. h. man kann durch eine geeignete Lorentz-Transformation erreichen, daß sämtliche Punkte einer geraden Linie ruhen.

6) Alle Punkte des Körpers haben von einem bestimmten, auf der instantanen Achse gelegenen Punkte, dem Zentrum der Rotation, eine konstante „Ruh-Entfernung".

Außer der Feststellung dieser allgemeinen Eigenschaften der Definition habe ich einige spezielle Bewegungen durchgerechnet, darunter den Fall, daß ein Punkt des Körpers eine gleichförmig-beschleunigte Bewegung (Hyperbelbewegung) ausführt und der Körper um die Translationsrichtung beliebig rotiert. Das wesentliche Resultat dabei ist, daß sämtliche Punkte des Körpers stets auf Kreiszylindern von konstantem Radius verbleiben und ihre Projektionen auf die Bewegungsrichtung kongruente Hyperbelbewegungen ausführen.

Daß der bei dieser Definition eingeführte Begriff der Rotation für manche Zwecke brauchbar ist, geht vor allen Dingen aus folgendem Umstande hervor. Mit Hilfe einer von Minkowski kurz vor seinem Tode entworfenen Methode habe ich gezeigt[1]), daß die von diesem aufgestellten Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern sich aus den Vorstellungen der Elektronentheorie ableiten lassen. Dabei werden nach dem Vorgange von Lorentz die dielektrische Polarisation und die Magnetisierung der Materie erklärt durch Relativbewegungen der Elektronen gegen die materiellen Moleküle. Die Me-

1) M. Born, Math. Ann. 68, S. 526, 1910.

Digitized by Google

thode ist aber von der Lorentzschen gänzlich verschieden; sie beruht darauf, daß die Abweichungen der Bewegungen der Elektronen von den Bewegungen der materiellen Teile durch Potenzreihen dargestellt werden, die nach einem die mittlere Verschiebung messenden Parameter fortschreiten. Dabei zeigt sich, daß die Glieder 1. Ordnung der Reihen die dielektrische Polarisation, die Glieder 2. Ordnung die Magnetisierung darstellen, und es entstehen ganz von selbst als Entwicklungskoeffizienten die Ausdrücke, welche die magnetischen Momente, d. h. die mit der Ladung multiplizierten Drehmomente der Elektronen darstellen. Die so ganz formal gewonnenen Ausdrücke zur Darstellung der Rotationen der Elektronen stimmen nun mit der hier gegebenen Definition der Rotation überein. Dieser Uebereinstimmung stehen aber auch Schwierigkeiten für die Brauchbarkeit der neuen Definition gegenüber [1]).

§ 1. Der starre Körper der gewöhnlichen Mechanik.

Während meine erste Definition der Starrheit die Eigenschaft des gewöhnlichen starren Körpers zu analogisieren suchte, daß die Entfernung irgend zweier Punkte des Körpers bei der Bewegung konstant ist, knüpft die neue Definition an eine andere Eigenschaft des gewöhnlichen starren Körpers an.

Der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ irgend eines seiner Punkte x, y, z läßt sich nämlich auf folgende Weise darstellen [2]):

$$\mathfrak{w} - \mathfrak{u} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}]. \tag{1}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{r}$ den Vektor mit den Komponenten

$$x - a, \qquad y - b, \qquad z - c,$$

wo a, b, c ein bestimmter Punkt des Körpers ist; $\mathfrak{u}$ ist die Geschwindigkeit des Punktes a, b, c und $\mathfrak{p}$ der Vektor Winkelgeschwindigkeit.

Aus der Bedingung (1) findet man die Gleichung der instantanen Rotationsachse, deren Punkte alle die gleiche Geschwindig-

1) Die von Herrn Nother, l. c. (Anm. 2, S. 161) vorgeschlagene Definition, bei der dem starren Körper 9 Freiheitsgrade zukommen, hat vor der meinigen den Vorzug, daß kein Punkt des Körpers ausgezeichnet ist, scheint aber ohne weiteres weder mit der angedeuteten Theorie der Magnetisierung noch mit den die Dynamik betreffenden Absichten Minkowskis im Einklang zu sein.

2) Ich gebrauche hier die in der Vektoranalysis meist üblichen Zeichen; so ist z. B. $\mathfrak{AB}$ oder auch $(\mathfrak{AB})$ das skalare, $[\mathfrak{AB}]$ das vektorielle Produkt der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Digitized by Google

keit haben, indem man $\mathfrak{w} = \mathfrak{u}$ setzt; es muß also der Vektor $[\mathfrak{p}, \mathfrak{r}]$ verschwinden, d. h. es müssen die Proportionen

$$x-a : y-b : z-c = \mathfrak{p}_x : \mathfrak{p}_y : \mathfrak{p}_z \tag{2}$$

bestehen, welche eine gerade Linie darstellen. Ist R die Entfernung eines Punktes x, y, z vom Punkte a, b, c, d. h.

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

so findet man durch Differentiation nach der Zeit t:

$$R\frac{dR}{dt} = (\mathfrak{r}, \mathfrak{w}-\mathfrak{u}).$$

Nun folgt aus den Gleichungen (1):

$$\begin{aligned}(\mathfrak{r}, \mathfrak{w}-\mathfrak{u}) &= (\mathfrak{r}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}]) = 0,\\ (\mathfrak{p}, \mathfrak{w}-\mathfrak{u}) &= (\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}]) = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Also wird:

$$R\frac{dR}{dt} = 0. \tag{4}$$

Es verschwindet $\frac{dR}{dt}$, d. h. es ist die Entfernung aller Punkte vom Punkte a, b, c konstant. Diese für die Starrheit charakteristischen Eigenschaften werden sich bei der neuen Definition wiederfinden.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft des gewöhnlichen starren Körpers wird sich nicht übertragen, daß nämlich die Entfernung von irgend zwei Punkten x', y', z' und x'', y'', z'' konstant ist. Letztere Tatsache ist in der gewöhnlichen Kinematik so zu beweisen. Wir unterscheiden alle auf die beiden Punkte bezüglichen Größen durch einen bezw. zwei Striche; dann haben wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{w}'-\mathfrak{u} &= [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}'],\\ \mathfrak{w}''-\mathfrak{u} &= [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}''],\end{aligned}$$

woraus durch Subtraktion folgt:

$$\mathfrak{w}'-\mathfrak{w}'' = [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'']. \tag{5}$$

Andererseits ergibt sich durch Differentiation des relativen Abstandes

$$(\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'')^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2$$

nach der Zeit t:

$$|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|\frac{d|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}{dt} = (\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'', \mathfrak{w}'-\mathfrak{w}'').$$

Digitized by Google

Durch skalare Multiplikation mit $(\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'')$ ergibt sich aus (5):

$$(6) \qquad (\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'',\ \mathfrak{w}'-\mathfrak{w}'') = (\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'',\ [\mathfrak{p},\ \mathfrak{r}'-\mathfrak{r}'']) = 0.$$

Also ist

$$(7) \qquad \frac{d\,|\mathfrak{r}'-\mathfrak{r}''|}{dt} = 0.$$

Dieser Schluß wird sich nicht übertragen lassen. Man wird aber dabei einen klaren Einblick gewinnen, warum diese Eigenschaft des starren Körpers bei der neuen Definition fortfallen muß.

§ 2. Ruh-Vektoren 1. und 2. Art.

Im folgenden werde ich der Kürze halber die von Minkowski [1]) eingeführte vierdimensionale Vektor-Analysis gebrauchen und ich verweise dieserhalb auf des genannten Autors Publikationen.

Ein beliebiges Bezugsystem rechtwinkliger Koordinaten x, y, z und der Zeit t sei zu Grunde gelegt; c sei die Lichtgeschwindigkeit. Wir ersetzen

$$x,\ y,\ z,\ ict$$

durch

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4.$$

Eine homogene lineare Substitution

$$(8) \qquad x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} a_{\alpha\beta} x'_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

von der Determinante $+1$, in der alle Koeffizienten ohne einen Index 4 reell, a_{14}, a_{24}, a_{34} sowie a_{41}, a_{42}, a_{43} rein imaginär (ev. Null) sind, endlich a_{44} wieder reell und >0 ist und durch welche

$$(8') \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha^2 \text{ in } \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha'^2$$

übergeht, heißt eine Lorentz-Transformation. Die Lorentz-Transformationen enthalten 6 unabhängige Parameter und lassen sich deuten als Uebergang von einem Bezugsystem zu einem gleichförmig dazu bewegten unter gleichzeitiger zeitloser Drehung des x, y, z-Achsenkreuzes.

Läßt man diesen zeitlosen Wechsel der Raumkoordinaten fort, so erhält man die speziellen Lorentz-Transformationen [2]), welche nur noch 3 Parameter, nämlich die Komponenten der Relativgeschwindigkeit u beider Bezugsysteme, enthalten.

Ein Raum-Zeit-Vektor 1. Art s ist ein System von 4 Größen

1) H. Minkowski, Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., S. 54, 1908 (abgedruckt in Math. Ann. 68, S. 472, 1910).

2) Vergl. Minkowski, (l. c. Anm. 1), § 4.

Digitized by Google

s_1, s_2, s_3, s_4, welche sich bei Lorentz-Transformationen wie die Koordinaten x_α transformieren. In jedem Bezugsystem stellen die drei ersten Komponenten s_1, s_2, s_3 einen Raumvektor $\mathfrak{s}$ dar. Ein Raum-Zeit-Vektor 2. Art f ist ein System von 6 Größen

$$f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34},$$

welche sich bei Lorentz-Transformationen wie die 6 Determinanten transformieren, die man aus dem mittelst zweier Vektoren 1. Art gebildeten Schema

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

erzeugen kann.

In jedem Bezugsystem stellen die 6 Komponenten von f zwei Raumvektoren dar, und zwar mögen f_{23}, f_{31}, f_{12} den Raumvektor $\mathfrak{m}$, $if_{14}, if_{24}, if_{34}$ den (reellen) Raumvektor $\mathfrak{n}$ bilden. Der zu f duale Vektor f^* ist der Raum-Zeit-Vektor mit den Komponenten $f_{14}, f_{24}, f_{34}, f_{23}, f_{31}, f_{12}$, der aus den Raumvektoren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ in umgekehrter Reihenfolge zusammengesetzt ist.

Wir betrachten nun das Verhalten der Vektoren 1. und 2. Art bei speziellen Lorentz-Transformationen mit dem Vektor $\mathfrak{u}$, d. h. beim Uebergang von einem Bezugsystem Σ zu einem anderen Σ' mit parallelen räumlichen Koordinatenachsen, welches relativ zum ersten System die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ hat.

Ein Vektor 1. Art s geht dabei in einen Vektor s' über; die ersten drei Komponenten desselben, s_1', s_2', s_3' stellen denjenigen Raumvektor $\mathfrak{s}'$ dar, als welcher der Raum-Zeit-Vektor s von dem bewegten System Σ' aus erscheint. Diesen Raumvektor $\mathfrak{s}'$ kann man nun wiederum als einen Raum-Zeit-Vektor ansehen, dessen vierte Komponente in dem Bezugsystem Σ' verschwindet. Dieser neue Raum-Zeit-Vektor mit den in Σ' gemessenen Komponenten $s_1', s_2', s_3', 0$ hat im Systeme Σ die Komponenten

$$s_\alpha^0 = s + (u, \bar{s}) u_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

d. h. er ist identisch mit dem Vektor

$$s_0 = s + (u, \bar{s}) u, \tag{9}$$

wobei u den Raum-Zeit-Vektor mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\mathfrak{u}_x}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{u}|^2}{c^2}}}, & u_2 &= \frac{\mathfrak{u}_y}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{u}|^2}{c^2}}}, \\ u_3 &= \frac{\mathfrak{u}_z}{c\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{u}|^2}{c^2}}}, & u_4 &= \frac{i}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{u}|^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{10}$$

Digitized by Google

bedeutet, welche die Relation

$$\Sigma u_\alpha^2 = (u, \bar{u}) = -1 \tag{11}$$

erfüllen.

Der Vektor s_0 ist gemäß seiner Definition normal auf u:

$$(u, \bar{s}_0) = 0. \tag{12}$$

Er heißt der Ruhvektor von s bezüglich der Geschwindigkeit u, weil in demjenigen Koordinatensystem Σ', in welchem ein mit der Geschwindigkeit u bewegter Punkt zu ruhen scheint, die drei ersten Komponenten, die Raumkomponenten, von s_0 mit den drei ersten Komponenten des auf Σ' transformierten Vektors s' identisch sind.

Wir betrachten jetzt den Vektor 2. Art f. Dieser geht bei der speziellen Lorentz-Transformation in den Vektor 2. Art f' über, der in dem System Σ' in die beiden Raumvektoren $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ zerfällt. Diese beiden Raumvektoren kann man als Raum-Zeit-Vektoren auffassen, deren vierte Komponente im System Σ' verschwindet; diese Raum-Zeit-Vektoren mit den Komponenten f'_{23}, f'_{31}, f'_{12}, 0 bezw. f'_{14}, f'_{24}, f'_{34}, 0 im Systeme Σ' seien mit ψ und φ bezeichnet. Dann kann man leicht zeigen, daß die Komponenten von φ in dem ursprünglichen Systeme Σ folgendermaßen lauten:

$$\varphi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{4} u_\alpha f_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

d. h. es ist

$$\varphi = -uf; \tag{13}$$

ebenso ergibt sich, daß

$$\psi = iuf^* \tag{14}$$

ist. Offenbar sind sowohl φ, als auch ψ normal zu u:

$$(u, \bar{\varphi}) = 0, \qquad (u, \bar{\psi}) = 0. \tag{15}$$

Wir nennen φ und ψ die zu dem Raum-Zeit-Vektor $f(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ bezüglich der Geschwindigkeit u gehörigen Ruh-Vektoren, weil in demjenigen Koordinatensystem Σ', in welchem ein mit der Geschwindigkeit u bewegter Punkt zu ruhen scheint, die drei ersten Komponenten von φ und ψ mit den Komponenten der Raumvektoren $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{m}'$ identisch sind, welche den transformierten Vektor 2. Art f' zusammensetzen.

Die Beweise der hier aufgestellten Behauptungen lassen sich leicht analytisch oder geometrisch erbringen. Sie sind aber auch

Digitized by Google

implizite in den Betrachtungen Minkowskis [1]) über die Transformation der elektrischen und der magnetischen Feldstärke enthalten.

§ 3. Definition des starren Körpers.

Die soeben entwickelten Begriffe der Ruh-Vektoren 1. und 2. Art wollen wir nun bei der Definition der Starrheit verwerten.

Wir bezeichnen einen bestimmten Punkt des sich bewegenden Körpers als das Zentrum. Dieses sei in einem Moment durch den Raum-Zeit-Punkt a (a_1, a_2, a_3, a_4) dargestellt und habe die durch den Raum-Zeit-Vektor u (u_1, u_2, u_3, u_4) definierte Geschwindigkeit; es ist also

$$(u, \bar{u}) = -1. \tag{16}$$

Wir fassen einen beliebigen Punkt x (x_1, x_2, x_3, x_4) in dem durch a gelegten, auf u normalen Raume ins Auge; es ist also

$$(u, \overline{x-a}) = 0. \tag{17}$$

Zu x gehöre der Geschwindigkeitsvektor $w(w_1, w_2, w_3, w_4)$, der die Bedingung

$$(w, \bar{w}) = -1 \tag{18}$$

erfüllt.

Es sei ferner p ein ganz beliebiger auf u normaler Raum-Zeit-Vektor:

$$(u, \bar{p}) = 0. \tag{19}$$

Wir nennen ihn die Winkelgeschwindigkeit. Seine ersten drei Komponenten

$$p_1 = \frac{1}{c}\mathfrak{p}_x, \qquad p_2 = \frac{1}{c}\mathfrak{p}_y, \qquad p_3 = \frac{1}{c}\mathfrak{p}_z$$

definieren einen Raumvektor $\mathfrak{p}$, während

$$p_4 = \frac{i}{c^2}(\mathfrak{u}_x\mathfrak{p}_x + \mathfrak{u}_y\mathfrak{p}_y + \mathfrak{u}_z\mathfrak{p}_z) = \frac{i}{c^2}(\mathfrak{u}, \mathfrak{p}) \tag{19'}$$

ist.

Der Ruh-Vektor der Geschwindigkeit w von x bezüglich u ist

$$w^0 = w + (u, \bar{w})u; \tag{20}$$

nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen sind in einem Koordinatensystem Σ', in welchem der Punkt a ruht, d. h. $\mathfrak{u} = 0$

1) Minkowski, l. c. (Anm. 1, S. 165).

Digitized by Google

ist, seine drei ersten Komponenten identisch mit denen des Vektors 1. Art w', der bei der speziellen Lorentz-Transformation u aus w hervorgeht. Man wird w^0 also auch als Ruhgeschwindigkeit oder Relativgeschwindigkeit des Punktes x bezüglich der Geschwindigkeit u des Punktes a bezeichnen können.

Den Raum-Zeit-Vektor 2. Art

$$[p,\ x-a] = Q \tag{21}$$

bezeichnen wir als die Rotation des Punktes x um den Punkt a.

Wir bilden die beiden zu Q gehörigen Ruh-Vektoren. Aus der identischen Relation

$$u[p,\ x-a] = (u,\ \bar{p})(x-a)-(u,\ \overline{x-a})p$$

folgt wegen (17) und (19), daß der eine der beiden Ruh-Vektoren

$$uQ = 0 \tag{22}$$

ist. Den anderen nennen wir Ruh-Rotation und bezeichnen ihn mit q:

$$iuQ^* = q. \tag{23}$$

Nach (15) ist q normal auf u:

$$(u,\ \bar{q}) = 0. \tag{24}$$

Die ersten drei Komponenten von q,

$$q_1 = -\frac{q_x}{c}, \qquad q_2 = -\frac{q_y}{c}, \qquad q_3 = -\frac{q_z}{c}$$

bilden einen Raumvektor, während

$$q_4 = -\frac{i}{c^2}(u_x q_x + u_y q_y + u_z q_z) = -\frac{i}{c^2}(u,\ q) \tag{24'}$$

ist.

Die Formel (22) zeigt, daß in dem Koordinatensystem Σ', in dem der Punkt a ruht, der Vektor 2. Art Q sich auf einen Vektor 1. Art q reduziert, und zwar ist für $u = 0$ offenbar

$$q = [p,\ r], \tag{25}$$

wo r den Raumvektor mit den Komponenten

$$x_1-a_1, \qquad x_2-a_2, \qquad x_3-a_3,$$

bedeutet.

Man kann auch den Vektor 2. Art Q durch q ausdrücken. Aus der Identität:

Digitized by Google

$$[u,\ uQ]+[u,\ uQ^*]^* = (u\bar{u})\,Q \tag{26}$$

folgt nämlich wegen (16) und (22)

$$[u,\ q]^* = -iQ. \tag{27}$$

Jetzt können wir in Uebereinstimmung mit dem Relativitätsprinzip und gleichzeitig in voller Analogie zu der Gleichung (1) den starren Körper folgendermaßen definieren:

Definition: Die Bewegung eines Punktsystems heiße starr, wenn zwischen dem Orte x und der Geschwindigkeit w jedes Punktes zu jeder Zeit die Beziehung besteht, daß die Relativgeschwindigkeit gegen das Zentrum a gleich der Ruhrotation ist:

$$w^0 = q, \tag{28}$$

oder ausführlich:

$$w+(u,\ \bar{w})\,u = iu\,[p,\ x-a]^*. \tag{28'}$$

Diese Definition ist kovariant gegen Lorentz-Transformationen. Ferner ist sie in Verbindung mit den Bedingungen (17) und (18) völlig hinreichend, die Bewegung zu bestimmen, sobald die Bewegung des Zentrums a und der Verlauf des Vektors p für alle Zeiten in Uebereinstimmung mit den Bedingungen (16) und (19) gegeben sind.

Sei nämlich die Bewegung von a dadurch beschrieben, daß a_1, a_2, a_3, a_4 als Funktionen der Eigenzeit σ gegeben sind; dann sind die

$$u_\alpha = \frac{1}{c}\frac{da_\alpha}{d\sigma} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

ebenfalls bekannte Funktionen von σ, die die Relation (16) erfüllen.

Ebenso seien die p_α, von denen nur drei wegen (19) unabhängig sind, als Funktionen von σ gegeben.

Dann kann man aus der Gleichung (17) σ als Funktion von x_1, x_2, x_3, x_4 berechnen und diese Werte in (28') einsetzen.

Wenn nun τ die Eigenzeit des Punktes x bedeutet, so hat man

$$w_\alpha = \frac{1}{c}\frac{dx_\alpha}{d\tau}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Demnach stellen die Gleichungen (28'), von denen wegen der Orthogonalität beider Seiten zu u nur drei unabhängig sind, zusammen mit (18) ein System von Gleichungen der Form dar:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_\alpha}{d\tau} = \lambda . f_\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4), & (\alpha = 1, 2, 3, 4), \\ \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{dx_\alpha}{d\tau}\right) = -c^2. \end{cases} \tag{29}$$

Digitized by Google

Dabei sind die f_α bekannte Funktionen ihrer Argumente und λ ist ein Proportionalitätsfaktor, welcher vermöge der letzten Gleichung eliminiert werden kann.

Man hat demnach ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Funktionen x_1, x_2, x_3, x_4 von τ.

Die allgemeine Lösung wird außer einer Konstanten, welche der willkürlichen Wahl des Nullpunktes von τ entspricht, drei Parameter ξ_1, ξ_2, ξ_3 enthalten, welche die einzelnen sich bewegenden Punkte individualisieren.

Man erhält also die Bewegung dargestellt in der nach Lagrange benannten Weise durch Gleichungen der Form:

$$x_\alpha = x_\alpha(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau), \tag{30}$$

wie ich sie früher des öfteren benutzt habe.

§ 4. Allgemeine Eigenschaften des starren Körpers.

Wir können nunmehr aus der Definition des starren Körpers diejenigen Eigenschaften ableiten, welche den in § 1 besprochenen des gewöhnlichen starren Körpers analog sind.

Zunächst ist klar, daß die Definition (28′) in die Gleichung (1) der gewöhnlichen Kinematik übergeht, sobald man Glieder der Ordnung $\frac{w^2}{c^2}$, $\frac{wu}{c^2}$, $\frac{u^2}{c^2}$ vernachlässigt.

Um sodann die Existenz einer instantanen Rotationsachse zu beweisen, fragen wir nach den Raum-Zeitpunkten x, deren Geschwindigkeit gleich der des Zentrums ist. Aus

$$w = u$$

folgt durch Multiplikation mit u wegen (16)

$$(u, \bar{w}) = (u, \bar{u}) = -1,$$

also wird

$$w^0 = w + (u, \bar{w})u = w - u = 0.$$

Für die gesuchten Punkte muß daher $q = 0$ sein; aus (27) ergibt sich dann $Q = 0$, oder

$$[p, x - a] = 0.$$

Daraus aber folgt die Proportionalität der p_α mit den $x_\alpha - a_\alpha$.

Die gesuchten Punkte liegen also auf der geraden Weltlinie

$$x_\alpha - a_\alpha = \lambda p_\alpha, \tag{31}$$

welche offenbar auf u normal ist. In dem Koordinatensystem Σ',

Digitized by Google

in welchem das Zentrum a ruht, bilden diese Punkte eine räumliche Gerade, welche in ihrer ganzen Länge momentan ruht. Das ist die instantane Rotationsachse.

Sei R die Ruh-Entfernung eines Punktes x vom Zentrum, d. h. sei

$$R^2 = \sum_{\alpha=1}^{4}(x_\alpha - a_\alpha)^2,$$

wobei x die Bedingung (17) erfüllt. Ist die Bewegung bekannt, also die x_α bekannte Funktionen von τ, so kann man aus (17) τ als Funktion der Eigenzeit σ des Zentrums ermitteln und diesen Wert wieder in die x_α einsetzen. Dann wird R eine Funktion von σ. Differenzieren wir diese nach σ, so kommt:

$$R\frac{dR}{d\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{4}(x_\alpha - a_\alpha)\left(w_\alpha\frac{d\tau}{d\sigma} - u_\alpha\right)$$
$$= \left(x-a,\ w\frac{d\tau}{d\sigma} - u\right).$$

Nun folgt aus (28′) durch Multiplikation mit $x-a$:

$$(x-a,\ \overline{w}) + (u,\ \overline{w})(u,\ \overline{x-a}) = i(u[p,\ x-a]^*,\ \overline{x-a}).$$

Berücksichtigt man (17) und bemerkt, daß identisch für zwei Vektoren 1. Art p, q

$$(u[p, q]^*, \overline{q}) = (u[p, q]^*, \overline{p}) = 0 \tag{32}$$

ist, so findet man:

$$(x-a,\ \overline{w}) = 0. \tag{33}$$

Ebenso findet man aus (28′) durch Multiplikation mit p:

$$(p,\ \overline{w}) + (u,\ \overline{w})(u,\ \overline{p}) = i(u[p,\ x-a]^*,\ \overline{p}),$$

und wegen (19) und (32):

$$(p,\ \overline{w}) = 0. \tag{34}$$

Aus (33) ergibt sich im Verein mit (17)

$$R\frac{dR}{d\sigma} = 0, \tag{35}$$

eine Gleichung, die zu (4) völlig analog ist.

Daraus folgt, daß die Ruh-Entfernung aller Punkte vom Zentrum a von der Eigenzeit des letzteren unabhängig, also überhaupt konstant ist.

In diesen Eigenschaften stimmt die neue Definition mit den in § 1 aufgezählten des gewöhnlichen starren Körpers überein.

Digitized by Google

Daß aber, wie schon dort gesagt wurde, die Ruh-Entfernung zweier Punkte x, y bei der Bewegung nicht konstant bleibt, hängt damit zusammen, daß nicht jeder beliebige Punkt des Körpers als Zentrum angesehen werden kann, sondern nur die Punkte der Achse. Sind nämlich w, v die Geschwindigkeiten der Punkte x, y, so lauten nach (28′) die Starrheitsbedingungen

$$\begin{aligned} w+(u,\ \bar{w})u &= iu[p,\ x-a]^*, \\ v+(u,\ \bar{v})u &= iu[p,\ y-a]^*. \end{aligned} \tag{36}$$

Durch Subtraktion findet man:

$$(w-v)+(u,\ \overline{w-v})u = iu[p,\ x-y]^*. \tag{37}$$

Könnte man nun den Punkt y als Zentrum der starren Bewegung ansehen, so müßte gemäß der Definition (28′) die Gleichung

$$w+(v,\ \bar{w})v = iu[p,\ x-y]^* \tag{38}$$

bestehen, die der vorhergehenden (37) im allgemeinen widerspricht. Man kann also keinen beliebigen anderen Punkt als Zentrum wählen, wohl aber Punkte der instantanen Achse. Denn da für diese $v = u$ ist, wird die linke Seite von (37) zu

$$w-u+(u,\ \bar{w})u-(u,\ \bar{u})u = w+(u,\ \bar{w})u,$$

d. h. mit der von (38) identisch.

Ist R die Ruh-Entfernung der beiden beliebigen Punkte x, y, d. h.

$$R^2 = (x-y,\ \overline{x-y}),$$

so folgt durch Differentiation nach der Eigenzeit σ des Zentrums a (wie auf S. 13):

$$R\frac{dR}{d\sigma} = \left(x-y,\ \overline{w\frac{d\tau}{d\sigma}-v\frac{dx}{d\sigma}}\right), \tag{39}$$

wo τ und $\varkappa$ die Eigenzeiten der Punkte x, y sind.

Nun folgt zwar aus (37) durch Multiplikation mit $(x-y)$ wie früher

$$(x-y,\ \overline{w-v}) = 0,$$

daraus aber kann man im allgemeinen nicht auf das Verschwinden der rechten Seite von (39) schließen.

Digitized by Google

§ 5. Spezielle Bewegungen.

Ist der Rotationsvektor $\mathfrak{p}$ identisch Null, woraus wegen (19′) das identische Verschwinden von p folgt, so ist die Bewegung als eine reine Translation anzusehen. In diesem Falle folgt aus

$$w + (u, \bar{w})u = 0$$

durch Multiplikation mit w wegen (18)

$$(w, \bar{w}) + (u, \bar{w})^2 = -1 + (u, \bar{w})^2 = 0,$$

also

$$(u, \bar{w}) = \pm 1.$$

Hier ist das negative Zeichen zu wählen; denn ist $\mathfrak{u} = 0$, also $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $u_4 = i$, so geht $(u, \bar{w})$ in

$$iw_4 = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathfrak{w}^2|}{c^2}}}$$

über, und da die Quadratwurzel immer positiv ist, hat man

$$(u, \bar{w}) = -1$$

zu setzen.

Also ist bei der Translation:

$$w = u. \tag{40}$$

Diese Gleichung zusammen mit den Bedingungen

$$(u, \bar{u}) = -1, \quad (w, \bar{w}) = -1, \quad (u, \overline{x-a}) = 0 \tag{41}$$

ist vollkommen äquivalent mit dem regulären Falle der Bewegung eines gemäß meiner ersten Definition als starr zu bezeichnenden Körpers, wie aus den Resultaten von Herglotz und Noether[1]) hervorgeht. Man kann nämlich die Gleichungen (40), (41) so in Worte fassen:

Bei einer Translation sind die Weltlinien der Punkte des Körpers die orthogonalen Trajektorien einer Schar von orthogonalen Räumen[2]).

Die von mir auf die Dynamik des Elektrons gemachte Anwendung meiner ersten Definition der Starrheit behält demnach ihre volle Gültigkeit auch bei Annahme der neuen Definition.

Ein weiterer einfacher Spezialfall ist der, daß das Zentrum

1) Vergl. l. c. (Anm. 2, S. 161).

2) Vergl. G. Herglotz, l. c. (Anm. 2, S. 161), Fall A auf S. 401.

Digitized by Google

dauernd ruht; dann reduziert sich, wie schon auf S. 18 gesagt wurde, die Rotation q auf den Raumvektor

$$\mathfrak{q} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}]$$

und die Definitionsgleichung (28′) geht in

$$\frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{1-\frac{|\mathfrak{w}|^2}{c^2}}} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}] \tag{42}$$

über. Durch Vergleich mit (1), § 1, sieht man, daß die Bewegung nur bis auf Glieder 2. Ordnung mit der Rotation der gewöhnlichen Kinematik übereinstimmt.

Rotiert z. B. der Körper um die x-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{p}_x$, so ist die Lösung von (42) darstellbar in der Form

$$\begin{aligned} x &= \text{konst.}, \\ y &= \varrho \cos \varphi, \\ z &= \varrho \sin \varphi, \end{aligned}$$

wo ϱ eine Konstante und

$$\varphi = \frac{\mathfrak{p}_x}{\sqrt{1+\frac{\varrho^2 \mathfrak{p}_x^2}{c^2}}} t$$

ist. Die vom ruhenden System gemessene Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ nimmt also mit wachsendem Abstande ϱ von der Achse ab [1]). Die Umfangsgeschwindigkeit $\varrho \frac{d\varphi}{dt}$ bleibt immer kleiner als c, so-daß keine Beschränkung der Dimensionen des starren Körpers, wie sie bei beschleunigter Translation auftritt, hier vorhanden ist.

Ein anderes einfaches Beispiel ist folgendes.

Das Zentrum möge eine Hyperbelbewegung (gleichförmig beschleunigte Translation) ausführen, und der Körper möge um die Translationsrichtung rotieren. Es sei also:

$$\left\{ \begin{aligned} a_1^2 + a_4^2 &= \text{konst.} = \sigma_1^2, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = 0, \\ p_2 &= 0, \\ p_3 &= 0. \end{aligned} \right. \tag{43}$$

Führen wir statt der Eigenzeit σ die imaginäre Größe

$$\sigma_4 = ic\sigma$$

ein, so kann man die Bewegung mit Hilfe von trigonometrischen

1) Danach wäre die Erdkugel schwerlich ein in diesem Sinne „starrer" Körper.

Digitized by Google

Funktionen des imaginären Argumentes $\frac{\sigma_4}{\sigma_1}$ (hyperbolischen Funktionen) so darstellen:

$$(44)\quad a_1 = \sigma_1 \cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1},\qquad a_2 = 0,\qquad a_3 = 0,\qquad a_4 = \sigma_1 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1}.$$

Dann wird

$$(45)\quad u_1 = -i \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1},\qquad u_2 = 0,\qquad u_3 = 0,\qquad u_4 = i\cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1}.$$

Bestimmen wir zunächst σ als Funktion der x_α aus der Gleichung (17). Diese lautet hier:

$$x_1 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1} - x_4 \cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1} = 0,$$

woraus sich

$$(46)\qquad \frac{x_4}{x_1} = \operatorname{tg}\frac{\sigma_4}{\sigma_1}$$

ergibt.

Nach (21) werden die Komponenten von Q:

$$Q_{23} = 0,\qquad Q_{31} = -p_1 x_3,\qquad Q_{12} = p_1 x_2,$$
$$Q_{14} = p_1\left(x_4 - \sigma_1 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\right) - p_4\left(x_1 - \sigma_1\cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\right),\qquad Q_{24} = -p_4 x_2,$$
$$Q_{34} = -p_4 x_3.$$

Aus (23) findet man die Komponenten von q:

$$q_1 = 0,$$
$$q_2 = \left(p_4 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1} + p_1\cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\right)x_2,$$
$$q_3 = -\left(p_4 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1} + p_1\cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\right)x_2,$$
$$q_4 = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also:

$$(47a)\qquad w_1 \cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1} + w_4 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1} = 0,$$

$$(47b)\qquad w_2 = \left(p_4 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1} + p_1\cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\right)x_2,$$

$$(47c)\qquad w_3 = -\left(p_4 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1} + p_1\cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1}\right)x_2,$$

und diese bestimmen zusammen mit

Digitized by Google

$$w_1^2 + w_4^2 = -1 \tag{48}$$

die Bewegung vollkommen.

Es fällt die Uebereinstimmung der Gleichungen (47b) und (47c) mit den Formeln ins Auge, die in der gewöhnlichen Kinematik eine Rotation um die x-Achse ausdrücken. Aus (47a) folgt in Verbindung mit (46):

$$\frac{w_1}{w_4} = -\frac{x_4}{x_1}$$

oder

$$x_1 \frac{dx_1}{d\tau} + x_4 \frac{dx_4}{d\tau} = 0.$$

Daraus folgt:

$$x_1^2 + x_4^2 = \text{konst.} = \xi_1^2, \tag{49}$$

d. h. die Projektionen sämtlicher Punkte des Körpers auf die Translationsrichtung x führen Hyperbelbewegungen aus.

Dividieren wir (47b) und (47c), so folgt:

$$\frac{w_2}{w_3} = -\frac{x_3}{x_2}$$

oder

$$x_2 \frac{dx_2}{d\tau} + x_3 \frac{dx_3}{d\tau} = 0.$$

Daraus folgt

$$x_2^2 + x_3^2 = \text{konst.} = \varrho^2, \tag{50}$$

d. h. jeder Punkt des Körpers verbleibt bei der Bewegung auf einem Kreiszylinder, dessen Achse die x-Achse ist.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} x_2 &= \varrho \cos\varphi, \\ x_3 &= \varrho \sin\varphi, \end{aligned} \tag{51}$$

wo φ der im ruhenden System gemessene Winkel ist, um den ein Punkt x sich aus der xy-Ebene heraus gedreht hat. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_4} &= -\varrho \sin\varphi \frac{d\varphi}{dx_4} = -\frac{d\varphi}{dx_4} x_3, \\ \frac{dx_3}{dx_4} &= \varrho \cos\varphi \frac{d\varphi}{dx_4} = \frac{d\varphi}{dx_4} x_2. \end{aligned} \tag{52}$$

Andererseits betrachten wir (47b) und (47c). Die Gleichung (19) lautet hier

$$p_1 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1} - p_4 \cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1} = 0,$$

Digitized by Google

woraus .

$$\frac{p_4}{p_1} = \operatorname{tg}\frac{\sigma_4}{\sigma_1}$$

folgt.

Demnach wird die Klammer in den Formeln (47b), (47c):

$$p_4 \sin\frac{\sigma_4}{\sigma_1} + p_1 \cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1} = \frac{p_1}{\cos\frac{\sigma_4}{\sigma_1}}.$$

Führen wir statt der Eigenzeit τ des Punktes x die Größe $\xi_4 = ic\tau$ ein, so können wir die Hyperbelbewegung (49) so darstellen:

$$x_1 = \xi_1 \cos\frac{\xi_4}{\xi_1}, \qquad x_4 = \xi_1 \sin\frac{\xi_4}{\xi_1}, \tag{54}$$

woraus

$$w_1 = -i \sin\frac{\xi_4}{\xi_1}, \qquad w_4 = i\cos\frac{\xi_4}{\xi_1} \tag{55}$$

folgt.

Dann ergibt sich aus (46) und (54):

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma_4}{\sigma_1} = \operatorname{tg}\frac{\xi_4}{\xi_1},$$

$$\frac{\sigma_4}{\sigma_1} = \frac{\xi_4}{\xi_1}. \tag{56}$$

Dividieren wir nun (47b) und (47c) durch w_4 und setzen die Werte (53), (55), (56) ein, so bekommen wir:

$$\frac{w_2}{w_4} = \frac{p_1 x_3}{i\cos^2\frac{\xi_4}{\xi_1}},$$

$$\frac{w_3}{w_4} = \frac{-p_1 x_2}{i\cos^2\frac{\xi_4}{\xi_1}}.$$

Indem wir hier noch nach (54) $\cos^2\frac{\xi_4}{\xi_1} = 1 - \left(\frac{x_4}{\xi_1}\right)^2$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{dx_2}{dx_4} = \frac{-ip_1}{1-\left(\frac{x_4}{\xi_1}\right)^2} x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dx_4} = \frac{ip_1}{1-\left(\frac{x_4}{\xi_1}\right)^2} x_2. \tag{57}$$

Digitized by Google

Dies können wir mit dem Ansatze (52) vergleichen. Man findet

$$\frac{d\varphi}{dx_4} = \frac{ip_1}{1-\left(\frac{x_4}{\xi_1}\right)^2}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Zeit des Zentrums mit t, sodaß $ict = x_4$ ist, so bekommen wir für die Winkelgeschwindigkeit im ruhenden Systeme (die nicht mit dem Vektor $\mathfrak{p}$ zu verwechseln ist) die Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-\mathfrak{p}_x}{1+\frac{c^2}{\xi_1^2}t^2}. \tag{58}$$

Da $\mathfrak{p}_x$ als Funktion von t gegeben ist, erhält man φ durch eine Quadratur. Ist z. B. $\mathfrak{p}_x$ konstant, so findet man

$$\varphi = -\frac{\xi_1 \mathfrak{p}_x}{c} \operatorname{arctg} \frac{ct}{\xi_1}. \tag{59}$$

Der Körper führt also, während er sich vom Unendlichen herannähert, umkehrt und sich wieder ins Unendliche entfernt, $\frac{\xi_1 \mathfrak{p}_x}{c}$ volle Umdrehungen aus; dabei hat er vom ruhenden Koordinatensystem aus beurteilt nach (58) nur bei $t = 0$, d. h. im Momente, wo er umkehrt und somit ruht, die volle Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{p}_x$. Bekanntlich ist $b = \frac{c^2}{\xi_1}$ die Beschleunigung der Hyperbelbewegung [1]). Also ist die Anzahl der vollen Umdrehungen $\frac{c\mathfrak{p}_x}{b}$; sie ist um so größer, je kleiner die Beschleunigung ist.

Entwickelt man (59) nach Potenzen von b, so kommt

$$\varphi = -\mathfrak{p}_x t\left(1-\frac{1}{3}\frac{b^2t^2}{c^2}+\cdots\right).$$

Sobald also das Quadrat von bt gegen das der Lichtgeschwindigkeit zu vernachlässigen ist, erscheint die Rotation auch vom ruhenden System aus als gleichförmig.

Damit die Umfangsgeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit bleibt, muß

$$|\mathfrak{p}_x| < \frac{c}{\varrho} \tag{60}$$

sein. Damit ist eine neue Beschränkung der Dimensionen eines starren Körpers gegeben, die der von mir früher für Translationen gefundenen analog ist.

1) Vergl. M. Born, l. c. (Anm. 1, S. 161), S. 26.

Digitized by Google

Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe.

(Fortsetzung und Schluß)[1].

Von

Paul Koebe in Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 28. Mai 1910.

In einer gleichbetitelten Note vom 20. Februar 1909 (Gött. Nachr.) habe ich gezeigt, wie mit Hülfe eines von mir zuerst in einer Voranzeige (Gött. Nachr. 22. Februar 1908) publizierten iterierenden Verfahrens ein von Herrn Klein (Math. Ann. Bd. 19, 1882) aufgestelltes Uniformisierungstheorem bewiesen werden kann, nämlich speziell das auf die automorphen Funktionen des Schottkyschen Typus sich beziehende Theorem. In der genannten Voranzeige habe ich die weitergehende Behauptung ausgesprochen, daß diese Methode mit Erfolg überhaupt auf alle von Herrn Klein Math. Ann. Bd. XXI (1883) in der Abhandlung „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie" aufgestellten Uniformisierungstheoreme („Fundamentaltheoreme") angewandt werden kann[2]. Für diese Theoreme ist charakteristisch, daß der ent-

1) Im folgenden gebe ich den Inhalt eines von mir kürzlich in der Gött. Math. Gesellschaft gehaltenen Vortrages wieder. Ausführlicher komme ich auf den Gegenstand an anderer Stelle zurück.

2) Dies will insbesondere sagen, daß sich nach dieser Methode auch diejenigen Kleinschen Fundamentaltheoreme ausnahmslos erledigen lassen, bei welchen das Existenzgebiet der betreffenden eindeutigen automorphen Funktionen unendlich viele Grenzkreise als natürliche Grenzen besitzt. Der Nachweis dieser Theoreme ist bisher von anderer Seite auch nicht in einem Spezialfalle geliefert worden.

Digitized by Google

sprechende Fundamentalbereich nach dem „Prinzip der Ineinanderschiebung“ (Klein l. c.) aus einfacheren Fundamentalbereichen entsteht. Wir knüpfen an einen wesentlich neuen Konvergenzbeweis für das iterierende Verfahren an, welchen ich neuerdings in der Abhandlung „über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II“ (Math. Ann. Bd. 69, 1910) veröffentlicht habe. Dieser neue Beweis bedarf, um zu dem erwähnten Ziele (nämlich dem Beweise aller Kleinschen Fundamentaltheoreme) zu gelangen, einer wesentlichen Vertiefung, welche übrigens in der Methode des iterierenden Verfahrens selbst in naturgemäßer Weise begründet ist.

Ich beginne mit der Voranstellung einiger Uniformisierungsprobleme, welche in bestimmter Stufenfolge die auftretenden Schwierigkeiten zeigen.

I. Die Riemannsche Fläche F der algebraischen Funktion $y(x)$ vom Geschlecht p ist längs p die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitten aufgeschnitten. Es wird verlangt, die aufgeschnittene Fläche umkehrbar eindeutig und konform auf einen schlichten von $2p$ paarweise durch lineare Substitutionen auf einander bezogenen Randkurven begrenzten Bereich abzubilden. (Klein, Math. Ann. Bd. 19, 1881).

II. Die Fläche F ist wie in der Theorie der Abelschen Integrale längs p Rückkehrschnittpaaren mit je einem Kreuzungspunkt aufgeschnitten. Es wird verlangt, dieselbe auf einen schlichten Bereich mit p Randkurven abzubilden, deren einzelne die Gestalt eines durch eine gebrochene lineare Substitution transformierten Parallelogramms (mit durch parabolische Substitutionen zugeordneten gegenüberliegenden Seiten) hat.

III. Die erwähnten p Rückkehrschnittpaare seien in ν Klassen von $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ Paaren eingeteilt und die Paare einer und derselben Klasse (etwa der k-ten Klasse) dadurch zu einem einzigen Zuge Z_k vereinigt, daß man die betreffenden k Kreuzungspunkte durch stetige Deformation der Rückkehrschnittpaare nach einem Punkte zusammenzieht. Dadurch wird die Fläche F in eine ν-fach zusammenhängende Fläche verwandelt. Diese ν-fach zusammenhängende Fläche ist auf einen schlichten Bereich abzubilden, dessen einzelne Begrenzungslinie $\overline{Z_k}$ der Linie Z_k entspricht und auf diese Weise $4p_k$ Seiten besitzt, die in bestimmter Weise durch lineare Substitutionen einander zugeordnet sind. Diese Substitutionen führen dabei ihrerseits sämtlich einen dem Zuge $\overline{Z_k}$ zugeordneten Grenzkreis K_k in sich über. (Klein, Ann. 21, 1883).

Digitized by Google

Den genannten drei Problemen lassen sich parallellaufend bestimmte Abbildungsaufgaben über mehrfach zusammenhängende Bereiche gegenüberstellen, welche ebenso wie die erwähnten Uniformisierungsprobleme durch das iterierende Verfahren gelöst werden können und mittelbar als Spezialfälle dieser Uniformisierungsprobleme aufgefaßt werden können.

I a. Ein gegebener schlichter $(p+1)$-fach zusammenhängender Bereich soll auf einen von $p+1$ Vollkreisen begrenzten Bereich abgebildet werden.

II a—III a. Auf den Begrenzungslinien desselben Bereichs sind je endlich viele Punkte markiert. Jedem markierten Punkte ist eine ganze positive Zahl $\geqq 2$ zugeordnet, welche auch gleich ∞ gesetzt werden kann. Es wird eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Bereichs auf einen ebenfalls schlichten Bereich verlangt, dessen einzelne Begrenzungslinie ein Kreisbogenpolygon mit Orthogonalkreis (Grenzkreis) ist, der in Ausnahmefällen punktförmig oder imaginär werden kann. Die Anzahl der Seiten dieses Polygons soll gleich der Anzahl der auf der erwähnten Begrenzungslinie markierten Punkte sein. Die markierten Punkte selbst sollen in die Eckpunkte des Polygons übergehen, wobei zugleich die einem markierten Punkte zugeordnete ganze Zahl angibt, welchem genauen Teil von π der in dem betreffenden Eckpunkte gebildete Winkel des Polygons gleich sein soll.

Um mein Beweisverfahren darzulegen, schildere ich es am Falle des Problems I und gebe dann später an, welche weiteren Bemerkungen zu machen sind, um auch die Probleme II, III u. s. w. zu erledigen.

Wir denken uns zunächst die längs den p Rückkehrschnitten aufgeschnittene Fläche F umkehrbar eindeutig und konform auf einen schlichten Bereich Φ mit $2p$ paarweise durch analytische Substitutionen auf einander bezogenen Randkurven abgebildet. Auf den Bereich Φ wird nun das iterierende Verfahren in folgender Weise angewandt.

Wir nehmen etwa $p = 2$ an. Man verwandle zunächst die erste der beiden Randsubstitutionen in eine lineare Substitution, indem man den von dem ersten Rand-Kurvenpaar allein begrenzten zweifach zusammenhängenden Bereich auf einen zweifach zusammenhängenden schlichten Bereich mit linearer Ränderzuordnung abbildet, was nach längst bekannten Methoden möglich ist. Dabei geht Φ in einen Bereich Φ_1 über, für welchen nun in der Tat die erste Randsubstitution linear ist. Nunmehr wird von Φ_1 aus-

Digitized by Google

gegangen und durch eine analoge Operation die zweite Randsubstitution linear gemacht, wobei Φ_1 in einen Bereich Φ_2 übergeht. Darauf wird durch eine neue Operation wieder die erste Randsubstitution linear gemacht, indem Φ_2 in einen Bereich Φ_3 verwandelt wird; darauf wieder die zweite Randsubstitution u. s. w. Um bestimmtes zu definieren, normiere man die einzelne Abbildung so, daß, wenn die Ebene des Bereichs Φ als x-Ebene, die des Bereichs $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ bezw. als z_1-Ebene, z_2-Ebene, ... bezeichnet wird, die Funktion $z_n(x)$ im Unendlichen eine Entwicklung der Form

$$x + ((0))$$

hat, unter $((0))$ eine für $x = \infty$ verschwindende reguläre Funktion verstanden.

Um die Wirkung des iterierenden Verfahrens zu schildern, wollen wir für einen Augenblick einen von 2 Randkurvenpaaren begrenzten schlichten Hülfsfundamentalbereich H betrachten, dessen Randkurvenpaare durch lineare Substitutionen bezogen sind. Die Randsubstitutionen mögen mit S_1 und S_2 bezeichnet werden.

Wenden wir die Substitutionen $S_1^\alpha [\alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots]$ auf den Bereich H an, so ergeben sich unendlich viele neben einander gelagerte Bildexemplare des Bereichs H, die zusammen mit H einen gewissen unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereich H_1 bilden. Ebenso gelangen wir durch Ausübung der Substitutionen $S_2^\alpha [\alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots]$ zu einem Bereiche H_2. Der Bereich $H_1 + H_2$ werde mit $H^{(1)}$ bezeichnet. Dabei ist der Bereich H selbst zweimal aufgeführt, was für die Folge keine Bedeutung hat. Der Bereich $H^{(1)}$ wird von unendlich vielen Randkurven begrenzt, die ihrerseits ihrer Entstehung gemäß durch lineare Substitutionen paarweise einander zugeordnet sind. Fassen wir eins dieser Paare ins Auge, so wird an dasselbe ein bestimmter Bildbereich von H angrenzen, welcher dem Bereich $H^{(1)}$ als Teilbereich angehört. Auf diesen Bildbereich können wir nun die durch die soeben erwähnte Randsubstitution und ihre (positiven und negativen) Wiederholungen definierte Gesamtheit von Substitutionen ausüben, wodurch sich an jede Linie des erwähnten Paares je ein neuer unendlich-vielfach zusammenhängender Bereich ansetzt. Diese Operation können wir nun für jedes Randkurvenpaar des Bereichs $H^{(1)}$ ausführen. Dadurch wird der Bereich $H^{(1)}$ zu einem Bereich $H^{(2)}$ erweitert, der den Bereich $H^{(1)}$ als Teil enthält. Der Bereich $H^{(2)}$ wird ebenso wie der Bereich $H^{(1)}$ seiner Entstehung gemäß durch unendlich viele paarweise durch lineare Substitutionen auf einander bezogene Randkurven begrenzt. Wir können daher von $H^{(2)}$ analog zu einem Bereiche $H^{(3)}$ gelangen, von $H^{(3)}$ zu $H^{(4)}$ u. s. f.

Digitized by Google

Wir können uns nun vorstellen, daß ein schlichter Bereich mit $2p$ Randkurven, die paarweise durch analytische Substitutionen auf einander bezogen sind, die Eigenschaft besitzt, daß ganz analog wie im Falle linearer Substitutionen die Bereiche $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ u. s. w. gebildet werden können, insofern nämlich die betreffenden Substitutionen und deren Zusammensetzungen, vermöge welcher wir soeben zu diesen Bereichen gelangten, jetzt ebenfalls unbedenklich ausgeübt werden können, indem dabei eine schlichte Nebeneinanderlagerung der Bildbereiche zustandekommt.

Wenden wir nun in der oben geschilderten Weise das iterierende Verfahren an, so bemerken wir sofort, daß inbezug auf den Bereich Φ_1 der Bereich H_1 gebildet werden kann, inbezug auf Φ_2 der Bereich $H^{(1)}$, inbezug auf Φ_3 der Bereich $H^{(2)}$ u. s. w.

Bezeichnen wir die Funktion, welche die konforme Abbildung des Bereichs Φ auf den Bereich Φ_n vermittelt, mit $\varphi_n(x)$, so ist nun der Nachweis zu führen, daß die Differenz

$$| \varphi_{n+m}(x) - \varphi_n(x) |$$

in Φ gleichmäßig gegen null konvergiert, wenn n unendlich groß wird.

Zu dem Zwecke wählen wir einen Punkt x_0 im Innern von Φ. Diesem Punkte entspricht in Φ_n ein Punkt $z_{n,0}$. Die Differenz $\varphi_{n+m}(x) - \varphi_n(x)$ kann als Funktion von z_n betrachtet werden und möge als solche mit $d_{n,m}(z_n)$ bezeichnet werden. Dadurch wird gewissermaßen eine weitgehende analytische Fortsetzung dieser Funktion erzielt. In der Tat existiert die Funktion $d_{n,m}(z_n)$ nicht nur in dem Bereiche Φ_n, welcher das Bild von Φ ist, sondern in dem ganzen zu Φ_n gehörenden Bereiche $H^{(n-1)}$, den wir, um seine Entstehung aus dem Bereiche Φ_n zu kennzeichnen, präziser mit $H_n^{(n-1)}$ bezeichnen. Es ist nun der Nachweis zu führen, daß der Wert $d_{n,m}(z_{n,0})$ gegen null konvergiert, wenn n unendlich groß wird. Dazu stellen wir diesen Wert durch das Cauchysche Integral dar

$$d_{n,m}(z_{n,0}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h_n^{(n-1)}} \frac{d_{n,m}(z_n')\, dz_n'}{z_n' - z_{n,0}},$$

wobei mit $h_n^{(n-1)}$ die aus unendlich vielen getrennten Linien bestehende vollständige Begrenzung des Bereichs $H_n^{(n-1)}$ bezeichnet ist. Die Zulässigkeit einer solchen Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes erfordert einige wesentliche Ueberlegungen, da ja der Bereich $H_n^{(n-1)}$ unendlich-vielfach zusammenhängend ist. Bei diesen Ueberlegungen kommt es darauf an folgendes zu zeigen:

Digitized by Google

1) Die Summe der Quadrate der Umfänge aller Begrenzungslinien des Bereichs $H_n^{(n-1)}$ ist konvergent.

2. Die Summe der Quadrate der Schwankungen der Funktion $d_{n,m}(z_n')$ längs sämtlichen erwähnten Begrenzungslinien ist konvergent.

3. Man kann endlich viele ganz im Innern des Bereichs $H_n^{(n-1)}$ verlaufende geschlossene Hülfslinien A konstruieren von beliebig kleinem Gesamtumfang, so zwar, daß diese Hülfslinien sich gegenseitig ausschließen und ein den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltendes endlich-vielfach zusammenhängendes Teilgebiet von $H_n^{(n-1)}$ begrenzen. Jede dieser Hülfslinien A wird, allgemein zu reden, unendlich viele Begrenzungslinien des Bereichs $H_n^{(n-1)}$ umschließen, und es gibt im ganzen nur endlich viele Begrenzungslinien dieses Bereichs, welche von keiner der erwähnten Hülfslinien umschlossen werden.

Was die erste und zweite Behauptung anbetrifft, so ergibt sich die Richtigkeit derselben sofort aus meinem „Verzerrungssatze“ [1]) für analytische Funktionen. Die Richtigkeit der dritten Behauptung ergibt sich als eine wesentliche Folge des iterierenden Verfahrens selbst. Man erkennt sofort, daß die analoge Behauptung für die Bereiche H_1 und H_2 zutrifft, wenn ersterer Bereich inbezug auf Φ_1, letzterer inbezug auf Φ_2 gebildet wird. Aber auch für den inbezug auf Φ_2 gebildeten Bereich $H^{(1)}$ trifft die Behauptung zu, weil dieser Bereich aus dem entsprechenden zu Φ_1 gehörenden Bereich gemäß dem iterierenden Verfahren durch eine singularitätenfreie Transformation entsteht. In der Tat ist die von Φ_1 zu Φ_2 führende konforme Transformation in dem ganzen zweifach zusammenhängenden Gebiet, welches allein durch das zweite Randkurvenpaar von Φ_1 begrenzt wird, singularitätenfrei. Durch wiederholte Anwendung dieses Gedankens erkennt man, indem man sich durch das iterierende Verfahren selbst leiten läßt, die Richtigkeit der obigen dritten Behauptung in ihrem ganzen Umfange.

Nachdem die Anwendbarkeit der Cauchyschen Integralformel

---

1) „Es sei $f(z)$ eine analytische Funktion von z, welche für das Gebiet $|z| < 1$ regulär erklärt ist und keinen Wert mehr als einmal annimmt. Sind dann z' und z'' irgend zwei Werte, deren absoluter Betrag $\leqq \varrho < 1$ ist, so gibt es eine von der Wahl dieser Punkte und auch von der Wahl der Funktion unabhängige Größe $q < 1$, sodaß ist $q < \left|\frac{df(z')}{dz'}\right| : \left|\frac{df(z'')}{dz''}\right| < \frac{1}{q}$.“ Vgl. Gött. Nachr., 20. Februar 1909 und Math. Ann. Bd. 69 „über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II“, 1910.

Digitized by Google

auf den unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereich $H_n^{(n-1)}$ festgestellt ist, ist noch zu zeigen, daß die Summe der Quadrate der Umfänge, bezw. die Summe der Quadrate der Schwankungen, gebildet über alle Linien der Begrenzung $h_n^{(n-1)}$ von $H_n^{(n-1)}$ gegen null konvergiert, wenn man n unendlich groß werden läßt. Die Grundlage für diesen Nachweis bildet wieder der Verzerrungssatz. Nach diesem Satze liegen sämtliche Begrenzungslinien des Bereichs Φ_n in einem von der Wahl des Index n unabhängig angebbaren endlichen Bezirk. Bilden wir nun für den Bereich Φ_n sukzessive die Bereiche $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, H_n^{(3)}, \ldots$, indem mit $H_n^{(\alpha)}$ allgemein der aus Φ_n entspringende Bereich $H^{(\alpha)}$ bezeichnet ist, bezeichnen wir sodann mit $f_n^{(\alpha)}$ den von den unendlich vielen Begrenzungslinien des Bereichs $H_n^{(\alpha)}$ umschlossenen Gesamtflächeninhalt, so lehrt der Verzerrungssatz, daß es eine den Ungleichheitsbedingungen $0 < q < 1$ genügende Größe q gibt, die von n und α unabhängig ist, sodaß

$$f_n^{(\alpha+1)} < q f_n^{(\alpha)}$$

ist. Daraus folgt

$$\lim_{n=\infty} f_n^{(n-1)} = 0.$$

Nunmehr findet man sofort die zum Beweise der Gleichung $\lim_{n=\infty} d_{n,m}(z_{n,0})$ erforderliche Tatsache, daß die Summe der Quadrate der Umfänge bezw. Schwankungen auf $h_n^{(n-1)}$ für $n = \infty$ unendlich klein wird.

Nachdem die Konvergenz der Folge $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$ erkannt ist, ergibt sich unmittelbar, daß für den Grenzbereich $\Phi_\infty = \lim_{n=\infty} \Phi_n$ die Randsubstitutionen linear sind, weil nämlich bei den Bereichen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ abwechselnd die erste und zweite Substitution linear ist. Damit aber ist der Beweis des Fundamentaltheorems geführt.

Unsere Methode der Abschätzung läßt auch sofort erkennen, daß das betrachtete Uniformisierungsproblem, abgesehen von einer linearen Substitution, nicht mehr als eine Lösung haben kann. Hat man nämlich zwei den gestellten Bedingungen genügende Fundamentalbereiche, so haben wir, wenn mit t die Variable des einen Bereichs, mit $\bar{t}$ die Variable des andern Bereichs bezeichnet wird, in der Funktion $\bar{t}(t)$ eine Funktion von t, von welcher wir annehmen können, daß sie im Unendlichen die Form

$$\bar{t} = t + ((0))$$

Digitized by Google

hat, sodaß $\bar{t} - t$ eine Funktion von t ist, die im Unendlichen verschwindet. Stellen wir den Wert dieser Funktion durch das Cauchysche Integral dar, so erkennt man nach der geschilderten Methode der Abschätzung in beiden Fällen das Verschwinden des genannten Integrals.

Wir haben noch einige wesentliche Bemerkungen hinzuzufügen, um zu erläutern, inwiefern unser soeben geschildertes Verfahren auch zur Erledigung der oben mit II und III sowie IIa und IIIa bezeichneten Probleme dienen kann.

Was zunächst das Theorem II anbetrifft, so haben wir wesentlich nur eine Bemerkung bezüglich der Wahl der Hülfslinien A mit beliebig kleinem Gesamtumfang hinzuzufügen. Als solche eignen sich, wenn man sich eins der begrenzenden Parallelogramme etwa in der untransformierten Gestalt vorstellt, wobei die Substitutionen euklidische Verschiebungen werden, diejenigen parallelogrammförmigen Linienzüge, welche, wenn a, $-a$, b, $-b$ die Eckpunkte des Ausgangsparallelogramms sind, zu Eckpunkten die Punkte ma, $-ma$, mb, $-mb$ hat, unter m eine positive ganze Zahl verstanden.

Bezüglich des Problems III kommen weitere wesentlich neue Gedanken hinzu.

Zunächst sind für das jetzt zu erörternde Problem die den Bereichen H_1, H_2, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, ... analogen Hülfsbereiche zu definieren. Dazu gehen wir aus von einem Hülfsfundamentalbereich $\overline{H}$ des zu betrachtenden Typus, welchen wir etwa zweifach zusammenhängend wählen wollen. Wir nehmen also $\nu = 2$ an (s. oben pag. 181). Zu jeder Begrenzungslinie dieses Fundamentalbereichs gehört ein bestimmter Grenzkreis und eine durch die auf der betreffenden Begrenzungslinie definierten Substitutionen bestimmte Gruppe linearer Substitutionen, welche alle den erwähnten Kreis in sich transformieren. Um zu dem Bereiche $\overline{H}_1$ zu gelangen, denken wir uns auf den Bereich $\overline{H}$ erstens die zur ersten Begrenzungslinie gehörende Grenzkreisgruppe angewandt, wodurch $\overline{H}$ zu einem unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereiche $\overline{H}'$ erweitert wird, welcher sich an den ersten Grenzkreis heranerstreckt. Spiegeln wir den Bereich $\overline{H}'$ an dem erwähnten Grenzkreise, so entsteht ein Bereich $\overline{H}''$. Der Bereich $\overline{H}' + \overline{H}''$ stellt für unsere Zwecke das Analogon des oben mit H_1 bezeichneten

Digitized by Google

Bereichs dar. Wir werden ihn demgemäß mit $\overline{H}_1$ bezeichnen. Auf dieselbe Weise kann der zweiten Begrenzungslinie des Bereichs $\overline{H}$ entsprechend ein Bereich $\overline{H}_2$ gebildet werden. Der Bereich $\overline{H}_1 + \overline{H}_2$ ist mit $\overline{H}^{(1)}$ zu bezeichnen.

Der Bereich $\overline{H}^{(1)}$ besitzt unendlich viele isolierte Begrenzungslinien, längs deren jeder ein bestimmtes System von Substitutionen definiert ist. Außerdem besitzt der Bereich $\overline{H}^{(1)}$ zwei nichtisolierte Begrenzungslinien, nämlich die beiden zugleich mit $\overline{H}$ definierten Grenzkreise. Der Bereich $\overline{H}^{(1)}$ ist somit kein eigentlich zusammenhängender Bereich, vielmehr besteht er aus drei unter einander nicht zusammenhängenden Stücken.

An jede isolierte Begrenzungslinie von $\overline{H}^{(1)}$ grenzt ein ganz bestimmter Bildbereich $\overline{\overline{H}}$ von $\overline{H}$ an, welcher in $\overline{H}^{(1)}$ als Teil enthalten ist. Indem wir auf diesen Bildbereich die durch die erwähnte Begrenzungslinie definierte Substitutionsgruppe anwenden, entsteht aus $\overline{\overline{H}}$ ein Bereich $\overline{\overline{H}}'$, welcher sich an einen neu auftretenden Grenzkreis heranstreckt. Durch Spiegelung an diesem Grenzkreise geht $\overline{\overline{H}}'$ in einen Bereich $\overline{\overline{H}}''$ über. Indem wir diese Operation für jede isolierte Begrenzungslinie des Bereichs $\overline{H}^{(1)}$ ausführen, erweitern wir diesen Bereich zu einem neuen Bereich $\overline{H}^{(2)}$, welcher von unendlich vielen unter einander nicht eigentlich zusammenhängenden Gebieten gebildet wird. In der angegebenen Weise fortfahrend gelangen wir zu Gebieten $\overline{H}^{(3)}$, $\overline{H}^{(4)}$, ..., schließlich zu einer vollständigen Bedeckung der Ebene.

Um nunmehr das iterierende Verfahren anwenden zu können, machen wir zunächst eine konforme Abbildung der aufgeschnittenen Riemannschen Fläche auf einen schlichten Bereich Φ. Das iterierende Verfahren besteht dann darin, daß wir abwechselnd die Substitutionen der einen und der andern Begrenzungslinie linear machen und zwar im Sinne der Grenzkreisuniformisierung. Die einzelne Operation bietet dabei keine prinzipiellen Schwierigkeiten dar, weil die Uniformisierung algebraischer Funktionen durch automorphe Funktionen mit einem Grenzkreise durch die Methode der Überlagerungsfläche vollständig erledigt ist.

Die Ausübung des iterierenden Verfahrens führt uns nun sukzessive zu Bereichen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n, \ldots$ deren Randsubstitutionen so beschaffen sind, daß für dieselben beziehungsweise die Bereiche $\overline{H}_1, \overline{H}_2^{(1)}, \overline{H}_3^{(2)}, \ldots, \overline{H}_n^{(n-1)}$ gebildet werden können. Die oben geschilderte Abschätzungsmethode bleibt nun vollständig in

Digitized by Google

Kraft. Es ist dabei wesentlich zu bemerken, daß die unendlich vielen nichtisolierten Begrenzungslinien des Bereichs $H_n^{(n-1)}$ in den obigen Ausdruck für $d_{n,m}(z_{n,0})$ durch das Cauchysche Integral nicht eingehen, indem sich nämlich, kurz ausgedrückt, das Integral über die eine Seite dieser Begrenzungslinie Element für Element forthebt gegen das Integral über die andere Seite der Begrenzungslinie. Solcherweise kommt man auch hier zu Ende.

In allen Fällen konvergiert das iterierende Verfahren wie eine geometrische Reihe.

Um den Kernpunkt der ganzen Beweisführung noch besonders zu nennen, hebe ich folgende Tatsachen hervor.

Ist ein gemäß dem Kleinschen Kompositionsprinzip gebildeter Fundamentalbereich gegeben und bestimmt man alle Reproduktionen dieses Fundamentalbereichs unter Heranziehung auch der Spiegelung an Grenzkreisen, so gelangt man zu einer vollständigen Bedeckung der Ebene [1]). Die Manigfaltigkeit aller sich ergebenden Grenzpunkte bezw. Grenzlinien kann mittels endlich vieler, die Begrenzungsmannigfaltigkeit selbst nicht treffender geschlossener Kurven in endlich viele Gebiete von beliebig kleinem Gesamtflächeninhalt eingeschlossen werden. Wir sagen dafür:

Der Inhalt der vollständigen Begrenzungsmannigfaltigkeit ist gleich null.

Zum Schluß will ich noch auf die Methode der Ueberlagerungsfläche hinweisen. Um nach dieser Methode die oben bewiesenen Sätze dartun zu können, hat man das von mir wiederholt hervorgehobene allgemeine Kreisnormierungsprinzip zu beweisen. Der Hilbertsche Gedanke, die allgemeinen Abbildungsprobleme, auf welche die Uniformisierungstheorie führt, mit Variationsproblemen in Verbindung zu bringen, wird vielleicht auch hier seine Fruchtbarkeit bewähren.

---

1) Diese Bemerkung findet sich schon bei Klein: „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie". Math. Ann. XXI, pag. 211. Das wesentliche für den Beweis ist dabei vor allem auch der spezielle Modus, nach welchem dieser Bedeckungsprozeß bei uns gemäß dem iterierenden Verfahren stattfindet.

Digitized by Google

Ueber quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen.

Von

Friedrich Riesz in Budapest.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn Hilbert.)

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 11. Juni 1910.

In Ihrer grundlegenden Arbeit über quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen[1]) haben Sie einen Satz über die Integraldarstellung der Resolvente aufgestellt und bewiesen, den ich hier in etwas veränderter Form wiedergebe:

Es sei

$$K(x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q \qquad (k_{pq} = k_{qp})$$

eine reelle beschränkte quadratische Form der unendlich vielen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$, *deren Wertevorrat bei der Bedingung*

$$(x, x) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 = 1$$

von m *bis* M *reicht.*

Es gibt eine für alle Werte $m \leqq \mu \leqq M$ *definierte beschränkte quadratische Form*

$$G(\mu; x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} G_{pq}(\mu) x_p x_q$$

derart, daß

$$(x, x) = \int_m^M dG(\mu; x),$$

$$K(x) = \int_m^M \mu \, dG(\mu; x)$$

---

1) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 4. Mitteilung, Göttinger Nachrichten, 1906, pp. 157—227.

Digitized by Google

ist, während die für beliebige komplexe oder außerhalb der Strecke (m, M) *gelegene reelle Werte* λ *durch das Integral*

$$1) \qquad K(\lambda; x) = \int_m^M \frac{dG(\mu; x)}{1 - \frac{\mu}{\lambda}}$$

definierte beschränkte quadratische Form $K(\lambda; x)$ *die Faltungsgleichung*

$$2) \qquad K(\lambda; x, y) - \frac{1}{\lambda} K(x, .)\, K(\lambda; ., y) = (x, y)$$

befriedigt.

Die Form $G(\mu; x)$ *stellt für jedes Wertsystem* $x_1, x_2, \ldots$ *eine mit wachsendem* μ *wachsende oder wenigstens nicht abnehmende Funktion von* μ *dar.*

Die Integrale sind als Stieltjessche Integrale zu deuten.

Gestatten Sie mir nun Ihnen mitzuteilen, wie sich dieser wichtige Satz zu meinen Untersuchungen über Systeme linearer Integralgleichungen mit Stieljesschen Integralen stellt, deren Resultate ich vor kurzem in zwei Notizen veröffentlichte[1]). Es handelte sich dort um die Lösung des Systems

$$3) \qquad \int_m^M f_i(\mu)\, d\alpha(\mu) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen $f_i(\mu)$; von der gesuchten Funktion $\alpha(x)$ wurde gefordert, daß dieselbe *beschränkter Schwankung sei und ihre totale Schwankung den gegebenen Wert* G *nicht übersteige. Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer solchen Lösung ergab sich das Erfülltsein der Ungleichung*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \nu_i c_i \right| \leqq G \times maximum \left| \sum_{i=1}^{n} \nu_i f_i(\mu) \right|$$

für alle n *und jedes System der beliebigen komplexen Werte* ν_i.

Ich bemerke sofort, daß für die Anwendung auf quadratische Formen schon die speziellere Fassung dieses Resultates hinreicht, welche voraussetzt, daß die Funktionen $f_i(\mu)$ eine Basis aller stetiger Funktionen im Sinne gleichmäßiger Konvergenz bilden. Die weniger tiefliegende Begründung dieses spezielleren Satzes, der die Darstellbarkeit der linearen Funktionaloperation durch ein Stieltjessches Integral behauptet, ist schon in der ersten

1) *Sur les opérations fonctionnelles linéaires; Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues,* Paris, Comptes Rendus, 29 novembre 1909 et 14 mars 1910.

Digitized by Google

der beiden Notizen enthalten. Die nächstfolgenden Entwickelungen gelten aber auch für den allgemeinen Fall und führen hier zu Resultaten, die mit den von Herrn Carathéodory bez. des Picard-Landauschen Satzes entwickelten eng verknüpft sind.

Ich stelle die Frage: Unter welchen Bedingungen läßt das System 3) eine Lösung $\alpha(\mu)$ zu, die von m bis M nirgends abnimmt und für welche

$$4) \qquad \alpha(M) - \alpha(m) = \int_m^M d\alpha(\mu) = 1$$

ist? Die Frage läßt sich auch folgendermaßen fassen: Unter welchen Bedingungen besitzt das aus 3) nach Adjunktion von 4) entstehende System eine Lösung $\alpha(x)$, deren totale Schwankung $\leqq 1$ ist? Nun kann man das angegebene Kriterium anwenden; als notwendige und hinreichende Bedingung ergibt sich die Ungleichung

$$\left| \nu_0 + \sum_{i=1}^{n} \nu_i c_i \right| \leqq \text{maximum} \left| \nu_0 + \sum_{i=1}^{n} \nu_i f_i(\mu) \right|;$$

dieselbe hat für jedes n und jedes System $\nu_0, \ldots, \nu_n$ zu gelten. Beschränken wir uns auf den Fall *reeller Daten*, so genügt es auch ausschließlich reelle Wertsysteme $\nu_0, \ldots, \nu_n$ vorauszusetzen. Lassen wir nun ν_0 variieren, während wir die übrigen Größen festhalten, so ergiebt sich, daß unserere Bedingung dann und nur dann für alle Werte ν_0 erfüllt ist, wenn der Wert

$$5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \nu_i c_i$$

zwischen Minimum und Maximum von

$$6) \qquad \sum_{i=1}^{n} \nu_i f_i(\mu)$$

im Intervalle (m, M) liegt. Somit haben wir den Satz:

Das System 3) mit reellen Daten läßt dann und nur dann eine mit wachsendem μ niemals abnehmende und insgesamt um den Betrag 1 wachsende Lösung $\alpha(\mu)$ zu, wenn für jedes n und jedes System reeller Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_n$ der Wert 5) zwischen Minimum und Maximum von 6) im Intervalle (m, M) liegt.

Es sei noch bemerkt, daß in dem angeführten Spezialfalle, wo die Funktionen $1, f_1(x), f_2(x), \ldots$ eine Basis aller stetiger Funktionen bilden, die Lösung $\alpha(\mu)$ durch die Anfangsbedingung $\alpha(m) = 0$ und die Zwischenbedingungen $2\alpha(\mu) = \alpha(\mu - 0) + \alpha(\mu + 0)$ *vollständig festgelegt wird.*

Digitized by Google

Wir wenden nun den Spezialfall $f_i(\mu) = \mu^i$ des soeben entwickelten Satzes auf das System

$$7) \qquad \int_m^M \mu^i G(\mu; x) = K^{(i)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

an; $K^{(i)}(x)$ bedeuten die aus $K^{(1)}(x) \equiv K(x)$ durch sukzessive Faltung mit sich selbst hervorgehende Formen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, damit dieses System für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$, für welches $(x, x) = 1$ ist, eine mit wachsendem μ niemals abnehmende, insgesamt um 1 wachsende Lösung zulasse, besteht nach unserem Satze darin, daß *der Wertevorrat der Form*

$$8) \qquad \sum_{i=1}^{n} \nu_i K^{(i)}(x)$$

bei $(x, x) = 1$ *zwischen Minimum und Maximum des Polinoms*

$$9) \qquad A(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \mu^i$$

im Intervalle (m, M) *liege.*

Nun ist aber diese Bedingung *für jede beschränkte quadratische Form erfüllt;* und hierin liegt die einzige nicht rein formale Tatsache, die wir aus der Theorie der quadratischen Formen zu benutzen daben. Sie kann für quadratische Formen endlich vieler Veränderlichen auf verschiedene Arten begründet werden, sie geht z. B. aus der Quadratzerlegung derselben unmittelbar hervor; auf beschränkte Formen unendlich vieler Veränderlichen überträgt man sie durch leichten Grenzübergang.

Damit bin ich ungefähr am Ziele. Die Bedingung ist erfüllt; es gibt somit für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots$ eine eindeutig bestimmte monotone Lösung des Systems 7), die auch den Forderungen $G(m; x) = 0$, $G(M; x) = (x, x)$, $2G(\mu; x) = G(\mu - 0; x) + G(\mu + 0; x)$ für $m < \mu < M$ genügt. $G(\mu; x)$ stellt für jeden Wert μ zwischen m und M eine beschränkte quadratische Form der x_p dar. Denn es ist $G(\mu; x)$ positiv und $\leqq (x, x)$, und es besteht die Identität

$$G(\mu; x+y) + G(\mu; x-y) = 2G(\mu; x) + 2G(\mu; y).$$

Da nämlich die analoge Identität für jede quadratische Form, also für (x, x) und die $K^{(i)}(x)$ besteht, so folgt aus 7) nach Beachtung der für $G(\mu; x)$ angesetzten Rand- und Zwischenbedingungen, daß die Funktion in μ

$$\alpha(\mu; x; y) = G(\mu; x+y) + G(\mu; x-y) - 2G(\mu; x) - 2G(\mu; y)$$

die eindeutig bestimmte Lösung des *homogenen vollständigen* Systems

Digitized by Google

$$\int_m^M \mu^i \, d\alpha(\mu; x; y) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit der Anfangsbedingung $\alpha(m; x; y) = 0$ und den Zwischenbedingungen $2\alpha(\mu; x; y) = \alpha(\mu - 0; x; y) + \alpha(\mu + 0; x; y)$ darstellt. Daraus aber folgt $\alpha(\mu; x; y) \equiv 0$.

Endlich definiert das Integral 1) für jeden nicht der Strecke (m, M) angehörenden Wert λ eine beschränkte quadratische Form der x_p. Für genügend große Werte von $|\lambda|$, nämlich $|\lambda| > |M|$ und $|m|$, läßt sich $K(\lambda; x)$ in eine nach negativen Potenzen von λ fortschreitende Reihe

$$K(\lambda; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{-i} \int_m^M \mu^i \, dG(\mu; x) = (x, x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{-i} K^{(i)}(x)$$

entwickeln, die für alle $(x, x) \leqq 1$ und alle $|\lambda| > |M| + \varepsilon$ und $|m| + \varepsilon$ gleichmäßig konvergiert; daraus folgt nach Faltung mit $(x, x) - \frac{1}{\lambda} K(x)$ die Identität 2) für jene Werte λ; auf die übrigen Werte λ, die nur nicht der Strecke (m, M) angehören, überträgt man sie mittels analytischer Fortsetzung. Man könnte auch an Stelle der Potenzreihenentwickelung von $\frac{1}{1 - \frac{\mu}{\lambda}}$ andere Approximationen mittels Polinomen in $\frac{\mu}{\lambda}$ verwenden, wobei dann alle in Betracht kommenden λ-Werte die gleiche Rolle spielten. Konvergenz und Vertauschbarkeit der hierbei auftrenden Grenzprozesse ergibt sich äußerst einfach auf Grund der Ungleichung

$$\int_m^M f(\mu) \, d\alpha(\mu) \leqq \textit{maximum} \, |f(\mu)| \times \textit{totale Schwankung} \, \alpha(\mu)$$

und der oben besprochenen Tatsache, daß der Wertevorrat der Form 8) zwischen Minimum und Maximum des Polinoms 9) liegt.

Die Struktur des Spektrums ist an der Form $G(\mu; x)$ leicht abzulesen. Es reicht von m bis M mit Ausnahme jener Werte μ, in deren Umgebung $G(\mu; x)$ für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots$ konstant verläuft. Die Sprungstellen von $G(\mu; x)$ bilden das Punktspektrum; die Sprünge

$$G(m + 0; x) - G(m; x), \quad G(\mu + 0; x) - G(\mu - 0; x),$$
$$G(M; x) - G(M - 0; x)$$

liefern die zugehörigen Eigenformen. Definiert man die Form $\pi(\mu; x)$ als Summe der Sprünge von m bis μ, so entspricht der stetige Rest $G(\mu; x) - \pi(\mu; x)$ Ihrer Spektralform.

Digitized by Google

Jene Werte μ in (m, M), die dem Spektrum nicht angehören, können bei den Integrationen 1), 7) samt einer genügend kleinen Umgebung ausgeschlossen werden; die Definitionsgleichung 1) von $K(\lambda; x)$ und die Faltungsgleichung 2) gelten dann auch für diese Werte.

Ich glaube bemerken zu dürfen, daß die voranstehenden Entwickelungen gewissen Einblick in die Natur jener Schwierigkeiten gestatten, die sich einer ähnlichen Behandlung allgemeinerer Typen von Bilinearformen widersetzen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Zur Elektronentheorie des Ferromagnetismus.

Von

R. Gans.

Vorgelegt in der Sitzung am 28. Mai 1910 von C. Runge.

§ 1. Einleitung.
§ 2. Aequivalenz von Magnetonen und zwangsweise zirkulierenden Elektronen.
§ 3. Die Bewegungen eines frei drehbaren Moleküls im Magnetfelde.
§ 4. H. A. Lorentz' Behandlung der Dielektrika.
§ 5. Die Grundlagen für die Theorie der Magnetonen.
§ 6. Die Grundgleichungen.
§ 7. Stabilität.
§ 8. Das Fortschreiten auf der Magnetisierungskurve.
§ 9. Theorie der magnetischen Erscheinungen des Pyrrhotin.
§ 10. Energetik der Ferromagnetika.
Zusammenfassung.

§ 1. Einleitung.

Eine Theorie des Magnetismus, besonders des Ferromagnetismus, würde sowohl vom rein wissenschaftlichen als auch vom technischen Standpunkte aus von Bedeutung sein.

Der Physiker muß wünschen, die allgemeine Gleichung zwischen Feldstärke und Magnetisierung zu besitzen; außerdem werden, wenn diese Gleichung aus atomistischen Vorstellungen abgeleitet und durch die Erfahrung bewährt ist, damit zugleich wichtige Aufschlüsse über die molekularen Vorgänge beim Mag-

Digitized by Google

netisieren gewonnen sein, und es wird das Gemeinsame der magnetischen Erscheinungen mit anderen, besonders elektrischen und thermischen, klarer hervortreten.

Daß eine Beziehung zwischen Feldstärke und Magnetisierung — durch eine Magnetisierungskurve gegeben — auch für die Techniker wertvoll ist, beweisen die vielen, wenn auch meist erfolglosen Versuche, auf rein empirischem Wege eine praktisch brauchbare Gleichung der Kurve zu gewinnen. Dieses Interesse ist leicht zu begreifen; denn ohne die magnetischen Eigenschaften der zum Bau von Dynamomaschinen und Motoren benutzten Materialien genau zu kennen, kann man unmöglich ihre Wirkung vorausberechnen und die Konstruktion des Ganzen danach einrichten.

Daher ist man bis jetzt in Ermangelung einer analytischen Beziehung zwischen Magnetisierung und Feldstärke genötigt, möglichst viele zusammengehörige Werte dieser Größen experimentell zu bestimmen und graphisch oder tabellarisch zu verzeichnen. Dieser mühevollen Arbeit wird man überhoben sein, sobald man im Besitze einer analytischen Gleichung ist: man wird dann alle zusammengehörigen Werte von Feldstärke und Magnetisierung berechnen können, wenn nur einige wenige charakteristische Materialkonstanten, wie etwa Anfangspermeabilität, Remanenz, Koerzitivkraft gegeben sind. Ob aber ein solcher Erfolg der Theorie beschieden sein wird, und ob nicht vielleicht eine empirische Formel doch den Vorrang behaupten wird, läßt sich natürlich zur Zeit nicht entscheiden; immerhin rechtfertigen wohl diese Erwägungen eine eingehende Beschäftigung auch von theoretischer Seite mit diesem Gegenstande.

Die ersten Versuche, sich ein Bild von den molekularen Vorgängen beim Magnetisieren zu machen, wurden wesentlich durch Analogien der magnetischen mit elektrostatischen Erscheinungen bestimmt. Wie man annahm, daß im Dielektrikum die positive und negative Elektrizität aus ihrer gleichmäßigen Mischung durch äußere Kräfte geschieden werde, so vermutete man auch, daß die im Molekül vorhandenen ungleichartigen magnetischen Fluida sich unter dem Einflusse äußerer magnetischer Kräfte trennen, oder daß eine Polarisation des Magnetismus in den einzelnen Volumelementen stattfinde. Diese Scheidungshypothese wurde von Poisson aufgestellt und in der von ihm und F. Neumann entwickelten Theorie weiter durchgeführt.

Da sich aber auf Grund dieser Annahme das Verhalten ferromagnetischer Körper bei ihrer Sättigung nicht zwanglos erklären

Digitized by Google

ließ, so sah sich Wilhelm Weber[1]) veranlaßt, die Scheidungshypothese durch eine Drehungs- oder Richtungshypothese zu ersetzen. Danach sollen bereits im unmagnetischen Eisen Molekularmagnete von festem magnetischen Momente vorhanden sein, die durch äußere Kräfte gerichtet werden können. Die Sättigung erklärt sich dann daraus, daß bei sehr großen magnetisierenden Feldstärken die Achsen aller Molekularmagnete einander parallele Richtungen annehmen, sodaß durch Vergrößerung der Feldstärke die Magnetisierung nicht mehr gesteigert werden kann. Ferner hat jeder Molekularmagnet eine Gleichgewichtslage, die durch die Wirkung aller übrigen bestimmt wird, oder, genauer gesagt, am Orte eines jeden Molekularmagneten herrscht eine von allen anderen zuzammengenommen erzeugte molekulare Feldstärke, für die jede Richtung gleich wahrscheinlich und deren Größe an jeder Stelle gleich der Konstanten A ist[2]). Jeder Molekularmagnet muß sich also in die Resultante der molekularen und der durch äußere Einwirkung erzeugten, beobachteten Feldstärke einstellen.

Im unmagnetischen Zustand sind, wie leicht zu sehen, die Achsenrichtungen im Mittel gleichmäßig verteilt, bei der Sättigung sind alle Axenrichtungen einander parallel. Uebrigens läßt Weber die Frage offen, ob die von ihm betrachteten Gebilde wirkliche Molekularmagnete oder jenen äquivalente Ampèresche Molekularströme sind.

Liefert nun auch die Webersche Theorie eine Erklärung der magnetischen Sättigung, so gibt sie erstens die funktionelle Abhängigkeit zwischen Feldstärke und Magnetisierung quantitativ nicht richtig; denn nach ihr müßte die Susceptibilität M/H als Funktion von H anfangs konstant sein und nachher dauernd bis zum Werte Null abnehmen, während sie in Wirklichkeit bis zu einem Maximum steigt und erst dann bis Null abnimmt. Zweitens erklärt sie aber nicht die Hysteresiserscheinungen, die doch für die Ferromagnetika so bezeichnend sind.

Diesen Mängeln sucht Maxwell[3]) durch eine Erweiterung der Weberschen Theorie abzuhelfen, indem er annimmt, daß die Axe eines Molekularmagneten nach Entfernung der makroskopischen Feldstärke H nur dann in ihre frühere, durch die Richtung

1) Wilh. Weber, Werke 3. 1893. p. 541.

2) Ueber den Ursprung der molekularen Richtkraft spricht Weber sich eigentlich nicht aus; erst Ewing nahm an, daß dieselbe magnetischen Ursprungs ist, und zwar, daß sie durch die Wirkung der Nachbarmoleküle hervorgerufen wird.

3) J. C. Maxwell, Treatise on electricity and magnetism 2 Art. 444.

Digitized by Google

des molekularen Feldes A gegebene Lage zurückkehrt, wenn die durch H hervorgebrachte Ablenkung β einen gewissen Wert β_0 nicht überschritten hat, daß sie dagegen dauernd um den Winkel $\beta - \beta_0$ abgelenkt bleibt, wenn die den Molekularmagneten angreifende Kraft sie über den Winkel β_0 hinaus gedreht hat.

Ewing[1]) indes hat das richtige Gefühl, daß diese ad hoc gemachte Hypothese, die im Grunde nichts anderes als eine Analogie zu den Hysteresiserscheinungen bei elastischen Deformationen annimmt, ein der reinen elektromagnetischen Theorie fremdes Element einführt, ohne doch zu einem wesentlich tieferen Verständnis in die molekularen Vorgänge zu führen.

Um daher dieses scheinbare elastische Nachlassen rein magnetisch zu deuten, betrachtet er eine ganze Gruppe von Molekularmagneten. In ihr hängt die Richtkraft auf den einzelnen Molekularmagneten von der Richtung aller übrigen ab. Er kann nun zeigen, daß man verschiedene Gleichgewichtslagen erhält, sodaß man beim Ueberschreiten von kritischen Größen nicht mehr in die früheren Konstellationen zurückgelangt, sondern neue durchläuft, d. h. daß tatsächlich scheinbare Nachlaßerscheinungen auftreten. Von würfelförmiger Anordnung der Molekularmagnete ausgehend, gelangt er zwar nicht zu einer analytischen Darstellung der Magnetisierungskurve, vermag aber qualitativ alle typischen Phasen des Magnetisierungsprozesses darzustellen.

Der Zweck der vorliegenden Mitteilung ist es nun, erstens das Wertvolle der Weberschen und der Ewingschen Theorie beizubehalten, also anzunehmen, daß die Lage jedes Molekularmagneten, oder, wie wir kürzer sagen wollen, jeden Magnetons, durch die magnetische Wirkung aller übrigen und der äußern magnetischen Kräfte bestimmt wird, und daß die Hysteresis durch mehrfache Gleichgewichtslagen der Molekularsysteme zu erklären ist. Zweitens wollen wir aber in den Einzelheiten über diese Theorien hinausgehen. Unsere Erweiterung besteht im Wesentlichen darin, daß wir uns nicht auf besondere Anordnungen der Magnetonen beschränken, sondern die Verteilung möglichst allgemein voraussetzen; dabei bleibt dann nichts anderes übrig, als die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die molekularen Systeme anzuwenden. Daher kommt es denn in unserer Behandlung auch nicht mehr wesentlich auf die Lage und Richtung der Nachbarmoleküle an.

Zunächst mußten wir uns aber frei machen von der Vorstellung,

---

1) J. A. Ewing, Magnetische Induktion in Eisen und verwandten Metallen, deutsch von L. Holborn und St. Lindeck. Berlin und München 1892, p. 275.

Digitized by Google

daß es ein besonderes magnetisches Fluidum gibt, aus dem die unveränderlichen Elementarmagnete bestehen, denn dieser Standpunkt entspricht nicht dem heutigen Stande der Wissenschaft. Vielmehr ist man der Ueberzeugung, daß der Magnetismus durch rotierende oder zirkulierende Elektronen hervorgerufen wird.

Deshalb wird (§ 2) gezeigt, daß zwangsläufig rotierende elektrisch geladene Moleküle tatsächlich Magnetonen äquivalent sind sowohl in den magnetischen Wirkungen, die sie ausüben, als auch in den Kräften, die sie erfahren.

Doch das genügt nicht für eine Elektronentheorie der Magnetisierung, da die durch die Rotationen repräsentierten Molekularströme bei frei drehbaren Molekülen keineswegs in ihrer Stärke konstant zu bleiben brauchen und die magnetische Axe auch nicht gezwungen ist, eine im Molekül feste Lage zu behalten.

Aus diesem Grunde wird in einem weiteren Paragraphen (§ 3) die Dynamik eines frei drehbaren Moleküls im Magnetfelde behandelt, und es ergibt sich das bereits von Voigt gefundene Resultat, daß ein kugelförmiges Molekül sich mit seiner magnetischen Axe garnicht in die Feldrichtung einstellen, sondern um dieselbe Präzessionsbewegungen machen würde, wodurch eine diamagnetische Erregung hervorgerufen wird.

Dagegen stellt ein sehr schnell um seine Symmetrieaxe rotierender Rotationskörper sich stets mit seiner Axe in die Feldrichtung ein und behält dauernd mit großer Annäherung dasselbe Moment, während eine Drehung um jede andere Körperaxe durch die eigene Ausstrahlung gedämpft würde und infolgedessen garnicht dauernd bestehen könnte. Ein Molekül mit einer Symmetrieaxe ist also einem Elementarmagneten, wie Weber und Ewing ihn sich vorstellen, mit großer Näherung äquivalent.

Um den in diesem Paragraphen versuchten Anschluß der Elektronentheorie an die Erscheinungen des Magnetismus haben sich besonders Voigt[1]), Langevin[2]), J. J. Thomson[3]) und H. A. Lorentz[4]) verdient gemacht, sodaß sich in unserer Behandlungsweise des Problems viele Anlehnungen an die Methoden dieser Forscher und manche ihrer Resultate finden, natürlich modifiziert durch die bestimmten Zwecke unserer Untersuchung.

Wir denken uns nun ein isotropes Medium aus Magnetonen

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1901 p. 169; Ann. Phys. (4) **9** 1902 p. 115.

2) P. Langevin, Ann. Chim. Phys. (8) **5** 1905 p. 70.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) **6** 1903 p. 673.

4) H. A. Lorentz, Math. Enc. **5** Art. 14 § 48. Leipzig 1904; The theory of electrons Leipzig 1909 p. 124.

Digitized by Google

der eben beschriebenen Beschaffenheit aufgebaut und suchen sein Verhalten im Magnetfelde zu bestimmen.

Der hier zum Ziele führende Weg ist keineswegs ganz ungebahnt, sondern bereits durch die Methoden geebnet, die H. A. Lorentz[1]) bei der Behandlung der Dielektrika geschaffen hat. Es erschien uns daher zweckmäßig, ganz kurz den Lorentzschen Gedankengang noch einmal darzulegen (§ 4), da wir doch gezwungen sind, an viele seiner Einzelheiten anzuknüpfen.

Lorentz zeigt, daß die einen einzelnen Dipol polarisierende Kraft, die sogenannte erregende Kraft, in zwei Teile zerlegt werden kann: Der erste rührt von den wahren Ladungen und den entfernteren Dipolen her und drückt sich durch die makroskopisch gemessene Feldstärke und Polarisation aus. Der zweite, von den Nachbardipolen stammend, schwankt in unübersichtlicher Weise von Dipol zu Dipol, ist aber im Mittel, wie Planck[2]) zeigt, null und fällt somit aus dem Ausdruck für die mittlere erregende Kraft heraus. Aber von dieser allein hängt die mittlere Polarisation ab, deshalb, weil Proportionalität zwischen erregender Kraft und Polarisation eines einzelnen Dipols besteht.

Eine solche Proportionalität besteht nicht im Falle des magnetischen Problems, und deshalb muß sich hier unser Weg von dem Lorentzschen scheiden. Es ist jetzt nicht mehr gestattet, das Mittel aus den zweiten Kraftanteilen zu nehmen und ihm proportional einen entsprechenden Teil der Gesamtpolarisation zu setzen. Vielmehr müssen wir das Verteilungsgesetz der zweiten Kraftanteile aufsuchen, d. h. angeben, wie oft jede Richtung von ihnen angenommen wird. Hiermit wird dann die Verteilungsfunktion für die Magnetonenrichtungen zusammenhängen, und es ist auch ohne weiteres klar, daß diese eine Rolle spielen muß, denn bei der gegen den Fall des elektrischen Problems geringeren Anzahl von Freiheitsgraden des Dipols kann die magnetische Gesamtpolarisation nur durch Aenderung der Verteilungsfunktion variiert werden. (§ 5).

Die Verteilungsfunktion streng zu berechnen, ist aus mathematischen Gründen sehr schwierig, dagegen können wir wahrscheinlich machen, daß die Verteilungsfunktion der zweiten Kraftanteile für alle Richtungen nahezu gleich ist, und haben damit ein Analogon gewonnen zu dem von Planck für den Fall der Dielektrika erhaltenen Ergebnis. Außerdem sind wir deduktiv zu dem Standpunkt gelangt, den Weber ohne Begründung eingenommen hat.

1) H. A. Lorentz, Arch. néerl. **25** 1892, p. 463.
2) M. Planck, Berl. Ber. **24** 1902 p. 470.

Digitized by Google

Wir setzen nun wieder, wie Weber und Lorentz, die beiden Kraftanteile zusammen, berücksichtigen aber mit Lorentz und im Gegensatz zu Weber im ersten Bestandteil die Abhängigkeit von der makroskopischen Magnetisierung.

Durch das Auftreten der letzteren Größe werden die Weberschen Formeln verändert (§ 6), dennoch scheint zunächst kein Anschluß an die Erfahrung gewonnen zu sein, da die berechnete Kurve Teile enthält, die nie in der Erfahrung beobachtet worden sind. Aber Stabilitätsuntersuchungen (§ 7) zeigen, daß die ihnen entsprechenden Anordnungen labil sind. Scheiden wir alle labilen Phasen aus, so bleibt eine Magnetisierungskurve übrig, die genähert durch ein Rechteck zu ersetzen ist (§ 8).

Aus diesem isotropen ferromagnetischen Medium denken wir uns lauter kongruente Körper, Elementarkomplexe, wie wir sie nennen wollen, geformt und aus ihnen einen magnetischen Krystall aufgebaut, in dem die Elementarkomplexe in einem räumlichen Gitter, entsprechend der Krystallstruktur, angeordnet sind.

Ein solcher Krystall zeigt alle magnetischen Eigenschaften, die P. Weiß[1]) tatsächlich am Pyrrhotin beobachtet hat, und die auch von Maurain[2]) an Eisen festgestellt sind, das im Magnetfelde elektrolytisch niedergeschlagen wurde. Auch in diesem letzteren Falle werden die Voraussetzungen für unsere Theorie erfüllt gewesen sein: die Elementarkomplexe des Eisens, die bei gewöhnlichem Material ungeordnet sind, hatten die Möglichkeit, sich zu richten und ähnliche Konfigurationen zu bilden wie im Pyrrhotin (§ 9).

Die Kenntnis des Mechanismus setzt uns auch in den Stand, die Energieumsetzungen in jedem einzelnen Teil der Magnetisierungskurve anzugeben (§ 10).

Die Frage nach dem magnetischen Verhalten von Eisen und Stahl. d. h. Medien, in denen die Elementarkomplexe wirr durcheinander liegen, soll in einer weiteren Arbeit beantwortet werden.

§ 2. Aequivalenz von Magnetonen und zwangsweise zirkulierenden Elektronen.

Wir werden in den folgenden Betrachtungen einen ausgiebigen Gebrauch von dem Begriffe der magnetischen Mengen und im Anschluß an Wilhelm Weber und Ewing von der Vorstellung frei drehbarer Magnetonen machen, weil sich auf diese Weise für elektrostatische Probleme geltende Ueberlegungen fast wörtlich

1) P. Weiß, Journ. de Phys. (4) **4** p. 469 et 829. 1905.
2) Ch. Maurain, Journ. de Phys. (3) **10** p. 123. 1901.

Digitized by Google

auf den Fall des Magnetismus übertragen lassen, nicht aber, weil wir etwa an das Vorhandensein eines von der Elektrizität wesentlich verschiedenen Fluidums glaubten. Die neuere Physik neigt in der Tat immer mehr dazu, alle Erscheinungen durch Wirkungen der Elektronen zu erklären.

Es wird daher nötig sein, nachzuweisen, daß ein System zirkulierender Elektronen sowohl in den von ihm ausgeübten Fernkräften, als auch in den erlittenen ponderomotorischen Kräften einem Magneton äquivalent ist, und daß daher, auch wenn man nur solche elektrische Systeme als wirklich vorhanden voraussetzt, doch die Einführung der Magnetonen als mathematische Hilfskonstruktion zulässig ist.

Stellen wir demnach zunächst die Grundlagen der Magnetonentheorie zusammen.

Unter einem Magneton verstehen wir einen Körper V, der mit positiven und negativen Magnetismusmengen geladen ist, und zwar so, daß die algebraische Summe sämtlicher auf ihm befindlicher magnetischer Mengen Null ist. Dieser Körper soll um einen in ihm befindlichen Punkt frei drehbar sein.

Nach dem Coulombschen Gesetze gelten die Gleichungen

$$1) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{h} = 0$$

$$2) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 4\pi \varrho_m$$

$$3) \qquad \int_V \varrho_m dS = 0$$

von denen 1) aussagt, daß die magnetische Feldstärke ein Potential hat, 2) daß jede positive Magnetismusmenge Eins die Quelle von 4π Linien der magnetischen Feldstärke darstellt, und die Gleichung 3), in der sich die Integration auf das Volumen V eines Magnetons erstreckt, daß die algebraische Summe der magnetischen Mengen eines Elementarmagneten stets Null ist.

Wegen 3) kann man auf verschiedene Weisen in jedem Magneton einen Vektor $\mathfrak{m}$ so als Funktion des Orts finden, daß er an der Oberfläche und im Außenraume der Magnetonen verschwindet, und daß sich ϱ_m aus der Gleichung

$$4) \qquad \varrho_m = -\operatorname{div} \mathfrak{m}$$

ableitet.

Weil unsere Bedingungen verlangen, daß $\mathfrak{m}$ an der Oberfläche der Magnetonen verschwinden soll', so können wir sie in jedem einzelnen Magneton unabhängig von den anderen befriedigen.

Aus 2) und 4) folgt

$$5) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h} = -4\pi \operatorname{div} \mathfrak{m}.$$

Digitized by Google

Die Gleichungen 1) und 5) gestatten daher nach einem bekannten Satze der Vektoranalysis die Berechnung von $\mathfrak{h}$ bei Kenntnis von $\mathfrak{m}$.

Da ferner die auf die Volumeinheit wirkende ponderomotorische Kraft sich nach der Gleichung

$$6) \qquad \mathfrak{f} = \varrho_m \mathfrak{h} = -\mathfrak{h} \operatorname{div} \mathfrak{m}$$

berechnet, so ist durch Angabe von $\mathfrak{m}$ also Verhalten und Wirkung der Magnetonen eindeutig gekennzeichnet, wenn auch das Umgekehrte nicht der Fall ist.

Wir wollen nun aber annehmen, daß ein derartiges System von Magnetonen nicht vorliegt, sondern vielmehr ein System starr mit einander verbundener negativer Elektronen, die sich im Innern einer positiv geladenen Kugel befinden. Während die Kugel eine so große Trägheit hat, daß wir von ihren etwaigen Bewegungen überhaupt absehen können, möge die Gesamtheit der negativen Elektronen — der elektrisch geladene Körper V' — durch irgend einen Mechanismus gezwungen sein, mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit um eine feste in V' liegende Axe zu rotieren. Ferner möge V' selbst um einen festen Punkt drehbar sein, bei diesen Drehungen aber sollen die elektrischen Dichten die Gesamtdrehung mitbeschreiben, ohne ihre Lage zur Axe zu ändern. Außerdem werde die Dichteverteilung symmetrisch zur Rotationsaxe angenommen. Wenn auch die Voraussetzung, daß die negativen Elektronen eines Moleküls, das wir uns mit J. J. Thomson[1]) in der soeben beschriebenen Weise aufgebaut denken, starr mit einander verbunden sind, in der Natur nicht zutreffen wird, so wird doch bei keiner der im Folgenden anzustellenden Ueberlegungen hierdurch ein merklicher Fehler entstehen, wenn die Zeiten, in denen die zu betrachtenden Magnetfelder erzeugt werden, sehr groß im Vergleich zu den Schwingungsperioden der Elektronen sind[2]).

Für ein solches System gelten die Lorentzschen Gleichungen:

$$7) \qquad c \operatorname{rot} \mathfrak{h}' = \frac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial t} + 4\pi \varrho_e \mathfrak{v}$$

---

1) J. J. Thomson, The corpuscular theory of matter. London 1907 chap. 6 and 7. (mir nicht zugänglich).

Die Thomsonschen Voraussetzungen über die Konstitution eines Moleküls sind nicht notwendig zum Beweise der viel allgemeiner gültigen Aequivalenz von Magnetonen und zirkulierenden Elektronen; sie sind nur gemacht worden, um ein konkreteres Bild des Mechanismus zu geben.

2) Vgl. H. A. Lorentz, The theory of electrons. Leipzig 1909, pag. 124.

Digitized by Google

$$8) \qquad -c \operatorname{rot} \mathfrak{e}' = \frac{\partial \mathfrak{h}'}{\partial t}$$

$$9) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h}' = 0$$

$$10) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e}' = 4\pi\varrho_e$$

$$11) \qquad \mathfrak{f}' = \varrho_e \mathfrak{e}' + \frac{1}{c}[\varrho_e \mathfrak{v}, \mathfrak{h}']$$

wo $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor eines Punktes bedeutet, und wo die Bezeichnungen der Feldstärken zur Unterscheidung von dem vorigen Falle Accente tragen.

Bedeuten $\mathfrak{h}'$ und $\mathfrak{e}'$ in den Gleichungen 7) bis 11) nicht die Feldstärken selbst, sondern Mittelwerte über einen sehr kleinen Teil eines Moleküls, in dem aber doch noch eine große Zahl von Elektronen sich befindet, so verschwinden wegen der Symmetrie um die Rotationsaxe und der Konstanz der Winkelgeschwindigkeit alle zeitlichen Differentialquotienten, und die Gleichungen 7) bis 11) zerfallen in die beiden Systeme

$$\text{I} \begin{cases} 12) & c \operatorname{rot} \mathfrak{h}' = 4\pi\varrho_e \mathfrak{v} \\ 13) & \operatorname{div} \mathfrak{h}' = 0 \\ 14) & \mathfrak{f}_1' = \frac{1}{c}[\varrho_e \mathfrak{v}, \mathfrak{h}'] \end{cases}$$

und

$$\text{II} \begin{cases} 15) & \operatorname{rot} \mathfrak{e}' = 0 \\ 16) & \operatorname{div} \mathfrak{e}' = 4\pi\varrho_e \\ 17) & \mathfrak{f}_2' = \varrho_e \mathfrak{e}', \end{cases}$$

wozu noch

$$18) \qquad \mathfrak{f}' = \mathfrak{f}_1' + \mathfrak{f}_2'$$

kommt.

Die Wirkung der auf die Elektronen ausgeübten elektrischen Kräfte können wir vernachlässigen, denn aus Symmetriegründen kann die positiv geladene Kugel eines Moleküls auf das als Rotationskörper gedachte System seiner negativen Elektronen keine Wirkung ausüben, und auf die negativen Elektronen der anderen Moleküle wirkt ein Molekül überdies auch aus dem Grunde elektrisch nicht ein, da es gleich viel positive und negative Elektrizität besitzen soll und somit keine merkliche Fernwirkung aufweist[1]). Es bleibt also nur noch das System I zu betrachten übrig.

1) Im nächsten Paragraphen werden wir auch zeitlich variable äußere Magnetfelder mit in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen; dann werden wir allerdings auch die elektrischen Kräfte berücksichtigen müssen.

Digitized by Google

Aus 12) folgt

$$19) \qquad \operatorname{div} \varrho_e \mathfrak{v} = 0.$$

Es läßt sich also nach einem bekannten Satze der Vektoranalysis ein Vektor $\mathfrak{m}'$ finden, aus dem sich $\varrho_e \mathfrak{v}$ nach der Gleichung

$$20) \qquad \frac{\varrho_e \mathfrak{v}}{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{m}'$$

ableitet. Außerdem werde $\mathfrak{m}'$ so bestimmt, daß

$$21) \qquad \mathfrak{m}' = 0$$

im Außenräume und an der Oberfläche der Moleküle ist. Wir werden später (S. 208) zeigen, daß eine solche Wahl stets möglich ist; dann ist sie auch in jedem V' unabhängig von den anderen.

Für den Augenblick nehmen wir sie als vollzogen an; dann schreiben sich 12) bis 14) in der Form

$$22) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{h}' = \operatorname{rot} 4\pi \mathfrak{m}'$$

$$23) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h}' = 0$$

$$24) \qquad \mathfrak{f}_1' = [\operatorname{rot} \mathfrak{m}', \mathfrak{h}']$$

Es handelt sich jetzt darum, unser System tatsächlich vorhandener elektrischer Rotationskörper durch ein solches System fictiver Magnetonen zu ersetzen, daß die Feldwirkung der Magnetonen gleich der Feldwirkung der elektrischen Körper ist, und daß die auf die Magnetonen ausgeübten ponderomotorischen Kräfte in summa denen auf die elektrisch geladenen Teilchen äquivalent sind. Oder analytisch:

In den V' ist $\varrho_e \mathfrak{v}$ gegeben, und daher nach 20) und 21) auch $\mathfrak{m}'$. Wir denken uns ein System geometrisch kongruenter und gleich angeordneter Körper V und suchen in ihnen solche Funktionen $\mathfrak{m}$, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

1. Die nach 1) und 5) berechnete Feldstärke $\mathfrak{h}$ im Systeme der V soll im Außenraume der V gleich sein der an der entsprechenden Stelle im Systeme der V' nach 22) und 23) berechneten Feldstärke $\mathfrak{h}'$.

2. Bei einer virtuellen Drehung des Magnetons V sollen die Feldstärken $\mathfrak{h}$ dieselbe virtuelle Arbeit leisten (nach 6) zu berechnen), wie bei der kongruenten Drehung von V' die $\mathfrak{h}'$ (nach 24) zu berechnen).

Die gesuchte Funktion $\mathfrak{m}$ ist sehr einfach anzugeben. Wir setzen nämlich

$$25) \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}',$$

Digitized by Google

wodurch wir nach 21) auch der Forderung $\mathfrak{m} = 0$ im Außenraume der V gerecht werden.

Dann gilt für $\mathfrak{h}$ nach 1) und 5)

26) $$\operatorname{rot}(\mathfrak{h} + 4\pi\mathfrak{m}') = \operatorname{rot} 4\pi\mathfrak{m}'$$

27) $$\operatorname{div}(\mathfrak{h} + 4\pi\mathfrak{m}') = 0$$

Der Vergleich mit 22) und 23) zeigt, daß man dann hat

28) $$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + 4\pi\mathfrak{m}',$$

also wegen 21)

29) $$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$$

im Außenraume der V' und V.

Ehe wir zeigen, daß die zweite der oben (S. 207) aufgestellten Forderungen erfüllt ist, tragen wir den Beweis nach (S. 207), daß man bei gegebenem $\varrho_e \mathfrak{v}$ stets ein den Bedingungen 20) und 21) genügendes $\mathfrak{m}'$ finden kann.

Der dort angeschlossenen Bemerkung zufolge genügt es, den Nachweis für ein einzelnes im Raume vorhandenes V' zu führen.

Setzt man

30) $$\mathfrak{k} = \int \frac{\varrho_e \mathfrak{v}}{4\pi c r}\, dS$$

31) $$\mathfrak{m}_1' = \operatorname{rot}\mathfrak{k},$$

so ist[1])

32) $$\operatorname{rot}\mathfrak{m}_1' = \frac{\varrho_e \mathfrak{v}}{c}$$

33) $$\operatorname{div}\mathfrak{m}_1' = 0$$

und

32a) $$\operatorname{rot}\mathfrak{m}_1' = 0$$

im Außenraum von V'.

Es stellt also dann und nur dann

34) $$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2'$$

eine Lösung von 20) und 21) dar, wenn man hat

35) $$\operatorname{rot}\mathfrak{m}_2' = 0$$

36) $$\mathfrak{m}_2' = -\mathfrak{m}_1'$$

im Außenraum von V', zwei Gleichungen, die sich wegen 32a) zunächst nicht widersprechen.

---

1) vgl. z. B. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1909, pag. 66.

Digitized by Google

Setzen wir also wegen 35)

37) $$\mathfrak{m}_a' = -\operatorname{grad} U,$$

so muß wegen 36) U der Gleichung

38) $$\operatorname{grad} U = \mathfrak{m}_i' \text{ im Außenraum von } V'$$

genügen. Hierdurch ist die Funktion U schon für den Außenraum bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Man braucht wegen 33), 36) und 37) nur eine solche Funktion zu suchen, die der Gleichung

39) $$\Delta U = 0 \text{ im Außenraum}$$

und an der Oberfläche σ der Bedingung

40) $$\frac{\partial U}{\partial n} = \mathfrak{m}_{in}'$$

genügt.

Da wegen 33)

41) $$\int \mathfrak{m}_{in}' d\sigma = 0$$

ist, so gestattet die Theorie des sogenannten äußeren Dirichletschen Problems zweiter Art, die Lösung zu finden. Der grad der so erhaltenen Funktion U stimmt nach bekannten Eindeutigkeitssätzen[1]) tatsächlich mit $\mathfrak{m}_i'$ überein, also ist 38) befriedigt. Wir können nun U auf unendlich viele Weisen stetig ins Innere von V' fortsetzen; dabei wird 38) nicht aufhören zu gelten, und daher wird ebenso für den nach 37) abzuleitenden Vector $\mathfrak{m}_a'$ 35) und 36) und für den nach 34) gefundenen Vector 20) und 21) erfüllt sein.

So gibt es unendlich viele Arten, den Vector $\mathfrak{m}'$ auszuwählen. Bei jeder Art erhalten wir nach 25) ein anderes V' ersetzendes Magneton V. Wir denken uns aus diesen Möglichkeiten eine herausgegriffen und festgehalten[2]).

Es ist nun zu zeigen, daß durch 25) auch die zweite Bedingung auf S. 11 erfüllt wird. Dabei ist es wieder am einfachsten — wenn auch durchaus nicht erforderlich — und für unsere Zwecke

1) vgl. z. B. R. Gans, Vectoranalysis. 2. Aufl. S. 48.

2) Man kann z. B. fordern, daß das Magneton nur Oberflächenbelegung besitzt. Dann hat man, da div $\mathfrak{m}$ im Innern von V verschwinden soll, die Bedingung div $\mathfrak{m} = 0$ aufzustellen, d. i. wegen 33) und 34) div $\mathfrak{m}_i' = 0$. Für U im Innern ergibt sich dann nach 37) $\Delta U = 0$; außerderm muß sich U im Innern an die Werte von U auf der äußeren Seite der Oberfläche anschließen. Diese Aufgabe ist nur lösbar, wenn Sprünge des Gradienten von U an der Oberfläche von V' zugelassen werden, und ist als inneres Dirichletsches Problem erster Art bekannt.

Digitized by Google

ausreichend, sich vorzustellen, daß man nur zwei einzelne Körper V und V' vor sich hat.

Wir haben nachzuweisen, daß für jede virtuelle mit unseren Bedingungen vereinbare Lagenveränderung, die in gleicher Weise von V als auch von V' erlitten wird,

$$42) \qquad \int (\mathfrak{f}, \delta\mathfrak{s})\, dS = \int (\mathfrak{f}', \delta\mathfrak{s})\, dS$$

ist, wo $\delta\mathfrak{s}$ die Verschiebung jeden Punktes bedeutet, oder da $\mathfrak{f}_2'$ zu vernachlässigen ist,

$$43) \qquad \int (\mathfrak{f}, \delta\mathfrak{s})\, dS = \int (\mathfrak{f}_1', \delta\mathfrak{s})\, dS$$

wo $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1'$ durch 6) und 24) bestimmt sind.

Wir definieren zu dem Zwecke eine Funktion W durch das über den unendlichen Raum erstreckte Integral

$$44) \qquad W = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}^2\, dS$$

und setzen, was wegen 1) gestattet ist,

$$45) \qquad \mathfrak{h} = -\operatorname{grad} V.$$

Dann findet man durch Variation

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int (\mathfrak{h}, \delta\mathfrak{h})\, dS = -\frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{grad} V, \delta\mathfrak{h})\, dS$$

und hieraus durch partielle Integration und unter Benutzung von 2)

$$46) \qquad \delta W = \int V \delta\varrho_m\, dS.$$

Da bei den virtuellen Verschiebungen die magnetischen Mengen an den materiellen Volumelementen haften sollen, so gilt die kinematische Beziehung (Continuitätsgleichung)

$$47) \qquad \delta\varrho_m = -\operatorname{div}(\varrho_m\, \delta\mathfrak{s}),$$

sodaß 46) in

$$48) \qquad \delta W = -\int V \operatorname{div}(\varrho_m\, \delta\mathfrak{s})\, dS$$

übergeht. Aus 48) wird durch partielle Integration und Berücksichtigung von 45)

$$\delta W = \int (\operatorname{grad} V, \varrho_m\, \delta\mathfrak{s})\, dS = -\int \varrho_m (\mathfrak{h}, \delta\mathfrak{s})\, dS,$$

sodaß wir auf Grund von 6) schließlich zu der Formel

Digitized by Google

49) $$\delta W = -\int (\mathfrak{f}, \delta\mathfrak{s})\, dS$$

gelangen.

Zweitens definieren wir eine Funktion W' durch die Formel

50) $$W' = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{h}''^2\, dS,$$

woraus sich

51) $$\delta W' = \frac{1}{4\pi}\int (\mathfrak{h}', \delta\mathfrak{h}')\, dS$$

ergibt. Da aber nach 13) $\mathfrak{h}'$ ein quellenfreier Vektor ist, so dürfen wir

52) $$\mathfrak{h}' = \operatorname{rot} \mathfrak{a}$$

setzen und erhalten

53) $$\delta W' = \frac{1}{4\pi}\int (\operatorname{rot} \mathfrak{a}, \delta\mathfrak{h}')\, dS$$

oder durch partielle Integration unter Berücksichtigung von 12)

54) $$\delta W' = -\int \left(\mathfrak{a}, \delta \frac{\varrho_e \mathfrak{v}}{c}\right) dS.$$

Nun soll die Strömung durch ein materielles Flächenelement dauernd konstant sein, es gilt daher die kinematische Beziehung [1])

55) $$\delta(\varrho_e \mathfrak{v}) + \operatorname{div}(\varrho_e \mathfrak{v})\, \delta\mathfrak{s} + \operatorname{rot}[\varrho_e \mathfrak{v}, \delta\mathfrak{s}] = 0$$

oder wegen 19)

56) $$\delta(\varrho_e \mathfrak{v}) + \operatorname{rot}[\varrho_e \mathfrak{v}, \delta\mathfrak{s}] = 0.$$

Also hat man

$$\delta W' = \int \left(\mathfrak{a}, \operatorname{rot}\left[\frac{\varrho_e \mathfrak{v}}{c}, \delta\mathfrak{s}\right]\right) dS$$

und durch partielle Integration unter Berücksichtigung von 52)

$$\delta W' = -\int \left(\mathfrak{h}', \left[\frac{\varrho_e \mathfrak{v}}{c}, \delta\mathfrak{s}\right]\right) dS = +\int \left(\left[\frac{\varrho_e \mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{h}'\right], \delta\mathfrak{s}\right) dS$$

oder wegen 14)

57) $$\delta W' = \int (\mathfrak{f}_1', \delta\mathfrak{s})\, dS.$$

Kann man zeigen, daß $\delta W = -\delta W'$ ist, so ist nach 49) und und 57) Gleichung 43) bewiesen.

---

1) vgl. z. B. H. A. Lorentz, Maxwells elektromagn. Theorie, Math. Enc 5,2 Art. 13, pag. 75. Leipzig 1904.

Digitized by Google

Es ist aber

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{h}^2\, dS = -\frac{1}{8\pi}\int (\text{grad } V, \mathfrak{h})\, dS = \frac{1}{8\pi}\int V \,\text{div}\,\mathfrak{h}\, dS$$

und wegen 5)

$$W = -\tfrac{1}{2}\int V . \,\text{div}\,\mathfrak{m}\, dS = -\tfrac{1}{2}\int (\mathfrak{m}, \mathfrak{h})\, dS$$

oder

$$2W = -\int (\mathfrak{m}, \mathfrak{h})\, dS$$

d. h.

58) $$W = -\int (\mathfrak{m}, \mathfrak{h})\, dS - \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{h}^2\, dS.$$

Ersetzt man in der letzten Gleichung auf Grund von 25) und 28) $\mathfrak{h}$ durch $\mathfrak{h}' - 4\pi\,\mathfrak{m}$, so folgt

$$W = -\int \frac{\mathfrak{h}'^2}{8\pi}\, dS + 2\pi\int \mathfrak{m}^2\, dS$$

d. h.

59) $$W = -W' + 2\pi\int \mathfrak{m}^2\, dS.$$

Da nun bei den Verschiebungen der Magnetismus an den Volumelementen haften sollte, so ändert sich das Volumintegral in 59) auch nicht, und man hat

60) $$\delta W = -\delta W'$$

und damit wegen 49) und 57) die Aequivalenz der ponderomotorischen Kräfte bewiesen.

Bei diesen Betrachtungen haben wir uns eine zwangsläufige, gleichsam durch ein Uhrwerk unterhaltene Bewegung der rotierenden elektrisch geladenen Moleküle vorgestellt, ohne uns darüber Rechenschaft zu geben, ob ein solcher Mechanismus auch möglich ist, denn es ist ja keineswegs gesagt, daß ein frei rotierendes Molekül dauernd dieselbe Rotationsaxe und dieselbe Rotationsgeschwindigkeit behalten wird.

Im allgemeinen ist das auch keineswegs der Fall. Damit wir also die tatsächlich vorhandenen rotierenden Moleküle durch gedachte Magnetonen ersetzen können, müssen wir untersuchen, unter welchen Umständen ein frei rotierendes Molekül sowohl seine Rotationsaxe wie die Rotationsgeschwindigkeit um dieselbe unverändert beibehalten wird.

Das soll im folgenden Paragraphen geschehen.

Digitized by Google

§ 3. Die Bewegungen eines frei drehbaren Moleküls im Magnetfelde.

Nehmen wir also an, daß das starre System der negativen Elektronen eines Moleküls sich frei um seinen Schwerpunkt, den wir zum Nullpunkt eines im Molekül festen Koordinatensystems wählen, drehen kann, und legen wir die Koordinatenaxen in die Hauptträgheitsaxen des rotierenden Körpers.

Das Drehmoment, welches auf das Molekül wirkt, ist nach der Lorentzschen Theorie

$$61) \qquad \mathfrak{N} = e \sum [\mathfrak{r}, \mathfrak{f}],$$

wo $\mathfrak{r}$ die Verbindungslinie des Schwerpunktes mit einem Elektron, $\mathfrak{f}$ die auf die Elektrizitätsmenge Eins wirkende Kraft bezeichnet. Es ist also

$$62) \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{e} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{h}\right].$$

In dieser Formel sollen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ die Feldstärken am Orte eines Moleküls bedeuten, wie sie durch äußere Felder und die übrigen Moleküle hervorgerufen werden. Die vom Molekül selbst erzeugten Feldstärken sollen bei der Berechnung des Drehmoments nicht mit berücksichtigt werden, sondern sie werden dadurch in Rechnung gezogen, daß die später eingeführten Trägheitsmomente des rotierenden Moleküls wenigstens zum Teil elektromagnetischer Natur sind. Deshalb ist es auch irrelevant ob die in 62) eingeführte magnetische Feldstärke $\mathfrak{h}$ dem $\mathfrak{h}$ oder $\mathfrak{h}'$ des vorigen Paragraphen entspricht, denn unter Feldstärke verstehen wir jetzt die Feldstärke am Orte des Moleküls, falls dieses fortgedacht wird, also eine Größe im freien Aether, in dem $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ identisch sind.

Durch Einsetzen von 62) in 61) erhalten wir

$$63) \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 = e \sum [\mathfrak{r}, \mathfrak{e}] + \frac{e}{c} \sum [\mathfrak{r}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{h}]].$$

Wir wollen zunächst nur den ersten Teil des Drehmoments

$$64) \qquad \mathfrak{N}_1 = e \sum [\mathfrak{r}, \mathfrak{e}]$$

berechnen.

Da das Molekül klein sein soll im Vergleich zu den Strecken, auf denen das äußere elektrische Feld merklich variiert, so können wir im Innern des Moleküls die elektrische Feldstärke in der Form darstellen

Digitized by Google

$$e_x = e_{x0} + x\left(\frac{\partial e_x}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial e_x}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial e_x}{\partial z}\right)_0$$

65) $$e_y = e_{y0} + x\left(\frac{\partial e_y}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial e_y}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial e_y}{\partial z}\right)_0$$

$$e_z = e_{z0} + x\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial e_z}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial e_z}{\partial z}\right)_0,$$

wo der Index 0 bedeutet, daß der betreffende Wert im Schwerpunkte genommen werden soll.

Berücksichtigen wir die Schwerpunkteigenschaft

66) $$\sum x = \sum y = \sum z = 0,$$

und daß nach der Definition der Hauptträgheitsaxen

67) $$\sum yz = \sum zx = \sum xy = 0$$

ist, und führen wir die Bezeichnungen

68) $$\sum x^2 = K_x;\ \sum y^2 = K_y;\ \sum z^2 = K_z$$

ein, so wird aus 64) mit Hülfe von 65), 66), 67) und 68)

$$\mathfrak{N}_{1x} = e\sum(ye_z - ze_y) = e\left(K_y\frac{\partial e_z}{\partial y} - K_z\frac{\partial e_y}{\partial z}\right).$$

Ebenso

69) $$\mathfrak{N}_{1y} = e\left(K_z\frac{\partial e_x}{\partial z} - K_x\frac{\partial e_z}{\partial x}\right)$$

$$\mathfrak{N}_{1z} = e\left(K_x\frac{\partial e_y}{\partial x} - K_y\frac{\partial e_x}{\partial y}\right).$$

In den letzten Formeln haben wir den Index 0 fortgelassen; denn da wir uns in 65) auf die Glieder erster Ordnung beschränkt haben, so genügt es, den Differentialquotienten in 69) einen im ganzen Molekül konstanten Wert beizulegen.

Der zweite Summand des Drehmoments ist nach 63)

70) $$\mathfrak{N}_2 = \frac{e}{c}\sum[\mathfrak{r}, [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]].$$

Hierbei ist die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{g}$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ durch die Beziehung

71) $$\mathfrak{v} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$$

verknüpft, sodaß aus 70)

72) $$\mathfrak{N}_2 = \frac{e}{c}\sum\left[\mathfrak{r}, [[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}], \mathfrak{H}]\right]$$

Digitized by Google

wird. Nach einer bekannten Regel der Vectoranalysis[1]) dürfen wir hierfür aber schreiben

$$\mathfrak{N}_s = \frac{e}{c} \sum \{[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]\,(\mathfrak{r}, \mathfrak{h}) - \mathfrak{h}\,(\mathfrak{r}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}])$$

oder da[2])

$$(\mathfrak{r}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]) = 0$$

ist,

$$\mathfrak{N}_{sx} = \frac{e}{c} \sum (\mathfrak{g}_y z - \mathfrak{g}_z y)\,(x\mathfrak{h}_x + y\mathfrak{h}_y + z\mathfrak{h}_z)$$

und mit Berücksichtigung von 67) und 68)

$$\mathfrak{N}_{sx} = \frac{e}{c}\,(K_s\,\mathfrak{g}_y\,\mathfrak{h}_z - K_y\,\mathfrak{g}_z\,\mathfrak{h}_y)$$

73)
$$\mathfrak{N}_{sy} = \frac{e}{c}\,(K_x\,\mathfrak{g}_z\,\mathfrak{h}_x - K_z\,\mathfrak{g}_x\,\mathfrak{h}_z)$$

$$\mathfrak{N}_{sz} = \frac{e}{c}\,(K_y\,\mathfrak{g}_x\,\mathfrak{h}_y - K_x\,\mathfrak{g}_y\,\mathfrak{h}_x).$$

Wir spezialisieren jetzt, indem wir über die Form des Moleküls gewisse Voraussetzungen machen, und nehmen zunächst an

1. Das Molekül sei eine Kugel.

Sind die Elektronen im Molekül so verteilt, daß es isotrop bezüglich der drei auf einander senkrechten Hauptträgheitsaxen ist, also etwa in kugelförmiger Anordnung, so ist

$$K_x = K_y = K_z = K,$$

und wir erhalten aus 69)

74)
$$\mathfrak{N}_1 = eK \operatorname{rot} \mathfrak{e}$$

oder mit Benutzung der einen Fundamentalgleichung der Lorentzschen Theorie

75)
$$\mathfrak{N}_1 = -\frac{eK}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t}.$$

Ferner wird nach 73)

76)
$$\mathfrak{N}_s = \frac{eK}{c}[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}],$$

---

1) vgl. z. B. R. Gans, Vectoranalysis 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1909 S. 123 Formel *h*)

2) ibid. Formel *g*).

Digitized by Google

im ganzen also

$$77) \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 = -\frac{eK}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]\right\}.$$

Setzen wir

$$78) \qquad \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = \frac{d\mathfrak{h}}{dt},$$

so bedeutet $\frac{d\mathfrak{h}}{dt}$ die Aenderungsgeschwindigkeit von $\mathfrak{h}$ in Bezug auf das sich drehende Raumelement, wenn das Magnetfeld innerhalb des Moleküls als homogen angesehen werden kann [1]).

Durch Substitution von 78) in 77) wird demnach

$$79) \qquad \mathfrak{N} = -\frac{eK}{c}\frac{d\mathfrak{h}}{dt}.$$

Da das Trägheitsmoment bezüglich einer durch den Schwerpunkt gehenden Axe $2mK$ ist, so lautet die Bewegungsgleichung auf Grund der sogenannten Eulerschen Kreiselgleichung [2]), bezogen auf ein im rotierenden Molekül festes Bezugsystem,

$$80) \qquad 2mK\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = -\frac{eK}{c}\frac{d\mathfrak{h}}{dt}.$$

Die Integration von 80) ergibt

$$81) \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 - \frac{e}{2mc}\mathfrak{h},$$

wenn $\mathfrak{g}_0$ die Winkelgeschwindigkeit vor Erregung des Feldes bedeutet.

Es tritt also infolge der Felderregung zu der ursprünglichen Rotation um eine Axe noch eine Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine zur Feldrichtung parallele Axe hinzu, d. h. es entsteht eine reguläre Präzession der ursprünglichen Rotationsaxe um die Feldrichtung.

Ein kugelförmiges Molekül verhält sich also ganz anders als ein Elementarmagnet, der sich in die Feldrichtung einstellt oder vielmehr, wenn er sich ohne Reibung um seinen Drehpunkt bewegen könnte, um die Feldrichtung hin und herpendeln würde. Hierauf hat bereits Voigt [3]) hingewiesen, und er hat auch die

1) siehe z. B. H. A. Lorentz, Maxwells elektromagn. Theorie. Math. Enc. V Art. 13, p. 77. Leipzig 1904.

2) F. Klein und A. Sommerfeld, Ueber die Theorie des Kreisels 1. pag. 142. Leipzig 1897.

3) W. Voigt, Ann Phys. (4) 9. 1909. pag. 133.

Digitized by Google

Erklärung für den Unterschied gegeben: die Ampèreschen Molekularströme, die das rotierende Molekül repräsentiert, bleiben bei der Erzeugung des Feldes nicht konstant, während ein Elementarmagnet eine feste magnetische Axe und ein permanentes Moment besitzt.

2. Das Molekül sei ein Rotationskörper.

Ist das Molekül ein Rotationskörper, aber keine Kugel, so wollen wir die Figurenaxe[1]) zur z-Axe wählen. Es ist dann

$$K_x = K_y = K;\ K_z = K'.$$

Es wird für die uns interessierenden Fragen genügen, wenn wir uns auf das Studium der Drehungen um die z-Axe beschränken, welche gerade besonders einfach sind.

Das Drehmoment um dieselbe ist nach 69) und 73)

$$82) \qquad \mathfrak{N}_z = -\frac{eK}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]\right\}_z = -\frac{eK}{c}\frac{d\mathfrak{h}_z}{dt},$$

sodaß wir auf Grund der Eulerschen Gleichung die Bewegungsgleichung erhalten[2])

$$83) \qquad 2mK\frac{d\mathfrak{g}_z}{dt} = -\frac{eK}{c}\frac{d\mathfrak{h}_z}{dt},$$

die das Integral

$$84) \qquad \mathfrak{g}_z = \mathfrak{g}_{0z} - \frac{e}{2mc}\mathfrak{h}_z$$

liefert, wenn $\mathfrak{g}_{0z}$ die Winkelgeschwindigkeit um die Figurenaxe vor der Erregung des Feldes bedeutet.

Bevor wir die Bewegung eines solchen elektrisch geladenen Rotationskörpers weiter verfolgen, müssen wir die Ausstrahlung studieren, die bei einer Rotation um die Figurenaxe und bei einer Rotation um eine zur Figurenaxe senkrechte Axe stattfindet.

Ausstrahlung eines rotierenden Moleküls.

Das elektromagnetische Feld eines rotierenden Moleküls ist durch die Lorentzschen Gleichungen gegeben[3])

---

1) Wir unterscheiden im Folgenden immer zwischen Figurenaxe und Rotationsaxe.

2) vgl. H. A. Lorentz, Elektronentheorie. Math. Enc. V, Art. 14, pag. 232. Leipzig 1904.

3) In den Gleichungen 85)—88) haben $\mathfrak{h}$ und ϱ dieselbe Bedeutung wie $\mathfrak{h}'$ und ϱ_0 in § 2.

Digitized by Google

$$85) \qquad c \operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + 4\pi\varrho\mathfrak{v}$$

$$86) \qquad -c \operatorname{rot} \mathfrak{e} = \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t}$$

$$87) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 4\pi\varrho$$

$$88) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0.$$

Findet die Rotation mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um die Figurenaxe (z-Axe) statt, so ist das Feld aus Symmetriegründen stationär, es ist also $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, und wir erhalten aus 86) und 87)

$$89) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{e} = 0; \quad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 4\pi\varrho.$$

Die elektrische Feldstärke wird durch die Rotation nicht modifiziert, wir haben also das elektrostatische Feld der Elektrizitätsmengen des Moleküls, und dieses Feld verläuft aus Symmetriegründen in den Meridianebenen des Moleküls.

Die magnetische Feldstärke berechnet sich nach 85) und 88) aus

$$90) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{4\pi\varrho\mathfrak{v}}{c}; \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0,$$

wir erhalten somit einfach das Magnetfeld der Konvektionsströme, welches ebenfalls, da die Konvektionsströme in Kreisen um die Figurenaxe verlaufen, in den Meridianebenen des Moleküls liegt.

Der Poyntingsche Vector $\mathfrak{s} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{e}, \mathfrak{h}]$ läuft also in Kreisen um die Rotationsaxe, und wir erhalten den Satz:

Bei Rotationen um die Figurenaxe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit findet keine Ausstrahlung statt; eine solche Rotation kann somit dauernd ungedämpft fortbestehen.

Genau genommen verlangt dieser Satz allerdings eine kleine Einschränkung, denn erstens gilt er nur für Rotationen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, während bei plötzlichen Aenderungen derselben infolge der Erregung eines Magnetfeldes (vgl. Formel 84)) eine Ausstrahlung, und somit ein Verlust an kinetischer Energie eintreten wird. Zweitens aber hatten wir vorausgesetzt, daß $\partial/\partial t = 0$ ist, eine Voraussetzung, die nur Berechtigung hätte, wenn die Dichte der Elektrizität kontinuierlich im Molekül verteilt wäre; in Wirklichkeit haben wir es aber mit der Anhäufung

Digitized by Google

von sehr vielen Elektronen zu tun, die eine diskontinuierliche Dichteverteilung repräsentieren. Auch aus diesem Grunde findet eine kleine Ausstrahlung statt, klein, denn J. J. Thomson[1]) hat gezeigt, daß die Ausstrahlung bei Elektronen, die auf Kreisen äquidistant angeordnet um die Kreisaxe zirkulieren, rapid mit der Anzahl der Elektronen abnimmt.

Nach sehr, sehr langer Zeit würde also ein Molekül durch die eigene Ausstrahlung an Energie der rotierenden Bewegung einbüßen. Durch welche neuen Antriebe diese Dämpfung ersetzt wird, wollen wir hier nicht diskutieren, sondern uns einfach auf den Standpunkt stellen, daß Rotationen um die Figurenaxe mit ungeminderter Geschwindigkeit stattfinden können.

Ganz anders verhält sich ein Molekül, das um eine zur Figurenaxe senkrechte Axe rotiert.

Um die bei dieser Bewegung erfolgende Ausstrahlung zu berechnen, betrachten wir zunächst zwei Elektronen, deren Verbindungslinie von der Rotationsaxe senkrecht geschnitten und halbiert wird; der Abstand eines Elektrons von der Rotationsaxe sei l. Die positive Elektrizität vom Betrage $2e$ nehme, wie immer, an der Bewegung nicht teil.

Führen wir ein im Raume festes Koordinatensystem x, y, z ein[2]), und sei die z-Axe die Rotationsaxe des Systems, um welche die in der xy-Ebene liegende Verbindungslinie der Elektronen sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht, so sind die Koordinaten des einen Elektrons

$$\begin{aligned} x &= l\cos\omega t \\ y &= l\sin\omega t \\ z &= 0; \end{aligned} \qquad 91)$$

die des anderen ergeben sich hieraus, wenn man l mit $-l$ oder ωt mit $\omega t+\pi$ vertauscht.

Die Koordinaten X, Y, Z des Aufpunkts drücken sich in Polarkoordinaten durch die Formeln

$$\begin{aligned} X &= R\sin\vartheta\cos\varphi \\ Y &= R\sin\vartheta\sin\varphi \\ Z &= R\cos\vartheta \end{aligned} \qquad 92)$$

---

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) **6**. 1903, pag. 681.

2) Die bei dieser Berechnung benutzte Bezeichnung x, y, z für die drei im Raume festen Axenrichtungen hat natürlich nichts mit der früher und später gebrauchten Benennung der Hauptträgheitsaxen des Moleküls zu tun.

Digitized by Google

aus. Um die Ausstrahlung zu berechnen, dürfen wir R unendlich groß gegen l wählen, sodaß wir l/R konsequent vernachlässigen können. Die Geschwindigkeit $l\omega$ der beiden Elektronen sei so klein, daß man die dritten Potenzen von $\frac{l\omega}{c}$ vernachlässigen kann.

Die von jedem einzelnen Elektron erzeugten Feldstärken berechnen sich aus den retardierten Potentialen [1])

$$93) \qquad \Phi = \frac{e}{\left[r\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)\right]}; \quad \mathfrak{A} = \frac{e\,[\mathfrak{v}]}{c\left[r\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)\right]}.$$

Die eckigen Klammern in diesen Formeln bedeuten, daß die in dieselben eingeschlossenen Größen für die Zeit $t-\tau$ genommen werden müssen, wenn Φ und $\mathfrak{A}$ für die Zeit t berechnet werden sollen, und zwar ist unter τ die sogenannte Latenzzeit verstanden.

Sind die Koordinaten des Elektrons zur Zeit $t-\tau$ x', y', z', so ist

$$94) \qquad \begin{aligned} x' &= l\cos\omega(t-\tau) \\ y' &= l\sin\omega(t-\tau) \\ z' &= 0, \end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$[r^2] = c^2\tau^2 = (X-x')^2+(Y-y')^2+(Z-z')^2$$

oder mit dem von uns erstrebten Genauigkeitsgrad

$$95) \qquad [r] = c\tau = R.$$

Ferner ist

$$[\mathfrak{v}_x] = \frac{dx'}{dt} = -l\omega\sin\omega(t-R/c)$$

$$[\mathfrak{v}_y] = \frac{dy'}{dt} = +l\omega\cos\omega(t-R/c)$$

$$[\mathfrak{v}_z] = \frac{dz'}{dt} = 0$$

also

$$[\mathfrak{v}_r] = \frac{dx'}{dt}\frac{X-x'}{[r]}+\frac{dy'}{dt}\frac{Y-y'}{[r]},$$

und daraus wird mit Vernachlässigung von l/R

$$96) \qquad [\mathfrak{v}_r] = -l\omega\sin\vartheta\sin[\omega(t-R/c)-\varphi]$$

---

1) vgl. z. B. M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1908, pag. 82 und 84.

Digitized by Google

Durch Substitution von 95) und 96) in die erste Formel 93) ergibt sich

$$\Phi = \frac{e}{R}\left(1 + \frac{[\mathfrak{v}_r]}{c} + \left(\frac{[\mathfrak{v}_r]}{c}\right)^2\right) = \frac{e}{R}\left\{1 - \frac{l\omega}{c}\sin\vartheta\sin[\omega(t - R/c - \varphi]\right.$$

97)
$$\left. + \frac{l^2\omega^2}{c^2}\sin^2\vartheta\sin^2[\omega(t - R/c) - \varphi]\right\}.$$

Das von den beiden negativen Elektronen und der ruhenden positiven Elektrizität erzeugte skalare Potential erhält man, wenn man 97) sowohl für die positive wie für die beiden negativen Elektrizitätsmengen bildet und die drei Summanden addiert.

Dabei heben sich die von t freien Glieder fort, da $\sum e = 0$ ist; ferner ergibt auch die Summe der beiden Glieder, die l in der ersten Potenz enthalten, Null, da nach 91) die Koordinaten des einen Elektrons aus denen des anderen durch Vertauschung von l mit $-l$ hervorgehen.

Somit ergibt sich schließlich

$$\Phi = \frac{2el^2\omega^2}{Rc^2}\sin^2\vartheta\sin^2[\omega(t - R/c) - \varphi] = \frac{el^2\omega^2}{Rc^2}\sin^2\vartheta$$

98)
$$- \frac{el^2\omega^2}{Rc^2}\sin^2\vartheta\cos 2[\omega(t - R/c) - \varphi].$$

In ähnlicher Weise erhalten wir

$$\mathfrak{A}_x = \frac{el^2\omega^2}{c^2R}\sin\vartheta\cos\varphi - \frac{el^2\omega^2}{c^2R}\sin\vartheta\cos[2\omega(t - R/c) - \varphi]$$

99)
$$\mathfrak{A}_y = \frac{el^2\omega^2}{c^2R}\sin\vartheta\sin\varphi - \frac{el^2\omega^2}{c^2R}\sin\vartheta\sin[2\omega(t - R/c) - \varphi]$$

$$\mathfrak{A}_z = 0.$$

Zur Berechnung der Strahlung aus den Feldstärken nach den Formeln[1])

100)
$$\mathfrak{e} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$$
$$\mathfrak{h} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$$

ist es hinreichend, wenn R auch unendlich groß gegen die Wellenlänge $\frac{\pi c}{\omega}$ der ausgesandten Strahlung angenommen wird. Das

1) vgl. z. B. M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1908, pag. 36.

Digitized by Google

kommt aber darauf hinaus, daß bei den räumlichen Differentiationen nur das R im Argument der trigonometrischen Funktionen als variabel aufzufassen ist.

So erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{e}_r &= 0 \\
\mathfrak{e}_\vartheta &= -\frac{2e\,l^2\,\omega^3}{c^3\,R}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin 2\,[\omega\,(t-R/c)-\varphi] \\
\mathfrak{e}_\varphi &= +\frac{2e\,l^2\,\omega^3}{c^3\,R}\sin\vartheta\cos 2\,[\omega\,(t-R/c)-\varphi] \\
\mathfrak{h}_r &= 0 \\
\mathfrak{h}_\vartheta &= -\frac{2e\,l^2\,\omega^3}{c^3\,R}\sin\vartheta\cos 2\,[\omega\,(t-R/c)-\varphi] \\
\mathfrak{h}_\varphi &= -\frac{2e\,l^2\,\omega^3}{c^3\,R}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin 2\,[\omega\,(t-R/c)-\varphi].
\end{aligned}
\qquad 101)
$$

Die Strahlung S durch eine unendlich große Kugelfläche vom Radius R ergibt sich nach dem Poyntingschen Theorem aus der Formel

$$S = \int_\sigma \mathfrak{s}_r\,d\sigma = \frac{c}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\mathfrak{e}_\vartheta\,\mathfrak{h}_\varphi - \mathfrak{e}_\varphi\,\mathfrak{h}_\vartheta)\,R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Substituieren wir in diese Gleichung die Werte für $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ aus 101), so folgt für den zeitlichen Mittelwert $\bar{S}$ der Strahlung

$$\bar{S} = \frac{8c}{5}\left(\frac{el^2\omega^3}{c^3}\right)^2. \qquad 102)$$

J. J. Thomson[1]) erhält nach einer anderen Methode einen Ausdruck derselben Form, doch gibt er für $\bar{S}$ einen zweimal so großen Wert an, als der Formel 102) entspricht. Das liegt daran, daß erstens seine Werte für $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ sämtlich doppelt so groß sind als unsere Ausdrücke 101), und daß zweitens bei der Integration über die unendlich große Kugelfläche ein Faktor 2 im Zähler versehentlich fortgelassen ist.

Für ein Teilchenpaar ergab sich nach 101)

$$\mathfrak{e}_\vartheta = -\frac{2e\,l^2\,\omega^3}{c^3\,R}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin 2\,[\omega\,(t-R/c)-\varphi].$$

Wollen wir jetzt die Feldstärken berechnen, die die Elek-

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) **6** 1903 pag. 680.

Digitized by Google

tronen eines ganzen Moleküls erzeugen, so können wir je zwei Teilchen zusammenfassen, deren Verbindungslinie von der Rotationsaxe halbiert wird und auf ihr senkrecht steht. Liegen N Elektronen in der Volumeinheit des Moleküls, und sind l, φ_0, z_0 die Zylinderkoordinaten die einen Punkt des Moleküls zur Zeit $t = 0$ charakterisieren, sodaß ein Volumelement $ld\,l\,d\varphi_0\,dz_0$ ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{e}_\vartheta = -\frac{2eN\omega^2}{c^3}\sin\vartheta\cos\vartheta\int\int\int\frac{l^2}{R'}\sin 2[\omega(t-R'/c)-\varphi+\varphi_0]\,l\,dl\,d\varphi_0\,dz_0,$$

wobei die Integration über die eine Hälfte des Volumens des ganzen Moleküls zu erstrecken ist (die Hälfte nur, da bereits in der Formel 101) die Wirkung zweier Teilchen zusammengefaßt ist) und R' für $\sqrt{X^2+Y^2+(Z-z_0)^2}$ gesetzt ist.

Diese Integrationen lassen sich leicht für alle Komponenten von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ durchführen, und man erhält z. B. für die Ausstrahlung eines sehr dünnen Zylinders der Länge L

$$\overline{S} = \frac{c}{360}L^4\mathfrak{e}^2\frac{\omega^6}{c^6}, \tag{102}$$

wo $\mathfrak{e}$ die gesamte Elektrizitätsmenge der negativen Elektronen des Moleküls darstellt.

Für ein Rotationsellipsoid mit den Halbaxen a, b findet man

$$\overline{S} = \frac{2c}{125}(a^2-b^2)^2\mathfrak{e}^2\frac{\omega^6}{c^6}. \tag{103}$$

Es ergibt sich aus diesen Berechnungen der Satz:

Ein Molekül, das um eine zur Figurenaxe senkrechte Axe rotiert, sendet eine von Null verschiedene Strahlung in den Raum aus.

Das magnetische Moment eines rotierenden Moleküls und das Drehmoment, welches dasselbe im Magnetfelde erfährt.

Zur Feststellung der Gleichgewichtslagen, die ein rotierendes Molekül im Magnetfelde einnimmt, wollen wir zunächst das magnetische Moment desselben berechnen und uns dann nach dem Drehmoment in einem konstanten Magnetfelde fragen.

Unter dem magnetischen Moment eines permanenten Magneten versteht man den Vektor

$$\mathfrak{m} = \int \mathfrak{r}\varrho_m\,dS, \tag{104}$$

wo $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor von einem festen Punkte nach einem be-

Digitized by Google

liebigen Punkte des Magneten, ϱ_m die in diesem befindliche magnetische Dichte bedeutet und die Integration über das Volumen des Magneten zu erstrecken ist.

Nach Formel 4) (§ 2) nimmt 104) die Form an

$$\mathfrak{m} = -\int \mathfrak{r} \,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{m}\, dS,$$

die durch partielle Integration in

105) $$\mathfrak{m} = \int \mathfrak{m}\, dS$$

übergeht.

Andrerseits können wir den Ausdruck $\int \frac{\varrho_e}{2c} [\mathfrak{r}, \mathfrak{v}]\, dS$ der sich auf ein rotierendes Molekül bezieht, mit Hülfe von 20) in die Form

$$\int \frac{\varrho_e}{2c} [\mathfrak{r}, \mathfrak{v}]\, dS = \tfrac{1}{2} \int [\mathfrak{r}, \mathrm{rot}\, \mathfrak{m}']\, dS$$

bringen, aus der durch partielle Integration $\int \mathfrak{m}'\, dS$ wird. Sind der betrachtete permanente Magnet und das rotierende Molekül im Sinne von § 2 einander magnetisch äquivalent, so gilt nach 25) $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$, d. h.

106) $$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \int \varrho_e [\mathfrak{r}, \mathfrak{v}]\, dS$$

ist als das magnetische Moment des rotierenden Moleküls aufzufassen. Dabei hat $\frac{1}{2}[\mathfrak{r}, \mathfrak{v}]$ die anschauliche Bedeutung der vom Radiusvektor $\mathfrak{r}$ in der Zeiteinheit überstrichenen Fläche.

Um ein Urteil zu gewinnen über die an einem im Magnetfelde rotierenden Molekül angreifenden Drehmomente und über die Stabilität des Gleichgewichts, berechnen wir die Funktion W', die wir in Formel 50) des § 2 eingeführt haben, und die, wie wir aus der Lorentzschen Theorie wissen, die magnetische Energie darstellt. Wir wollen, um im Einklang mit der üblichen Bezeichnungsart der Elektronentheorie zu bleiben, anstatt $\mathfrak{h}'$ einfach $\mathfrak{h}$ schreiben, bleiben uns aber dessen bewußt, daß in den folgenden Entwicklungen die Größe $\mathfrak{h}$ dem $\mathfrak{h}'$ des § 2 entspricht.

Wir wollen W' berechnen für den Fall, daß ein Molekül um seine Figurenaxe in einem beliebig erzeugten Felde $\mathfrak{h}_1$ rotiert. Das vom Molekül selbst erzeugte Feld nennen wir $\mathfrak{h}_2$, sodaß das gesamte Feld $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ ist und

$$W' = W'_1 + W'_{12} + W'_2$$

107) $$= \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}^2\, dS = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}_1^2\, dS + \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)\, dS + \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}_2^2\, dS$$

wird.

Digitized by Google

Uns interessiert vor allem die sogenannte wechselseitige magnetische Energie

$$W'_{12} = \frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)\,dS \tag{108}$$

des Moleküls und des äußeren Feldes [1]).

Mit Berücksichtigung von 52) können wir in 108)

$$\mathfrak{h}_1 = \operatorname{rot} a_1 \tag{109}$$

substituieren und erhalten

$$W'_{12} = \frac{1}{4\pi}\int(\operatorname{rot} a_1, \mathfrak{h}_2)\,dS, \tag{110}$$

woraus sich durch partielle Integration

$$W'_{12} = \frac{1}{4\pi}\int(a_1, \operatorname{rot}\mathfrak{h}_2)\,dS \tag{111}$$

ergibt oder mit Benutzung von 12)

$$W'_{12} = \int\left(a_1, \varrho\frac{\mathfrak{v}}{c}\right)dS, \tag{112}$$

wenn ϱ (entsprechend dem ϱ_e des § 2) die elektrische Dichte im Molekül bedeutet.

Wählen wir einen Punkt im Innern des Moleküls zum Koordinatenursprung, so dürfen wir wegen der Kleinheit des Moleküls a_1 nach Potenzen der Koordinaten der Elektronen im Molekül entwickeln und uns auf die ersten Potenzen beschränken, sodaß

$$a_{1x} = (a_{1x})_0 + \mathbf{x}\left(\frac{\partial a_{1x}}{\partial x}\right)_0 + \mathbf{y}\left(\frac{\partial a_{1x}}{\partial y}\right)_0 + \mathbf{z}\left(\frac{\partial a_{1x}}{\partial z}\right)_0$$

$$a_{1y} = (a_{1y})_0 + \mathbf{x}\left(\frac{\partial a_{1y}}{\partial x}\right)_0 + \mathbf{y}\left(\frac{\partial a_{1y}}{\partial y}\right)_0 + \mathbf{z}\left(\frac{\partial a_{1y}}{\partial z}\right)_0$$

$$a_{1z} = (a_{1z})_0 + \mathbf{x}\left(\frac{\partial a_{1z}}{\partial x}\right)_0 + \mathbf{y}\left(\frac{\partial a_{1z}}{\partial y}\right)_0 + \mathbf{z}\left(\frac{\partial a_{1z}}{\partial z}\right)_0$$

wird. Diese Werte substituieren wir in 112), können die mit dem Index Null versehenen Größen vor das Integralzeichen setzen und benutzen die Tatsache, daß bei einem um die Figurenaxe rotierenden Molekül

$$\int\varrho\mathfrak{v}\,dS = 0$$

---

1) Wegen dieser Berechnung vgl. man H. A. Lorentz, Elektronentheorie, Math. Enc. 5. Art. 14. S. 181. Leipzig 1904.

Digitized by Google

und die Integrale

$$\int \varrho\, \mathfrak{x}^2\, dS,\ \int \varrho\, \mathfrak{x}\mathfrak{y}\, dS,\ \int \varrho\, \mathfrak{x}\mathfrak{z}\, dS,\ \int \varrho\, \mathfrak{y}^2\, dS,\ \int \varrho\, \mathfrak{y}\mathfrak{z}\, dS,\ \int \varrho\, \mathfrak{z}^2\, dS$$

von der Zeit unabhängig sind, da die Ladungsverteilung sich nicht durch die Bewegung ändert; die Differentialquotienten derselben nach der Zeit müssen also verschwinden, d. h. es muß z. B.

$$\int \mathfrak{x}\, \varrho v_x dS = 0;\quad \int \mathfrak{x}\, \varrho v_y dS + \int \mathfrak{y}\, \varrho v_x dS = 0$$

$$\int \mathfrak{x}\, \varrho v_z dS + \int \mathfrak{z}\, \varrho v_x dS = 0 \text{ u. s. w.}$$

Wenden wir diese Beziehungen auf die in Koordinaten geschriebene Formel 106) an, so erhalten wir

$$\int \varrho v_x \mathfrak{x}\, dS = 0;\ \int \varrho v_x \mathfrak{y}\, dS = -c\mathfrak{m}_z;\ \int \varrho v_x \mathfrak{z}\, dS = +c\mathfrak{m}_y$$
$$\int \varrho v_y \mathfrak{x}\, dS = +c\mathfrak{m}_z;\ \int \varrho v_y \mathfrak{y}\, dS = 0;\ \int \varrho v_y \mathfrak{z}\, dS = -c\mathfrak{m}_x$$
$$\int \varrho v_z \mathfrak{x}\, dS = -c\mathfrak{m}_y;\ \int \varrho v_z \mathfrak{y}\, dS = +c\mathfrak{m}_x;\ \int \varrho v_z \mathfrak{z}\, dS = 0.$$

Bei Benutzung dieser Formeln wird aus 112)

$$W'_{12} = (\operatorname{rot} a_1, \mathfrak{m})$$

oder nach 109)

113) $$W'_{12} = (\mathfrak{h}_1, \mathfrak{m})$$

wo $\mathfrak{h}$, das äußere (also nicht vom Molekül selbst erzeugte) Feld am Orte des Moleküls bedeutet.

Die Arbeit bei einer virtuellen Verschiebung des Moleküls ergibt sich nach 57) als $\delta W'$, und zwar ist hierbei die Umlaufsgeschwindigkeit als konstant gedacht. Dann aber ändern sich W'_1 und W'_2 überhaupt nicht bei virtuellen Verschiebungen, und wir erhalten

114) $$\partial A = \delta W'_{12} = -|\mathfrak{h}_1| . |\mathfrak{m}| \sin\vartheta \delta\vartheta,$$

wenn ϑ den Winkel zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{h}_1$ bezeichnet.

Das Drehmoment, das ϑ zu vergrößern sucht, ist somit

115) $$\mathfrak{N} = -|\mathfrak{h}_1| . |\mathfrak{m}| \sin\vartheta.$$

Es findet also Gleichgewicht statt für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, aber nur für $\vartheta = 0$ ist das Gleichgewicht stabil, wie man aus 115) sofort erkennt, wenn man ϑ etwas von 0 oder π verschiedene Werte gibt.

Das um die Figurenaxe rotierende Molekül ist in einem konstanten Magnetfelde nur im stabilen Gleich-

Digitized by Google

gewicht, wenn das magnetische Moment die Feldrichtung hat.

Diesen Satz brauchen wir zur Diskussion der Bewegungen eines Moleküls in einem Magnetfelde, dessen Stärke und Richtung plötzlich verändert werden.

Einstellung eines rotierenden Moleküls im magnetischen Felde.

Für unser Problem ist es ausschließlich von Interesse, die definitive Einstellung des rotierenden Moleküls zu berechnen, wodurch die Frage wesentlich vereinfacht wird.

Zunächst können wir schließen:

Die Winkelgeschwindigkeiten um jede zur Figurenaxe senkrechte Axe müssen schließlich Null werden, da diese Komponenten der Rotation infolge der damit verknüpften Ausstrahlung allmählich gedämpft werden [1]).

Nennen wir, wie früher, zwei auf einander und auf der Figurenaxe senkrechte, im Körper festliegende Axen x und y, so wird im stationären Endzustand

116) $$\mathfrak{g}_x = 0; \quad \mathfrak{g}_y = 0;$$

dagegen ist die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{g}_z$ um die Figurenaxe ungedämpft und berechnet sich nach 84) aus der Formel

84) $$\mathfrak{g}_z = \mathfrak{g}_{0z} - \frac{e}{2mc}\mathfrak{h}_z.$$

Die Figurenaxe, die jetzt zugleich Rotationsaxe ist, muß nun im Magnetfelde eine feste Endlage annehmen, in der kein Drehmoment wirkt, und in der das Gleichgewicht stabil ist [2]). Wir hatten aber auf Grund der Formel 115) gesehen, daß dies der Fall ist, wenn $\mathfrak{m} \parallel \mathfrak{h}$ ist. Natürlich tritt auch Gleichgewicht ein, wie ja sofort aus 115) folgt, wenn $\mathfrak{m} = 0$ ist, und zwar für jede beliebige Lage der Figurenaxe relativ zum Felde.

Nun berechnet sich $\mathfrak{m}$ aus 106) nach der Formel

106′) $$\mathfrak{m} = \frac{e}{2c}\sum[\mathfrak{r}, \mathfrak{v}],$$

und wenn wir hierin für $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$$

1) Ob die so berechnete Ausstrahlung der einzige Grund der Dämpfung ist, möge dahingestellt bleiben.

2) Wegen dieser Berechnungen vgl. man H. A. Lorentz, Elektronentheorie, Math. Enc. 5. Art. 14, pag. 232. Leipzig 1904.

Digitized by Google

setzen, erhalten wir mit Benutzung einer bekannten Regel der Vektorenrechnung

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{2c} \sum \{\mathfrak{g}\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}(\mathfrak{g}, \mathfrak{r})\}$$

oder mit Beachtung von 116), 67) und 68)

117)
$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_x &= 0 \\ \mathfrak{m}_y &= 0 \\ \mathfrak{m}_z &= \frac{e}{2c} \sum \mathfrak{g}_z (x^2 + y^2) = \frac{eK}{c} \mathfrak{g}_z. \end{aligned}$$

Wir können also auch sagen: Herrscht stabiles Gleichgewicht, so stellt sich entweder die Rotationsaxe in die Feldrichtung, und zwar so, daß $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{h}$ gleichgerichtet sind, oder es findet bei beliebiger Stellung der Figurenaxe überhaupt keine Rotation statt ($\mathfrak{m} = 0$, also $\mathfrak{g} = 0$).

Nennen wir $\sphericalangle(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \sphericalangle(z, h) = \Theta$, so ist die Komponente von $\mathfrak{m}$ in Richtung von $\mathfrak{h}$:

118)
$$\mathfrak{m}_\mathfrak{h} = \frac{eK}{c} \mathfrak{g}_z \cos\Theta.$$

Drei wesentlich verschiedene Fälle sind im Folgenden zu unterscheiden:

1. Fall: $\mathfrak{g}_{0z} = 0$.

Dann wird nach 84)

84′)
$$\mathfrak{g}_z = -\frac{e}{2mc} |\mathfrak{h}| \cos\Theta,$$

und 118) nimmt die Form an

119)
$$\mathfrak{m}_\mathfrak{h} = -\frac{e^2 K}{2m c^2} |\mathfrak{h}| \cos^2\Theta.$$

Aus 119) folgt, daß $\mathfrak{m} \parallel \mathfrak{h}$, also $\Theta = 0$ unmöglich ist, somit ergibt sich aus der anderen Gleichgewichtsbedingung und 84′) $\mathfrak{m} = 0$

$$\mathfrak{g}_z = 0; \quad \Theta = \pi/2.$$

Das Molekül stellt sich im Magnetfelde mit seiner Figurenaxe senkrecht zum Magnetfelde und rotiert nicht.

2. Fall:

$$|\mathfrak{g}_{0z}| < \frac{|e|}{2mc} |\mathfrak{h}|.$$

Wir wählen die Axenrichtung z so, daß $\mathfrak{g}_{0z} > 0$ ist. Aus 118) und 84) folgt

$$\mathfrak{m}_\mathfrak{h} = \frac{eK}{c} \cos\Theta \left(\mathfrak{g}_{0z} - \frac{e}{2mc} |\mathfrak{h}| \cos\Theta\right)$$

Digitized by Google

und für $\Theta = 0$ ist

120) $$\mathfrak{m}_{\mathfrak{h}} = \frac{eK}{c}\left(\mathfrak{g}_{oz} - \frac{e}{2mc}|\mathfrak{h}|\right).$$

Nach Voraussetzung ist dieser Ausdruck aber stets < 0, gleichgültig, ob $e \lesseqgtr 0$ ist, also ist $\Theta = 0$ kein möglicher Gleichgewichtszustand, es muß also

121) $$\mathfrak{g}_z = 0 \text{ und nach 84) } \cos\Theta = \frac{2mc\,\mathfrak{g}_{oz}}{e|\mathfrak{h}|}$$

sein.

Das Molekül bleibt unter dem Einflusse des Feldes plötzlich stehen, und zwar hat die Axe eine durch 121) bestimmte Neigung gegen die Feldrichtung.

3. Fall: $|\mathfrak{g}_{oz}| > \frac{|e|}{2mc}|\mathfrak{h}|$ für alle erreichbaren Feldstärken.

Dann kann $\mathfrak{g}_z$ in keiner Lage der Axe verschwinden, denn sonst müßte nach 84)

$$\cos\Theta = \frac{\mathfrak{g}_{oz}}{\frac{e}{2mc}|\mathfrak{h}|}$$

sein, und das wäre nach Voraussetzung > 1 oder < -1; also muß

122) $$\Theta = 0;\ \mathfrak{g}_z = \mathfrak{g}_{oz} - \frac{e|\mathfrak{h}|}{2mc}$$

und nach 118)

123) $$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{h}} = \frac{eK}{c}\left(\mathfrak{g}_{oz} - \frac{e|\mathfrak{h}|}{2mc}\right)$$

sein.

Das Molekül stellt sich mit seiner Rotationsaxe in die Feldrichtung; das Moment wird durch die Felderregung auf jeden Fall geschwächt. Ist $\mathfrak{g}_{oz}$ groß gegen $\frac{e|\mathfrak{h}|}{2mc}$ für alle erreichbaren Feldstärken, so bleibt das Moment auch bei Erregung eines Feldes genähert konstant.

Aus den obigen Ueberlegungen schließen wir, daß die Moleküle ferromagnetischer Körper keine Kugelgestalt haben können, weil Kugeln sich überhaupt nicht im magnetischen Felde einstellen würden. Körper von geringerer Symmetrie als Körper mit einer Figurenaxe sind auch ausgeschlossen, da sie durch eigene Strahlung zur Ruhe kommen müßten und somit keine magnetischen Eigenschaften haben könnten. Die Moleküle sind also Rotationskörper. Diese müssen schon außerhalb eines Feldes eine große

Digitized by Google

Umlaufsgeschwindigkeit besitzen, weil sie sonst im Felde stehen bleiben würden. Damit das Phänomen der Sättigung darstellbar ist, müssen wir sogar annehmen, daß g_{0s} groß gegen $\frac{e}{2mc}|\mathfrak{h}|$ ist für alle erreichbaren Feldstärken.

Um zahlenmäßig die Bedeutung dieser Annahme zu übersehen, berücksichtigen wir, daß Weiß[1]) die Sättigung am Eisen geprüft und bis $H = 6600$ Gauß keine Wiederabnahme der Magnetisierung bemerkt hat. Da nun für negative Elektronen $\frac{e}{mc} = 1{,}77.10^7$ ist, so muß g_0^s groß gegen $5{,}83.10^{10}\ \frac{1}{\text{sec}}$ sein, oder wenn wir die Umdrehungszahl pro Sekunde n nennen, so muß n groß gegen $0{,}93.10^{10}\ \frac{1}{\text{sec}}$ sein.

Das aber scheint sicher: Wirkliche magnetische Sättigung ist auf Grund der Elektronentheorie nicht denkbar. Wenn es nur möglich wäre, Felder von genügender Stärke herzustellen, so würde man eine Wiederabnahme der Magnetisierung beobachten müssen, und man würde aus diesem Phänomen die Umlaufsgeschwindigkeit der Moleküle berechnen können.

§ 4. H. A. Lorentz' Behandlung der Dielektrika.

Es wird nützlich sein, vor der Behandlung eines magnetischen Körpers die Vorgänge in einem Dielektrikum zu besprechen, da einerseits die Analogien so groß sind, daß gewisse Formeln ohne weiteres wörtlich von einem Problem aufs andere übertragen werden können, andrerseits aber so am besten die nötigen Unterschiede in der Behandlungsweise und deren Gründe gezeigt werden können.

Ein Dielektrikum denken wir uns nach H. A. Lorentz[2]) aus einer großen Anzahl elektrischer Dipole aufgebaut; ihre Momente beeinflussen durch ihre Fernwirkung die Feldstärke, und diese bestimmt ihrerseits wieder die Größe der Momente, indem sie in den Dipolen Verschiebungen hervorruft. Daher müssen wir folgende zwei Fragen beantworten:

---

1) P. Weiß, C. R. 145 p. 1155. 1907.
2) H. A. Lorentz, Arch. néerl. 25 1892 pag 463.

Digitized by Google

1) Welche Feldstärke wird — durch Fernwirkung — von einer gegebenen Polarisation erzeugt?

2) Welche Polarisation wird — durch Verschiebung in den Dipolen — von einer gegebenen Feldstärke erzeugt?

Die eine Frage macht gewissermaßen die Feldstärke, die andere die Polarisation zur Ursache, obwohl selbstverständlich in der Natur ein solcher Unterschied nicht vorhanden ist. Außerdem hängt in beiden Fällen die zu bestimmende Größe auch noch von den wahren Ladungen ab, sodaß man nach Lösung der Fragen sowohl die Feldstärke als auch die Polarisation als Funktion der wahren Ladungen kennt oder, was auf dasselbe herauskommt, einen Ausdruck für die Dielektrizitätskonstante gefunden hat.

Beginnen wir mit der ersten Frage. Unter ϱ verstehen wir die elektrische Ladungsdichte an einem Punkte im Innern eines Elektrons. Es gibt aber zwei Arten von Elektronen, sogenannte Polarisationselektronen, für deren Dichte wir ϱ_p schreiben, und sogenannte Leitungselektronen, deren Dichte wir mit ϱ_l bezeichnen. Die Leitungselektronen nehmen wir an unveränderliche Lagen fest gebunden an. Tatsächlich können sie sich natürlich sehr wohl auf den Leitern fortbewegen; indem wir aber ihren Ort als vorher bestimmt ansehen, dürfen wir uns auf den Standpunkt stellen, daß, während alle anderen Elektronen ihr Gleichgewicht suchen müssen, sie an ihrem Platze unverrückbar haften. Die Polarisationselektronen sind einer Verschiebung ihrer entgegengesetztgeladenen Teilchen fähig, wodurch ein elektrisches Moment entsteht.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{e}$ die elektrische Feldstärke, die in molekularen Distanzen sehr schwanken kann, so hat man nach einer Grundgleichung der Elektronentheorie

$$\text{124)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 4\pi\varrho.$$

Den Mittelwert $\bar{\mathfrak{e}}$ von $\mathfrak{e}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}$, es ist also

$$\text{125)} \qquad \mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{e}} = \frac{1}{S}\int_S \mathfrak{e}\, dS,$$

wenn S einen beliebigen physikalisch unendlich kleinen Raum bezeichnet. Entsprechend definiert man $\bar{\varrho}$, $\bar{\varrho}_l$, $\bar{\varrho}_p$ und erhält nach Definition

$$\bar{\varrho} = \bar{\varrho}_l + \bar{\varrho}_p.$$

Führt man endlich die „wahre Dichte“ ϱ_w durch die Festsetzung

Digitized by Google

126) $$\varrho_w = \bar{\varrho}_l$$

ein, so folgt aus 124) bis 126)

127) $$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho_w + 4\pi\bar{\varrho}_p.$$

Der Mittelwert $\bar{\varrho}_p$ läßt sich aus der Verteilung der elektrischen Momente berechnen. Bezeichnet n die Zahl der Polarisationselektronen in der Volumeinheit, $\mathfrak{p}$ das Moment eines Dipols, so bedeutet

128) $$\mathfrak{P} = n\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$$

die Polarisation oder das Moment pro Volumeneinheit. Dabei ist mit $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ der sogenannte zweite Mittelwert gemeint, der entsteht, wenn man $\mathfrak{p}$ an allen den Stellen eines physikalisch unendlich kleinen Raumes summiert, an denen sich Dipole befinden und durch die Zahl dieser Dipole dividiert.

In Teilen des Dielektrikums, in denen $\mathfrak{p}$ verschwindet, sind die entgegengesetzten Ladungen einander so nahe, daß $\bar{\varrho}_p = 0$ ist. Wenn aber $\mathfrak{p}$ nicht verschwindet, so hat man, wie eine einfache geometrische Betrachtung lehrt [1]),

129) $$\varrho_p = -\operatorname{div} \mathfrak{P},$$

woraus sich

130) $$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho_w - \operatorname{div} 4\pi\mathfrak{P},$$

ergibt.

Da der Zustand stationär ist, so gilt ferner

131) $$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Aus 130) und 131) berechnet sich $\mathfrak{E}$ nach bekannten Methoden der Vektoranalysis; somit ist die erste Frage beantwortet. Man kann die Lösung auch in der Form schreiben

132) $$\operatorname{div} (\mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}) = 4\pi\varrho_w.$$

Falls es sich herausstellt, daß $\mathfrak{P}$ proportional $\mathfrak{E}$ ist, so drückt sich der Proportionalitätsfaktor durch die Dielektrizitätskonstante ε aus, denn man setzt definitionsweise

133) $$\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E},$$

sodas 132) in

---

1) H. A. Lorentz, Elektronentheorie, Math. Enc. 5. Art. 14, pag. 206. Leipzig 1904.

Digitized by Google

132') $$\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 4\pi \varrho_w$$

übergeht.

Unsere zweite Aufgabe ist, bei gegebenem Felde die Polarisation zu bestimmen, während wiederum die wahren Ladungen fest vorgeschriebene Lagen haben.

Wir nehmen an, daß das dielektrische Moment $\mathfrak{p}$ eines Dipols, den wir uns etwa wie ein elastisches System vorstellen, der an dieser Stelle wirkenden elektrischen Feldstärke $\mathfrak{e}$ proportional ist wir setzen also

134) $$\mathfrak{p} = g\mathfrak{e}.$$

Hieraus folgt

135) $$\mathfrak{P} = n\overline{\mathfrak{p}} = ng\overline{\mathfrak{e}}.$$

$\mathfrak{e}$ wird erhalten, indem man die nach dem Coulombschen Gesetze zu berechnenden elektrostatischen Kraftwirkungen sämtlicher Elektronen, sowohl der Polarisationselektronen als auch der Leitungselektronen, summiert. Um zu $\overline{\mathfrak{e}}$ zu gelangen, ist also eine doppelte Summation nötig:

1) müssen wir, schon um $\mathfrak{e}$ zu bestimmen, die Wirkung sämtlicher Elektronen auf den Aufpunkt zusammenrechnen. (Wir nennen das im Folgenden eine Summation erster Art).

2) müssen wir dann weiter den Aufpunkt nacheinander in alle Polarisationselektronen verlegen. (Wir nennen das im Folgenden die Summation zweiter Art).

Wir machen nun die für das Folgende wesentliche Annahme daß sich zwei Dipole nicht näher kommen können als eine bestimmte Strecke s.[1]). Um den zu betrachtenden Aufpunkt A beschreiben wir daher zwei Kugeln, die eine mit dem Radius s, die andere mit einem Radius s'. s' werde so groß gewählt, daß die Wirkung der außerhalb befindlichen Polarisationselektronen durch die mittlere Polarisation $\mathfrak{P}$ angegeben werden kann. $\mathfrak{P}$ kann natürlich makroskopisch mit dem Orte variieren; wir nehmen aber s' wiederum so klein an, daß $\mathfrak{P}$ auf der Oberfläche der Kugel mit dem Radius s' noch als konstant angesehen werden darf.

Der Raum um A zerfällt also jetzt in drei Gebiete I, II und III, die I oder die Innenkugel, II oder die Mittelzone, III oder der Außenraum heißen mögen. Wir wollen die Beiträge berechnen, die jedes Gebiet zu $\mathfrak{e}$ liefert, und wollen uns zunächst auf den Beitrag der Polarisationselektronen beschränken.

---

1) vgl. M. Planck, Berl. Ber. 1902, 1. p. 470.

Digitized by Google

Nach Voraussetzung liefert I keinen Beitrag. Der Beitrag von II zu e wird jedenfalls im allgemeinen von Null verschieden sein, denn die Abstände der Dipole von einander sind von derselben Größenordnung wie ihre Abstände von A. Um $\bar{\bar{e}}$ zu bilden, legen wir A nacheinander in alle Dipole hinein, erhalten also zu jeder Lage von A eine neue Mittelzone II, deren s und s' natürlich immer dieselben Werte haben, und gelangen so zu der erwähnten Summation zweiter Art. Diese Rechnung kann man auch geometrisch ausführen: Man kann sich sämtliche Mittelzonen über einander gelegt denken[1]) und wird dadurch eine gleichmäßig polarisierte Zone erhalten, die nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie in ihrem Mittelpunkte keine Feldstärke erzeugt. Wenn also auch eine einzelne Zone einen von Null verschiedenen Beitrag zu e liefert, so verschwindet doch der Beitrag aller II zu $\bar{\bar{e}}$.

Diese Schlußweise Plancks scheint uns streng zu sein, sodaß wir in dem von Lorentz der Vorsicht halber eingeführten Zusatzglied $a\mathfrak{P}$ (a eine unbekannte Konstante) $a = 0$ setzen wollen. Bei der Uebertragung der Lorentzschen Gedanken auf die Magnetonentheorie wird an dieser Stelle eine ganz entsprechende Ueberlegung nötig werden, und das ist der Grund, weshalb wir die Lorentzsche Theorie so ausführlich dargelegt haben.

Bestimmen wir jetzt noch die Wirkung des Außenraums III. Da er als ein regelmäßig polarisierter Körper angesehen werden darf, wird der von den in III befindlichen Dipolen gelieferte Beitrag durch das Formelsystem gegeben[2])

136) $$e_{\mathrm{III},p} = -\operatorname{grad} \varphi_{\mathrm{III},p}$$

137) $$\varphi_{\mathrm{III},p} = \int_{\mathrm{III}} \left(\mathfrak{P}, \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}\right) dS;$$

dabei bedeutet r die Entfernung des Aufpunktes A vom Quellpunkte q, d. h. von demjenigen Punkte, nach dem integriert wird, und dessen Koordinaten ξ, η, ζ heißen mögen, $\operatorname{grad}_q \frac{1}{r}$ ist der Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}$, und die Integration in 137) erstreckt sich über den Raum III

1) vgl. M. Planck, l. c. p. 481.
2) vgl. H. A. Lorentz, Math. Enc. 5 Art. 14 pag. 465.

Digitized by Google

Durch partielle Integration geht 137) über in

$$138) \qquad \varphi_{\mathrm{III},\mathfrak{P}} = -\int_{\mathrm{III}} \frac{\operatorname{div}\mathfrak{P}}{r}\, dS + \int_{\sigma_i} \frac{\mathfrak{P}_n}{r}\, d\sigma + \int_{\infty} \frac{\mathfrak{P}_n}{r}\, d\sigma.$$

Das zweite Integral rechts ist ein Oberflächenintegral über die Kugel vom Radius s', das dritte Integral erstreckt sich über die unendlich große Fläche, durch die wir uns den Raum III nach außen begrenzt denken[1]), und verschwindet daher, weil an der Grenzfläche die Wirkung des Feldes bereits unmerklich sein soll; $\mathfrak{P}$ sollte ja keineswegs konstant in III sein. Die Normalenrichtung n weist aus dem Raume III heraus.

Das Raumintegral in 138) darf nun anstatt über den Raum III auch über den ganzen unendlichen Raum erstreckt werden, denn nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie ergibt das über die Kugel mit dem physikalisch unendlich kleinen Radius s' erstreckte Raumintegral keinen merklichen Beitrag.

Das zweite Integral in 138) liefert bei der Operation 136) zu e den Beitrag $\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$, nämlich eine Feldstärke, die gleich und entgegengesetzt der von einer homogen polarisierten Kugel erzeugten Feldstärke ist[2]).

Die Wirkung der Leitungselektronen können wir ganz entsprechend ermitteln. Raum I gibt nach Voraussetzung keinen Beitrag, Raum II gibt zwar zu φ_l, aber nicht zu $\overline{\varphi}_l$ einen Beitrag, während der Beitrag des Raumes III lautet

$$139) \qquad \varphi_{\mathrm{III},l} = \int_{\mathrm{III}} \frac{\varrho_w\, dS}{r}.$$

Ein Oberflächenintegral über die innere Begrenzungsfläche σ_i kommt nicht hinzu, da wir ausdrücklich annehmen wollen, daß die wahren Ladungen an σ_i molekular ungeordnet und nicht etwa in Form von Dipolen angeordnet sind.

Da das Raumintegral in 139) ebenfalls über den unendlichen Raum anstatt über III erstreckt werden darf, so bleiben außer dem Beitrag $\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$ nur die Beiträge der beiden Raumintegrale in 138) und 139) zu φ_{III}, nämlich

1) Diese Fläche kann Körper durchschneiden, die physikalisch von dem betrachteten ganz getrennt sind. Wir denken uns die Gesamtheit aller Körper als ein System mit variabler Dichte der Polarisationselektronen, sodaß keine Unstetigkeitsflächen berücksichtigt zu werden brauchen.

2) Vgl. z. B. M. Abraham und A. Föppl, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität 1. 1907 p. 164.

Digitized by Google

$$\int \frac{(\varrho_w - \operatorname{div} \mathfrak{P})}{r}\, dS.$$

Der negative Gradient hiervon (Gl. 136)) ist ein wirbelfreier Vektor $\mathfrak{Z}$, der der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{Z} = 4\pi\varrho_w - \operatorname{div} 4\pi\mathfrak{P}$$

genügt. Andrerseits genügt dieser Gleichung nach 130) gerade der Vektor $\mathfrak{E}$, und wegen der Eindeutigkeit nur der Vektor $\mathfrak{E}$.

Daher erhält man[1])

140) $$\bar{\bar{\mathfrak{e}}} = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P},$$

wodurch 135) in

141) $$\mathfrak{P} = n\mathfrak{g}\left(\mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}\right)$$

übergeht.

Hiermit ist auch die zweite Frage gelöst, bei der die Feldstärke gewissermaßen das Ursprüngliche ist und die Polarisation daraus berechnet wurde. Die Antwort wurde dadurch etwas weniger einfach, daß die Polarisation auch noch in die rechte Seite einging (vgl. Gl. (141)).

Aus 141) und 133) erhält man

142) $$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} g \,.\, n,$$

die bekannte Lorenz-Lorentzsche Gleichung. Wir sehen, ihre Ableitung beruht ganz wesentlich auf den Betrachtungen, die wir über die Mittelzone angestellt haben.

§ 5. Die Grundlagen für die Theorie der Magnetonen.

Dieselben Annahmen, wie der Theorie des Dielektrikums legen wir auch der Theorie des ferromagnetischen Körpers zu Grunde. Die magnetischen Kräfte sollen wieder von fest gegebenen wahren Ladungen mit der Dichte ϱ_w herrühren und von magnetischen Dipolen, deren magnetische Dichte ϱ_p heißen möge. Daß wir teilweise dieselben Bezeichnungen wie im Falle der Elektrostatik gebrauchen, wird nicht zu Verwechselungen führen, da wir uns von jetzt ab nur mit dem magnetischen Problem zu beschäftigen haben.

Daß die eben formulierten Annahmen berechtigt sind, auch wenn man die Existenz eines magnetischen Fluidums leugnet, davon haben wir uns ja eingehend in § 3 überzeugt. Die dort

1) vgl. H. A. Lorentz, Arch. néerl. 25. 1892 pag. 468.

Digitized by Google

behandelten rotierenden Moleküle entsprechen den in diesem Paragraphen herangezogenen Dipolen.

Die magnetische Feldstärke nennen wir $\mathfrak{h}$ (im selben Sinne wie in § 2 gebraucht), ihren über einen physikalisch unendlich kleinen Raum S genommenen Mittelwert $\mathfrak{H}$; also ist

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{S}\int_S \mathfrak{h} dS$$

die meßbare Feldstärke. Ferner bezeichnen wir das Moment eines magnetischen Dipols mit $\mathfrak{m}$ und setzen

143) $$\mathfrak{M} = n\bar{\bar{\mathfrak{m}}},$$

wo $\mathfrak{M}$ also ganz der elektrischen Polarisation $\mathfrak{P}$ entspricht und Magnetisierung heißt.

Wenn soweit vollkommene Uebereinstimmung mit der Theorie des Dielektrikums besteht, so liegt ein wichtiger Unterschied in Folgendem:

Wir nehmen an, daß die Magnetismusmengen eines magnetischen Dipols einen unveränderlichen Abstand voneinander besitzen. Der Mittelpunkt der Dipole liegt fest wie derjenige der elektrischen; der absolute Wert des Momentes heiße m.

Sehen wir zu, welche Aenderungen infolge dieser Annahme an den bisherigen Entwickelungen anzubringen sind. Der Molekularmagnet, oder, wie wir kurz sagen wollen, das Magneton wird nicht ein der Feldstärke proportionales Moment besitzen, sondern sich nur in die Richtung der Feldstärke einstellen. Eine Proportionalität zwischen Feldstärke und Moment nach Art der Gleichung 134) besteht nicht mehr.

Von dieser Proportionalität hatten wir wir aber bisher ausgiebigen Gebrauch gemacht. Wir hatten, um $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ zu finden, $\bar{\bar{\mathfrak{e}}}$ gesucht, $\bar{\bar{\mathfrak{e}}}$ in drei Bestandteile zerlegt und $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ aus drei ihnen zugehörigen Anteilen zusammengesetzt, was darum erlaubt war, weil sich die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{p}$ nur durch einen konstanten Faktor g unterschieden. Wenn es jetzt nicht erlaubt ist, erst den zweiten Mittelwert von $\mathfrak{h}$ zu bilden und daraus $\bar{\bar{\mathfrak{m}}}$ abzuleiten, so muß man schon zur Betrachtung der einzelnen $\mathfrak{h}$ übergehen, d. h. die Summation zweiter Art für die $\mathfrak{h}$ unterlassen während die Summation erster Art natürlich nötig bleibt. Um aber einen mathematischen Ausdruck für die Gesamtheit der $\mathfrak{h}$-Werte zu erhalten, brauchen wir eine Verteilungsfunktion, welche die relative Häufigkeit jeder Größe und Richtung von $\mathfrak{h}$ angibt. Besonders wichtig wird die Verteilungsfunktion für die Richtung

Digitized by Google

von $\mathfrak{h}$ sein; diese Funktion stimmt im Gleichgewichtsfalle mit der Verteilungsfunktion für die Richtungen der Magnetonenaxen überein. Kennt man sie, so kann aus ihr und den wahren Ladungen die Feldstärke berechnet werden; umgekehrt hängt die Verteilungsfunktion selbst von der Feldstärke ab. Sie vertritt somit die Rolle, welche in der Elektrostatik die Polarisation spielte. Unser Problem wird also dadurch verwickelter als das elektrische, daß an Stelle einer einzelnen Größe eine zu bestimmende Funktion in den Gleichungen auftritt. Natürlich brauchen wir auch noch die Größe $\mathfrak{M}$ selbst; sie ergibt sich aber sofort aus der Kenntnis der Verteilungsfunktion.

Wir werden so die Fragestellungen, die sich im vorigen Paragraphen auf $\mathfrak{P}$ bezogen, jetzt auf unsere Funktion zu übertragen haben. Dazu muß sie aber zunächst genau definiert werden. Wir nehmen eine Vorzugsrichtung an, in die, vom Vorzeichen abgesehen, Feldstärke und Magnetisierung fallen. Sind n Magnetonen in der Volumeneinheit vorhanden, so setzen wir die Zahl der Magnetonen, deren Axen mit der Vorzugsrichtung Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ bilden,

$$= n\Phi(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Es ist also

144) $$\int_0^\pi \Phi(\vartheta)\, d\vartheta = 1.$$

Für den Absolutwert M der Magnetisierung ergibt sich nach 143)

145) $$M = nm\int_0^\pi \Phi(\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta.$$

Unsere beiden Fragen lauten jetzt:

Erstens: Wie berechnet sich die Feldstärke, bei gegebenen wahren Ladungen, wenn die Verteilungsfunktion bekannt ist?

Zweitens: Wie berechnet sich die Verteilungsfunktion, wenn die Feldstärke gegeben ist?

Die erste Frage beantwortet sich folgendermaßen: Genau wie in 132) haben wir

146) $$\operatorname{div}(\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}) = 4\pi\varrho_w,$$

wo $\mathfrak{M}$ durch 145) gegeben ist.

Da

147) $$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0$$

ist, so ist $\mathfrak{H}$ aus 146) und 147) berechenbar.

Digitized by Google

Uebrigens setzen wir die Größe

148) $$\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M} = \mathfrak{B}'$$

und haben also

149) $$\mathfrak{B}' = \mathfrak{H} + 4\pi mn \int_0^\pi \Phi(\vartheta) \cos\vartheta d\vartheta.$$

Wenn ϱ_w als negative Divergenz eines Vektors $\mathfrak{M}_w$ (wahre Magnetisierung) verteilt ist, so lautet 146)

$$\operatorname{div}(\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}) = -4\pi \operatorname{div} \mathfrak{M}_w$$

oder

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

wenn

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M} + 4\pi\mathfrak{M}_w$$

gesetzt wird. Die Größe $\mathfrak{B}$ ist die sogenannte Induktion. Unser $\mathfrak{B}'$ (das magnetische Seitenstück zu $\varepsilon\mathfrak{E}$) ist nur ein Teil von ihr. Falls aber, wie von jetzt ab angenommen werden soll, im Innern des zu betrachtenden Körpers nur frei drehbare Magnetonen vorkommen, also ϱ_w dort überall null ist, wird 146) und 148)

$$\operatorname{div} \mathfrak{B}' = 0$$

und $\mathfrak{B}'$ mit der Induktion $\mathfrak{B}$ identisch.

Zur Beantwortung der zweiten Frage berücksichtigen wir, daß jedes Magneton sich in die Richtung stellt, welche die Feldstärke $\mathfrak{h}$ am Orte seines Mittelpunktes besitzt. Um diese Feldstärke zu ermitteln, konstruieren wir wieder um jedes Magneton die drei Zonen I, II, III. Wie früher liefert die Zone I nach Voraussetzung keinen Beitrag. Die Zone III liefert eine erregende Kraft von der Größe $H + \frac{4\pi}{3} M$, die in die Vorzugsrichtung fällt. Indem wir abkürzend K für den Beitrag der Zone III schreiben, haben wir also

150) $$K = H + \frac{4\pi}{3} M.$$

Während also K für alle Magnetonen eines physikalisch unendlich kleinen Raumes gleich ist, schwankt der Beitrag von II von Ort zu Ort. Hierin lag auch schon im Falle des vorigen Paragraphen eine besondere Schwierigkeit. Dort halfen wir uns aber durch eine Summation zweiter Art, d. h. wir legten den Mittelpunkt von II nacheinander in alle Dipole, fanden als Mittelwert der Anteile die Kraft 0 und konnten das Problem ein-

Digitized by Google

deutig zu Ende führen. So dürfen wir jetzt nicht vorgehen, denn auf diese Weise würden wir zwar die Durchschnittsfeldstärke, nicht aber die Verteilungsfunktion und damit auch nicht die Magnetisierung erhalten. Dennoch lassen sich Ueberlegungen anstellen, die sich eng an jenen in § 4 benutzten und für richtig erkannten Satz anschließen. Wir brauchen zunächst eine Verteilungsfunktion für die Kraftanteile der Zone II. Diese ist zwar durch das Problem mathematisch bestimmt, wir erleichtern uns aber die Aufgabe indem wir eine möglichst einfache Annahme über sie machen. Wollen wir in Uebereinstimmung mit § 4 bleiben, so müssen wir für die Anteile von II eine solche Verteilung wählen, daß man nach einer Summation zweiter Art die Feldstärke Null erhält. Die einfachste dem entsprechende Annahme ist, daß die von den verschiedenen Mittelzonen erzeugten Feldstärken alle die gleiche Größe haben und in jeder Richtung gleich oft vorkommen.

Wir können sicher sein, daß diese Annahme nur angenähert erfüllt sein wird, und daß wir mit ihr den Boden unbedingter Strenge verlassen. Andrerseits dürfte eine strengere Theorie kaum zu wesentlich anderen Ergebnissen führen, und es wird daher erlaubt sein, sie in Ermangelung besserer Einsicht beizubehalten. Um über den Grad ihrer Zuverlässigkeit ein ungefähres Urteil zu erlangen, ist es erforderlich, sich zu überlegen, wie die strenge Theorie zu verfahren hätte.

Denken wir uns die von II erzeugte Feldstärke als Vektor in einem festen Punkte O des Raumes abgetragen. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Endpunkt des Vektors in ein Raumelement dS' fällt, sei dem Inhalte dieses Raumelements gleich, multipliziert mit dem Faktor $\Psi(l, \vartheta')$. Dabei hängt also Ψ von dem absoluten Werte l der Feldstärke ab, und dem Winkel ϑ', den ihre Richtung mit der Vorzugsrichtung bildet. Um $\Psi(l, \vartheta')$ zu finden, denken wir uns aus allen Verteilungen von Magnetonen über II und allen Axenrichtungen solche herausgegriffen, daß der nach dem Coulombschen Gesetze im Mittelpunkte von II erzeugte Kraftvektor, nach O übertragen, im vorgeschriebenen Volumelement endigt. Jedem Volumelement dS' entsprechen also Verteilungen der Magnetonenaxen in II, welche die dS' zugehörigen heißen mögen. Auf die Zahl solcher ausgezeichneter Verteilungen der Magnetonen über die Mittelzone ist nun zu achten. Dabei ist aber außerdem noch jede Kombination mit einem Wahrscheinlichkeitsfaktor multipliziert, indem für jedes Magneton die Verteilungsfunktion Φ als Faktor gesetzt wird mit demjenigen Argument, das der Richtung des

Digitized by Google

Magnetons in der ausgezeichneten Kombination entspricht. Zur Bildung von Ψ ist also die Kenntnis von Φ nötig; andrerseits läßt sich leicht erkennen, daß man Φ aus der Funktion Ψ ableiten kann (vgl. auch § 6). Durch Elimination von Φ wäre also Ψ zu gewinnen. Unsere Annahme gewährt aber den Vorteil, daß durch sie Ψ in einer von Φ unabhängigen Form gegeben wird.

Uebrigens läßt sie sich bis zu einem gewissen Grade durch folgende Ueberlegung wahrscheinlich machen.

Wissen wir, wie oft jede Richtung in der Mittelzone angenommen wird, so wollen wir sagen, wir kennen den Richtungszustand; wenn dagegen von jedem einzelnen individuellen Magneton gesagt wird, welche Richtung es besitzt, so mögen wir das die Angabe der Spezialorientierung nennen. Zu einem Richtungszustande gehört also eine große Anzahl von Spezialorientierungen, und zwar werden diejenigen Richtungszustände, in denen alle Richtungen nahezu gleich oft vorkommen — wir wollen sagen: die gleichmäßigen Richtungszustände — sehr viel mehr Spezialorientierungen besitzen, als die ungleichmäßigen, bei denen große Unterschiede in der Häufigkeit der Richtungen auftreten (vgl. die Permutationslehre und den Bernoullischen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung). Es ist also wohl erlaubt, nur diejenigen Spezialorientierungen zu betrachten, die zu gleichmäßigen Richtungszuständen gehören, falls die geometrische Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Spezialorientierung die ausgezeichnete Feldstärke ergibt, bei den gleichmäßigen von derselben Größenordnung ist wie bei den ungleichmäßigen.

Stellen wir uns nun eine ausgezeichnete gleichmäßige Spezialorientierung vor, d. h. eine solche, der ein Vektorenpunkt in einem ausgezeichneten Element dS_1' „zugehört“ (siehe vorige Seite). Ferner denken wir uns ein zweites Element dS_2', welches dasselbe l wie das erste, aber ein anderes ϑ' besitzt. Dann geht jede gleichmäßige Spezialorientierung, die zu dS_1' gehört, durch Drehung in eine dS_2' zugehörige über. Wegen der Gleichmäßigkeit der Spezialorientierungen ist aber das Produkt der Faktoren Φ in beiden Fällen gleich. Somit ist die Unabhängigkeit der Funktion $\Psi(l, \vartheta')$ von ϑ' tatsächlichwahrscheinlich gemacht. Diese Schlußweise setzt voraus, daß die Funktion Φ für kein Argument verschwindet. Da, wie wir später sehen werden, das nur bis zu einer gewissen Stelle der Magnetisierungskurve gilt, so bezieht sich unser Plausibilitätsbeweis auch nur auf diesen ersten Teil der Kurve.

Außerdem ist unsere Betrachtung in dieser Form keineswegs streng; eine ausführlichere analytische Verfolgung des angedeu-

Digitized by Google

teten Weges muß einer späteren Untersuchung vorbehalten werden. Selbst wenn diese unsere jetzigen Ueberlegungen sich nicht bestätigen sollten, so dürfte doch unsere Annahme den Wert einer einfachen und vorläufig orientierenden Annäherung beanspruchen. Eben darum lassen wir sie auch für die späteren Teile der Magnetisierungskurve gelten, wo unsere Schlußweise versagte. Uebrigens hat, wie in § 1 bereits erwähnt, Wilhelm Weber ganz dasselbe vorausgesetzt, ohne daß er seine Annahme plausibel gemacht hätte. Es läßt sich nicht entscheiden, ob er sich die Direktionskraft von den Nachbarmagnetonen herrührend dachte oder über ihre Herkunft weiter keine Vermutungen gehabt hat. Jedenfalls tritt die Kraft bei ihm auf Grund einer neuen physikalischen Voraussetzung auf, während ihr Vohandensein in Wahrheit die logische Folge der bereits aufgestellten Voraussetzungen ist, und nur deshalb eine neue Annahme gemacht werden muß, weil wir bisher nicht imstande sind, das mathematische Problem bis zu Ende durchzudenken.

Gänzlich unbegründet ist es aber, auf die Abhängigkeit der Funktion Ψ von l zu verzichten. Tatsächlich wird jedem Werte l der Feldstärke eine gewisse Wahrscheinlichkeit zukommen. Man könnte sogar fragen, ob nicht der häufigste Absolutwert der Feldstärke mit H variiere. Im Falle der Elektrostatik, wo ein Anwachsen von $\mathfrak{E}$ eine proportionale Dehnung aller Dipole hervorruft, wächst sicher der häufigste Absolutwert von ϵ_{II} proportional mit der makroskopischen Feldstärke. In der Magnetonentheorie, wo eine Aenderung von H nur Drehungen hervorruft, ist eine solche Proportionalität nicht zu erwarten, und das ist der einzige Grund, weshalb man in diesem Teile unserer Hypothese eine Annäherung an die Wirklichkeit erblicken könnte.

Um es also zusammenzufassen, legen wir dem Folgenden die Annahme zu Grunde:

Die absolute Größe der von II erzeugten Feldstärke ist stets gleich (unbegründete Annahme), und jede Richtung ist für sie gleich wahrscheinlich (wahrscheinlich gemachte Annahme).

§ 6. Die Grundgleichungen.

Die im vorigen Paragraphen gemachte Annahme gestattet die Berechnung der Verteilungsfunktion und der Magnetisierung.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\mathfrak{h}_{II}$, der von II erzeugte Anteil der Feldstärke, mit der Vorzugsrichtung einen Winkel

Digitized by Google

zwischen ϑ' und $\vartheta' + d\vartheta'$ bildet, setzen wir $\Psi(\vartheta')\,d\vartheta'$. Es ist also

151) $$\int_0^{\pi} \Psi(\vartheta')\,d\vartheta' = 1.$$

Da aber unserer Annahme zufolge jede Richtung gleich wahrscheinlich ist, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Richtung zwischen ϑ' und $\vartheta' + d\vartheta'$ liegt, proportional dem Verhältnis desjenigen Ringgebiets, das von all den Strahlen aus einer Kugel herausgeschnitten wird, die vom Zentrum unter den Winkeln ϑ' bis $\vartheta' + d\vartheta'$ gegen die Vorzugsrichtung auslaufen. Die Fläche dieses Ringes ist aber $2\pi \sin\vartheta' d\vartheta'$; also wird mit Berücksichtigung von 151)

152) $$\Psi(\vartheta') = \frac{\sin\vartheta'}{2}.$$

Wollen wir jetzt die Gesamtkraft $\mathfrak{h}$ erhalten, so müssen wir $\mathfrak{h}_{II}$ mit der in die Vorzugsrichtung fallenden Kraft K (Gleichung 150) vektoriell zusammensetzen. Der Winkel, den die so resultierende Kraft, und daher auch die Magnetonenaxe, mit der Vorzugsrichtung bildet, sollte ϑ heißen und $\Phi(\vartheta)\,d\vartheta$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ enthalten ist. Es ist also ϑ eine Funktion von ϑ', d. h. jedesmal, wenn $\mathfrak{h}_{II}$ mit der Vorzugsrichtung den Winkel ϑ' bildet, schließt $\mathfrak{h}$ mit ihr einen ϑ' zugehörigen Winkel ϑ ein. Daraus folgt aber

153) $$\Phi(\vartheta)\,|d\vartheta| = \Psi(\vartheta')\,|d\vartheta'|.$$

Wir haben ausdrücklich die absoluten Werte von $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ in Formel 153) gewählt, weil es vorkommen kann, daß ϑ abnimmt, wenn das zugehörige ϑ' wächst.

Da aber in 145) $d\vartheta$ positiv gewählt war, so können wir

154) $$M = nm \int_0^{\pi} \cos\vartheta\, \Psi(\vartheta')\,d\vartheta' = \frac{nm}{2} \int_0^{\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta'\, d\vartheta'$$

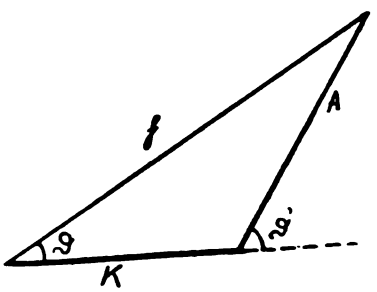


Fig. 1.

setzen. Nach Figur 1 ist nun

155) $$\mathfrak{h}^2 = K^2 + A^2 + 2AK\cos\vartheta'$$

oder

156) $$\mathfrak{h}\,.\,d\mathfrak{h} = -AK\sin\vartheta'\,d\vartheta'.$$

Ferner ist

157) $$A^2 = \mathfrak{h}^2 + K^2 - 2\mathfrak{h}K\cos\vartheta,$$

sodaß aus 154)

Digitized by Google

158) $$M = -\frac{nm}{2}\int \frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{2K^2 A}\, d\mathfrak{h}$$

wird. Hierbei ist die Integration für $K < A$ zu erstrecken von $A + K$ bis $A - K$ und für $K > A$ von $K + A$ bis $K - A$, und man erhält

159) für $K < A$ $$M = \frac{2nm}{3}\frac{K}{A}$$

160) für $K > A$ $$M = nm\left(1 - \frac{A^2}{3K^2}\right),$$

wo nach 150)

161) $$K = H + \frac{4\pi}{3} M$$

ist.

Wächst H über alle Grenzen, so wird nach 161) auch $K = \infty$ und nach 160)

162) $$M = nm = M_\infty$$

gleich einer Konstanten, der Sättigungsmagnetisierung.

Diese Beziehung ist natürlich auch unmittelbar physikalisch einleuchtend; war doch die Beobachtung, daß die Magnetisierung für große H asymptotisch konstant wird — das Phänomen der sogenannten Sättigung — gerade der Anlaß zur Aufstellung der Drehungstheorie.

Die Gleichungen 159) und 160) sind ganz analog denen von Wilh. Weber, nur daß an Stelle des Weberschen H bei uns K steht. Wir werden aber sehen, daß diese scheinbar geringfügige Modifikation einen fundamentalen Unterschied bedingt.

Um die erhaltenen Gleichungen 159) bis 161) zu diskutieren, benutzen wir am besten die Parameterform, in der diese Gleichungen gegeben sind, indem wir M und H als Funktionen des Parameters K auffassen.

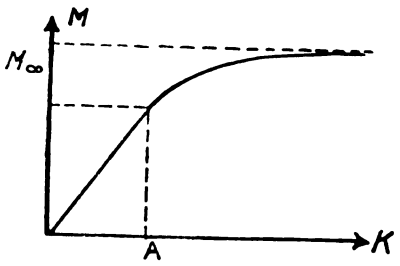


Fig. 2.

Im ersten Stadium $K < A$ ist $M = \frac{2}{3} M_\infty \frac{K}{A}$ eine lineare Funktion von K (vgl. Fig. 2) während M im zweiten Stadium $K > A$ nach 160)

160′) $$M = M_\infty\left(1 - \frac{A^2}{3K^2}\right)$$

dauernd wachsend sich asymptotisch dem Wert M_∞ nähert.

Digitized by Google

Für $K = A$ geben 159) und 160) dieselben Werte für M und $\frac{dM}{dK}$, d. h. an dieser Stelle ändert sich die Magnetisierung ohne Sprung, und ohne daß die Kurve einen Knick erleidet.

Um H als Funktion von K darzustellen, eliminieren wir M aus 161) mit Hülfe von 159) resp. 160). Es ergibt sich

163) für $K < A \quad H = K\left(1 - \frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A}\right)$

164) für $K > A \quad H = K - \frac{4\pi}{3} M_\infty \left(1 - \frac{A^2}{3K^2}\right)$.

Der Verlauf der H, K Kurve ist nun in seinem ganzen Typus davon abhängig, ob $1 - \frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A} \lesseqgtr 0$ ist.

1. Fall:

$$1 - \frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A} > 0$$

H ist nach 163) gleichzeitig mit K Null und wächst im ersten Stadium linear mit K an. Da im zweiten Stadium ($K > A$)

165) $$\frac{dH}{dK} = 1 - \frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty A^2}{K^3} = 1 - \frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A}\frac{A^3}{K^3}.$$

Dauernd positiv ist und mit K wächst, so wächst H mit K ins Unendliche, während die H, K Kurve immer steiler gegen die K Axe wird. Für $K = A$ erfährt nach 163), 164) und 165) die Kurve weder einen Sprung noch einen Knick (Fig. 3).

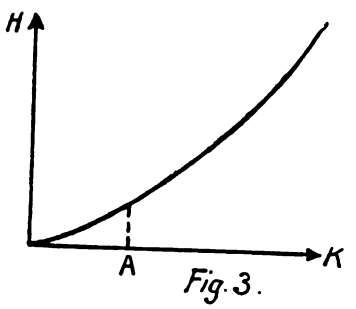


Fig. 3.

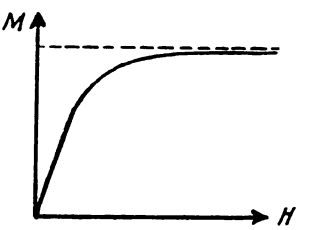


Fig. 4

Aus Fig. 2 und Fig. 3 läßt sich die H, M Kurve, die sogenannte Magnetisierungskurve, zusammensetzen (Fig. 4); sie hat in dem betrachteten Falle völlig den Typus der von Weber berechneten Kurve; ein dieser Kurve entsprechender Körper würde zwar Sättigung, aber keine Hysteresis zeigen.

Digitized by Google

2. Fall:

$$1-\frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A}<0.$$

Ist dagegen $1-\frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A}<0$, so wird H im ganzen ersten Stadium negativ; hieran schließt sich im zweiten Stadium nach 164) und 165) ein Kurvenzug an, der die stetige Fortsetzung des ersten Stadiums bildet. $\frac{dH}{dK}$ ist für $K = A$ negativ, wächst aber dauernd mit K, geht durch Null hindurch und nimmt schließlich für $K = \infty$ den Wert 1 an, während $\frac{d^2H}{dK^2}$ im zweiten Stadium dauernd positiv ist.

Das Minimum der H, K Kurve findet nach 165) für denjenigen Wert K statt, der der Gleichung

166) $$1-\frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A}\frac{A^3}{K^3}=0$$

genügt. Bezeichnen wir diesen Wert von K mit K_0, so ist

166') $$\frac{A}{K_0}=\sqrt[3]{\frac{9}{8\pi}\frac{A}{M_\infty}}.$$

Ist also die molekulare Feldstärke A klein gegen die Sättigungsmagnetisierung M_∞, so ist im betrachteten Punkte und umsomehr in allen folgenden, für die K noch größere Werte hat, A/K eine kleine Zahl.

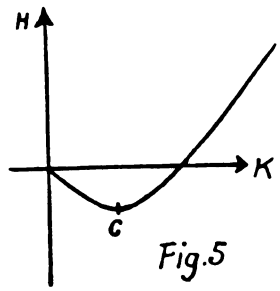


Fig. 5

Fig. 5 gibt somit ein Bild vom Verlauf der Kurve.

Durch Zusammensetzung von Fig. 2 und Fig. 5 entsteht die Magnetisierungskurve, die durch Fig. 6 dargestellt ist. Dem Punkte C der H, K Kurve in dem $\frac{dH}{dK}=0$ ist, entspricht, da $\frac{dM}{dK}$ immer von Null verschieden ist, ein Punkt C der M, H Kurve mit senkrechter Tangente.

Da aber aus Symmetriegründen

$$M(-H) = -M(H)$$

ist, so können wir die Kurve Fig. 6 vervollständigen und erhalten Fig. 7.

Digitized by Google

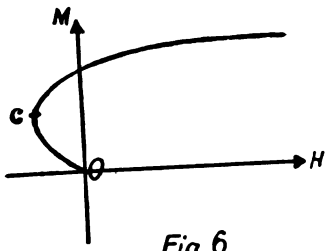


Fig. 6.

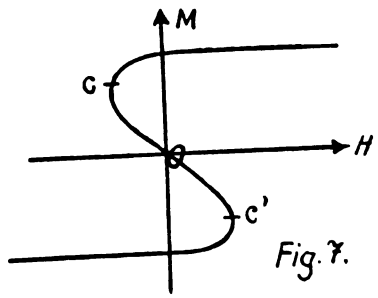


Fig. 7.

Zunächst scheint es, als ob weder die dem ersten Falle (Fig. 4) noch die dem zweiten Falle (Fig. 7) entsprechende Magnetisierungskurve Beziehungen zu beobachteten Erscheinungen an magnetischen Körpern habe. Besonders ist der Verlauf der Fig. 7 gänzlich ungewohnt, aber gerade dieser Fall setzt uns, wie wir sehen werden, in die Lage, die Erscheinungen des Ferromagnetismus darzustellen.

§ 7. Stabilität.

Die Kurven Fig 4 und Fig. 7 stellen zwar in jedem Punkte eine Gleichgewichtslage dar, doch es ist noch zu untersuchen, ob die ihnen entsprechenden Magnetonenkonstellationen in der Natur Bestand haben können, oder ob das Gleichgewicht etwa labil ist.

Untersuchen wir also, welchen Bedingungen eine Kombination M, H unterliegen muß, damit sich die sie hervorbringenden Magnetonen im stabilen Gleichgewicht befinden.

Dazu werden wir so verfahren. Wir denken uns die zu untersuchende Anordnung gestört, d. h. die Magnetonen mit wahrer Dichte festgehalten, die drehbaren Magnetonen ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage herausgedreht. Dadurch entstehen neue Feldstärken $\mathfrak{h}$, und es ist die Frage, ob unter ihrem Einfluß die Abweichung von der ursprünglich gegebenen Magnetonenanordnung das Bestreben hat, sich zu vergrößern oder zu verkleinern.

Dann müssen wir natürlich den Grundsatz fallen lassen, daß die Magnetonenachsen die Richtungen der Feldstärken $\mathfrak{h}$ besitzen; er gilt allerdigs für die Gleichgewichtslagen, die ja gerade mit seiner Hilfe bestimmt waren, nicht aber für die gestörten Anordnungen. Wir brauchen also zwei Verteilungsfunktionen und definieren diese so:

Zunächst legen wir eine Vorzugsrichtung fest. $\mathfrak{H}$ braucht jetzt nicht mehr notwendig $\mathfrak{M}$ und darum auch nicht mehr

Digitized by Google

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}$$

parallel zu sein. Gleichwohl werde durch diesen letzteren Vektor die Vorzugsrichtung gegeben.

Nun soll diese Vorzugsrichtung mit $n\Phi^* d\vartheta$ Magnetonenachsen einen zwischen den Grenzen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ enthaltenen Winkel bilden und soll an $n\Phi^{**} d\vartheta$ Mittelpunkten ebensolche Winkel mit der dort herrschenden Feldstärke $\mathfrak{h}$ [1]) einschließen. Also Φ^* ist die Verteilungsfunktion für die Axenrichtungen, Φ^{**} diejenige für die Feldstärken.

Zwischen beiden Funktionen bestehen gewisse Zusammenhänge, und die Aufgabe der bisherigen Untersuchung war es, auf diese gestützt, die Funktionalgleichung

167) $$\Phi^* = \Phi^{**}$$

zu lösen.

Nun ist es aber äußerst vorteilhaft, statt mit diesen Funktionen nur mit einzelnen Größen zu rechnen. Wir wollen das wirklich vorhandene Moment $\mathfrak{M}$ von jetzt ab mit $\mathfrak{M}^*$ bezeichnen. Für die in die Vorzugsrichtung fallende Komponente dieses Vektors, die M^* [2]) heißen möge, hat man

168) $$M^* = nm\int_0^\pi \Phi^*(\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta$$

(vgl. Gl. (145)). Analog setze man nun

169) $$M^{**} = nm\int_0^\pi \Phi^{**}(\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta$$

und bezeichne mit $\mathfrak{M}^{**}$ einen Vektor der Größe M^{**} in der Vorzugsrichtung. Denkt man sich überall in die Richtung von $\mathfrak{h}$ die Axe eines fingierten Magnetons gelegt, so erhält man eine Magnetisierung, die in die Vorzugsrichtung fällt [3]) und der Größe nach gleich M^{**} ist, d. h. gerade den Vektor $\mathfrak{M}^{**}$.

Also $\mathfrak{M}^*$ ist die wirklich vorhandene Magnetisierung, $\mathfrak{M}^{**}$ diejenige, die vorhanden wäre, wenn sich an Stelle jeden Magnetons ein fiktives befände, das die Richtung der dort tatsächlich vorhandenen Feldstärke besäße.

---

1) Gemeint ist natürlich die gesamte Feldstärke, nicht etwa der von II herrührende Teil $\mathfrak{h}_{II}$, dessen Verteilungsfunktion $\Psi = \frac{\sin\vartheta'}{2}$ 152) ist.

2) M^* ist also nicht identisch mit $|\mathfrak{M}^*|$.

3) Das folgt aus der Annahme S. 240.

Digitized by Google

Aus der Angabe der Magnetonenanordnung muß sich nun nach magnetostatischen Prinzipien die $\mathfrak{h}$-Verteilung ergeben: M^{**} muß Funktion von M^{*} sein.

Um diese Funktion zu bestimmen, bedenken wir, daß das K des § 6 (vgl. z. B. Fig. 1) die Kraft war, die von den Magnetonen des Raumes III ausgeübt wurde, und zwar berechnete sich K aus der Magnetisierung M an der inneren Oberfläche von III, d. h. aus der wirklichen Anordnung der Magnetonen an dieser Oberfläche, zu $K = H + \frac{4\pi}{3} M$.

Dieses K ist also jetzt zu ersetzen durch

$$170) \qquad K = \left| \mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{M}^{*} \right| .$$

Diesen Teil der Feldstärke setzten wir mit dem von II herrührenden Teile A zusammen und erhielten daraus $\mathfrak{h}$. In die Richtung der $\mathfrak{h}$ dachten wir uns die Magnetonenachsen eingestellt und berechneten aus dieser Magnetonenanordnung M. Das so gefundene M müssen wir aber jetzt sinngemäß mit M^{**} bezeichnen, und wir bekommen (vgl. 159) und 160))

$$171) \qquad \text{für } K < A \quad M^{**} = \frac{2nm}{3} \frac{K}{A}$$

$$172) \qquad \text{für } K > A \quad M^{**} = nm\left(1 - \frac{A^2}{3K^2}\right),$$

wo K jetzt durch 170) definiert ist.

Ist $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{M}^{*}$ parallel, so wird aus 171) und 172)

$$171') \qquad \text{für } K < A \quad M^{**} = \frac{2nm}{3} \frac{H + \frac{4\pi}{3} M^{*}}{A}$$

$$172') \qquad \text{für } K > A \quad M^{**} = nm\left(1 - \frac{A^2}{3\left(H + \frac{4\pi}{3} M^{*}\right)^2}\right),$$

und unsere bisherige Untersuchung hatte es, so können wir jetzt sagen, mit der Auffindung von Gleichgewichtslagen zu tun, d. h. mit der Lösung von

$$173) \qquad M^{**} = M^{*}.$$

Für unsere Zwecke brauchen wir aber die Gleichungen 171') und 172') nicht in ihrer vollen Allgemeinheit, sondern nur für den

Digitized by Google

besonderen Fall, daß die betrachteten M den durch 173) definierten Gleichgewichtsgrößen sehr nahe kommen. Andrerseits ist unsere Gleichung auch wieder nicht allgemein genug, um jede Störung zu beherrschen; nur solche können wir mit ihr behandeln, die regelmäßig genug sind, daß sich in jedem Punkt ein wohl definiertes, wenn auch von der Gleichgewichtsmagnetisierung abweichendes $\mathfrak{M}^*$ angeben läßt. In dieser Forderung liegt zwar eine Einschränkung, die aber nötig ist, um überhaupt mit mathematischen Mitteln das Problem angreifen zu können, und die das Ergebnis kaum wesentlich verfälschen dürfte.

Suchen wir diese Annahmen genauer zu formulieren. Es sei ein kleiner Raum P gegeben, der, so klein er ist, immer noch als groß gegen die Dimensionen der Kugel I + II (S. 233) angesehen werden kann. Gegen P sei wieder der P umfassende „Störungsraum" Q groß, aber so klein, daß in ihm die ungestörten Vektoren $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}^{**}$, nicht vom Orte abhängen. Jetzt werde ein Störungsvektor $\delta\mathfrak{M}^*$, im übrigen beliebig, so über Q verteilt, daß er an der Begrenzung von Q verschwindet, und daß er in P als nahezu konstant angesehen werden darf. Also die gestörten Vektoren $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}^{**}$ sind nicht mehr in Q, wohl aber in P räumlich konstante Größen.

Um die Aenderung $\delta\mathfrak{H}_P$ von $\mathfrak{H}$ in P zu erhalten, hat man, da die wahren Ladungen nicht variiert werden sollen, nach 146) und 147) die Gleichungen

174) $$\operatorname{div}\delta\mathfrak{H} = -4\pi \operatorname{div}\delta\mathfrak{M}^*$$

175) $$\operatorname{rot}\delta\mathfrak{H} = 0$$

zu lösen und danach $\delta\mathfrak{H}$ für den Raum P zu bilden. Man kann sich dabei auch an Stelle des Raumes Q mit einem Innenraum P einen Raum Q mit einem Punkte P denken. Hat man $\delta\mathfrak{H}_P$ gefunden, so ist $\delta\mathfrak{K}_P$ nach

176) $$\delta\mathfrak{K}_P = \delta\mathfrak{H}_P + \frac{4\pi}{3}\delta\mathfrak{M}^*_P$$

zu bestimmen.

Nun beschränken wir die Betrachtung auf einen wichtigen Sonderfall. Wir nehmen $\delta\mathfrak{M}^*$ so gegeben an, daß überall in Q

177) $$\operatorname{div}\delta\mathfrak{M}^* = 0$$

ist. Dann ist nach 174) und 175) auch überall

178) $$\delta\mathfrak{H} = 0,$$

unsere Spezialisierung bedeutet also, daß wir eine Störung hervorrufen, bei der $\mathfrak{H}$ ungeändert bleibt.

Digitized by Google

Wir betrachten unter diesen Umständen nun das Gebiet P, und haben es dort nur mit konstanten Vektoren, die nicht vom Orte abhängen, zu tun. Aus 176) und 178) folgt

$$179) \qquad \delta\mathfrak{K} = \frac{4\pi}{3}\,\delta\mathfrak{M}^*.$$

Das neue $\mathfrak{K}$ kann gegen das alte $\mathfrak{K}$ geneigt sein. δK bezeichne die Differenz ihrer absoluten Beträge, M^* die Komponente von $\mathfrak{M}^*$ in der Richtung des alten, oder was dasselbe ist (die Drehung ist sehr klein), in der des neuen $\mathfrak{K}$ und δM^* die Aenderung dieser Komponente (Fig. 8). Dann hat man nach 179)

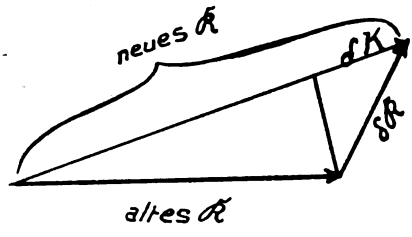


Fig. 8.

$$180) \qquad \delta K = \frac{4\pi}{3}\,\delta M^*.$$

An der Drehung von $\mathfrak{K}$ hat der Vektor $\mathfrak{M}^{**}$, der immer in die jeweilige Vorzugsrichtung fällt, teilgenommen. Außerdem hat sich wegen 178) und wegen 170), 171'), 172') auch der Betrag M^{**} verändert; wir wollen nun auf diese Aenderung δM^{**} achten.

Die Magnetonen werden das Bestreben haben, sich in die Richtung der $\mathfrak{h}$ einzustellen. Wir können uns also vorstellen, daß sehr bald ein δM^* auftritt, das dem früheren δM^{**} gleich ist. Wenn nun $|\delta M^{**}| < |\delta M^*|$ ist, so wird jedes spätere δM^* kleiner werden als das vorhergehende. Das System wird also in seine Ruhelage zurückkehren, es wird stabil sein. Dagegen wird, wenn δM^{**} und δM^* dasselbe Vorzeichen besitzen und $\delta M^{**} > \delta M^*$ ist, Labilität vorhanden sein. Den Fall $|\delta M^{**}| > |\delta M^*|$, wo beide Variationen verschiedene Vorzeichen besitzen, kann man nicht genau behandeln, ohne den Einstellungsmechanismus zu kennen. Das können wir aber vielleicht sagen, daß wir für diesen Fall eine Art Pendelschwingung um die Ruhelage erhalten, die infolge der dabei stattfindenden Ausstrahlung erlischt, sodaß der Fall wohl den stabilen zuzurechnen ist.

Wegen 178) hat man

$$181) \qquad \delta M^{**} = \frac{\partial M^{**}}{\partial M^*}\,\delta M^*,$$

wo man 171') resp. 172') bei konstantem H zu differentiieren hat.

Digitized by Google

Setzt man also

182) $$x = \frac{\partial M^{**}}{\partial M^{*}},$$

so lauten die Kriterien:

183)
$$\begin{aligned} |x| &< 1 \text{ Stabilität} \\ x &> +1 \text{ Labilität} \\ x &< -1 \text{ Stabilität} \end{aligned}$$

Da die zu betrachtenden Zustände nahe der Gleichgewichtskurve 173) liegen, so darf man nach der Differentiation $M^{**} = M^{*}$ setzen.

Suchen wir jetzt einen bequemen Ausdruck für x. Aus 180) und 182) folgt

184) $$x = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial M^{**}}{\partial K},$$

wo erst in 171) und 172) zu differentiieren und dann $M^{**} = M^{*}$ zu setzen ist. Schreitet man längs der Gleichgewichtskurve fort, so wird 159) resp. 160) dauernd erfüllt sein, und wegen der formalen Uebereinstimmung von 159) resp. 160) mit 171) resp. 172) wird

185) $$x = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial M}{\partial K}\right)_{\text{auf der Gleichgewichtskurve.}}$$

Aus dieser Gleichung und aus $dK = dH + \frac{4\pi}{3} dM$ (161) ergibt sich

186) $$\frac{dM}{dH} = \frac{3}{4\pi} \frac{x}{1-x}; \quad x = \frac{\frac{dM}{dH}}{\frac{3}{4\pi} + \frac{dM}{dH}}$$

und somit auf Grund von 183) der Satz:

Diejenigen Teile der M, H Kurve, in denen M mit H wächst, also $\frac{dM}{dH} > 0$ ist, entsprechen stabilen Zuständen.

Die weitere Diskussion soll mit Hülfe von 159) und 160) vorgenommen werden.

Aus 159) folgt, daß im ersten Stadium, d. h.

187a) für $K < A$ $$x = \frac{4\pi}{3} \frac{dM}{dK} = \frac{8\pi}{9} \frac{M_\infty}{A}$$

Digitized by Google

ist, während im zweiten Stadium (vgl. 160))

187b) $$K > A \quad x = \frac{4\pi}{3}\frac{dM}{dK} = \frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A}\frac{A^3}{K^3}$$

gilt.

Wir hatten in § 6 zwei Fälle diskutiert. Der erste Fall war durch $\frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A} < 1$ gekennzeichnet; in diesem Falle wird nach 187a) und 187b) x durchweg < 1, d. h. die ganze Fig. 4 repräsentiert gemäß 183) stabile Gleichgewichtslagen.

Im zweiten Fall, für den Fig. 6 maßgebend ist, gilt

$$\frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A} > 1;$$

demnach folgt aus 187) mit Berücksichtigung von 183), daß das ganze erste Stadium labil ist. Im zweiten Stadium nimmt x nach 187) stetig von $\frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A}$ bis Null ab, während K von A bis ∞ wächst, geht also durch den Wert 1 hindurch, und zwar nimmt x den Wert 1 an für denjenigen Wert K, der sich aus

$$\frac{8\pi}{9}\frac{M_\infty}{A}\frac{A^3}{K^3} = 1$$

ergibt; das ist aber nach 166) gerade der Punkt C der Fig. 6, in dem die Tangente an der M, H Kurve vertikal steht. Die Kurvenpunkte zwischen 0 und C repräsentieren also labiles, die jenseits C stabiles Gleichgewicht. Aus Symmetriegründen folgt, daß der Kurventeil $0C'$ in Fig. 7 auch labil ist.

Punktieren wir also die labilen Teile, die als Gleichgewichtslagen nicht in Betracht kommen können, so erhalten wir als M, H Kurve die beiden nicht zusammenhängenden Aeste CD und $C'D'$ der Fig. 9.

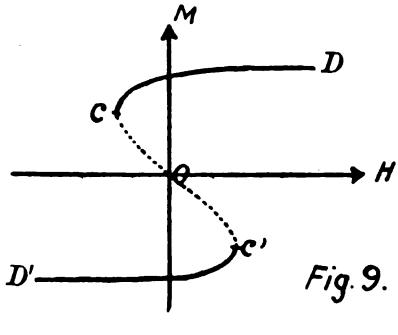


Fig. 9.

Wir haben die Stabilitätsuntersuchung nur für spezielle Variationen in der Lage der Magnetonen durchgeführt, nämlich nur für solche, die durch die Gleichung 178) charakterisiert sind. Die Kurventeile, die sich hierbei als labil herausstellten, werden a fortiori bei einer ganz allgemeinen Störung labil sein. Dagegen ist es zweifelhaft, ob die stabilen Aeste auch

Digitized by Google

stabil bleiben werden, wenn den Störungen gar keine Beschränkung mehr auferlegt wird. Hier hat also unsere Beweisführung eine Lücke, die noch der Ausfüllung bedarf.

In gewissem Sinne sind freilich alle diejenigen Teile der Kurve labil, bei denen H und M entgegengesetztes Vorzeichen haben, nämlich solchen molekularen Störungen gegenüber, die $\mathfrak{M}^*$ eine andere Richtung erteilen. Eine einfache wahrscheinlichkeitstheoretische Ueberlegung lehrt aber, daß solche Störungen außerordentlich unwahrscheinlich sind, viel unwahrscheinlicher jedenfalls, als solche, bei denen die Richtung erhalten bleibt, die Größe aber geändert wird. Letztere sind sogar a priori zu erwarten (vgl. den Entropiesatz der kinetischen Gastheorie).

Daß selbst, wenn solche Störungen nicht eintreten könnten, die durch ein angebbares $\delta\mathfrak{M}^*$ charakterisierbar sind (sodaß die ganze Kurve Fig. 9 stabile Zustände darstellte), es dennoch auf keine Weise möglich ist, CC' zu erreichen, lehrt der folgende Paragraph.

§ 8. Das Fortschreiten auf der Magnetisierungskurve.

Wir haben jetzt zwei getrennte Kurvenstücke als stabil übrig behalten (CD und $C'D'$), ohne etwas über den Zusammenhang zu wissen. Suchen wir, hierüber Aufschluß zu gewinnen, d. h. festzustellen, wie sich von H und M die eine Größe mitverändert, wenn man die andere in gegebener Weise langsam eine stetige Wertfolge durchlaufen läßt.

Zuerst wollen wir eine Anordnung treffen, bei der wir nach unserem Willen stetig H verändern können. Dazu bringen wir z. B. ein sehr stark abgeplattetes Rotationsellipsoid aus unserem ferromagnetischen Material in ein homogenes Feld H_0, dessen Richtung senkrecht zur Rotationsaxe des Ellipsoids weist. Da dann in ihm nahezu

$$H = H_0 \tag{188}$$

ist, kann man H durch äußere Eingriffe beliebig ändern. Beginnt man mit $H = H_0 = -\infty$ und läßt H wachsen, so bewegt sich zunächst der den Zustand darstellende Punkt von D' nach C' (Fig. 9). In C' angelangt, geben wir H eine kleine Aenderung dH[1]) und gelangen nach $\hat{C}'$ (Fig. 10). Denken wir uns nun einen

1) Diese aktuelle Aenderung ist wohl zu unterscheiden von den im vorigen Paragraphen besprochenen virtuellen Aenderungen δH.

Digitized by Google

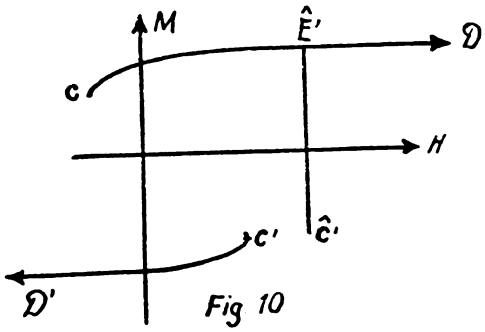


Fig 10

Augenblick die drehbaren Magnetonen festgehalten oder noch nicht nachgefolgt, so bleibt also M^* unverändert. Aus 170) und 172) folgt dann, daß M^{**} um $\frac{dM^{**}}{dK}\,dH$ von dem in diesem Punkte vorhandenen M^* verschieden ist. $\frac{dM^{**}}{dK}$ hat aber in C' nach 187) mit Berücksichtigung von 166) den Wert $\frac{3}{4\pi}$, $\frac{dM^{**}}{dK}\,dH$ ist also positiv. Ziehen wir durch $\hat{C}'$ eine Vertikale bis zum Schnitt $\hat{E}'$ mit CD (Fig. 10), so ist auf dieser ganzen Strecke $M^{**} > M^*$. Denn wäre einmal $M^{**} < M^*$, so müßte vorher $M^{**} = M^*$ werden, d. h. man müßte vorher einen Gleichgewichtszustand treffen. Solange nun $M^{**} > M^*$, wird M dauernd wachsen, d. h. der vertretende Punkt bewegt sich fortgesetzt nach oben, bis endlich in $\hat{E}'$ ein neues Gleichgewicht erreicht ist. Weil aber in der neuen Lage die Magnetonen kleinere Winkel mit der Vorzugsrichtung einschließen, können wir diesen Vorgang als Zusammenklappen bezeichnen und sagen:

Sobald die Feldstärke nur ein wenig über den kritischen Wert hinausgeht, klappt das Magnetonensystem in eine neue Gleichgewichtslage zusammen.

Man kann sich $\hat{C}'$ jetzt sehr nahe an C' gelegen vorstellen und findet dann, daß die Magnetisierungskurve von C' aus senkrecht emporsteigt, bis sie CD in E' trifft (Fig. 11). Wächst H weiter,

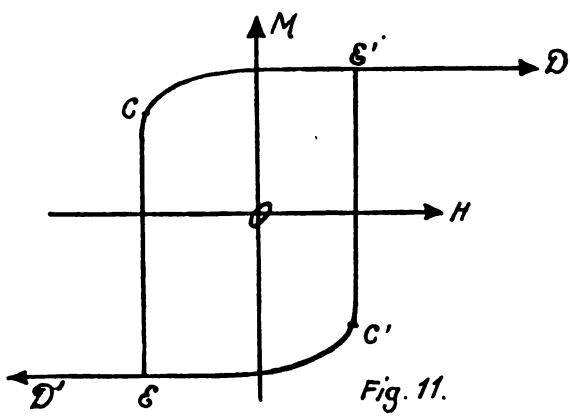


Fig. 11.

Digitized by Google

so wird man sich längs $E'D$ bewegen; nimmt H wiederum ab, so gelangt man bis nach C, ohne daß sich beim Ueberschreiten von E', das ja einen stabilen Zustand darstellt, irgend etwas besonderes ereignete. Die Kurve fällt dann von C aus senkrecht ab, was durch eine der eben angestellten ganz entsprechende Betrachtung zu zeigen ist, kommt nach E und bei weiterem Abnehmen von H nach D'. Wächst H wieder, so durchläuft der charakterisierende Punkt den Kurvenzug $D'EC'E'D$ u. s. f.

Die Magnetisierungskurve besteht also aus den beiden in Fig. 11 dargestellten Hysteresiszweigen.

Betrachten wir ferner ein sehr abgeplattetes ferromagnetisches Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe aber jetzt parallel dem äußeren Felde H_0 weist, so haben wir nahezu

189) $$B = H_0,$$

d. h. wir haben eine Einrichtung gewonnen, die Induktion willkürlich, so langsam wir wollen, zu verändern. Wir werden demnach gut tun, anstatt der M, H Kurve (Fig. 11) die B, H Kurve zu zeichnen (Fig. 12,).

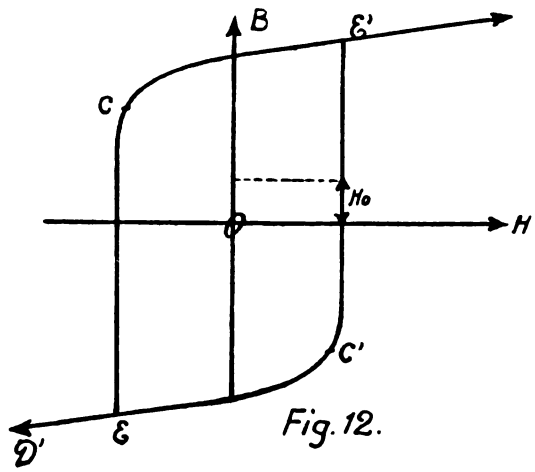


Fig. 12.

Man kann nun H_0 so wählen, daß die Wagerechte in der Höhe $B = H_0$ die Strecke $C'E'$ schneidet. Wie können sich unter diesen Umständen die Magnetonen im Gleichgewicht befinden? Das ist doch nur so möglich, daß jedes physikalisch unendlich kleine Volumelement des ganzen Körpers in Komplexe zerfällt, unter denen sich der ωte Teil in der „oberen" Phase E' befindet und der $(1-\omega)$te Teil in der „unteren" Phase C'. In diesen beiden Komplexarten wird die Feldstärke die gleiche sein (siehe das

Digitized by Google

Spätere), dagegen sind Magnetisierung und Induktion verschieden, und zwar in der oberen Phase B_s, M_s, in der unteren B_i, M_i. Man hat also

$$M = \omega M_s + (1-\omega) M_i \tag{190}$$

$$H = H_0 - 4\pi M = H_0 - 4\pi\omega M_s - 4\pi(1-\omega) M_i = H_0 - 4\pi M_i - 4\pi\omega (M_s - M_i), \tag{191}$$

da der Entmagnetisierungskoeffizient 4π ist.

Jetzt möge H_0 einen kleinen Zuwachs dH_0 erhalten, während die drehbaren Magnetonen aber für einen Augenblick festgehalten werden. Zur Bestimmung der neuen $\mathfrak{h}$ muß man die Poissonsche Gleichung lösen, deren rechte Seite ebenso lautet, wie vorher, wobei aber die Nebenbedingung für $\mathfrak{h}$ in großer Entfernung einen um einen konstanten Vektor vom Absolutwert dH_0 größeren Wert verlangt. Eine — und wegen der Eindeutigkeit die einzige Lösung — besteht darin, allen $\mathfrak{h}$ diesen Vektor zuzusetzen. Daraus folgt, so lange die drehbaren Magnetonen festgehalten werden, wächst in beiden Komplexgattungen H um dieselbe Größe dH_0. Um ebensoviel wächst, wie auch 191) zeigt, das Gesamt-H. Beide Komplexarten rücken also in Fig. 12 nach rechts; aber diejenigen der unteren Phase müssen nach den oben angestellten Betrachtungen einer nach dem andern zusammenklappen und nach E' überschlagen, wodurch ω wächst. Mit dem Wachsen von ω nimmt jedoch wegen 191) H wieder ab, um schließlich in seinen alten Wert zurückzukehren, und in diesem Augenblick wird das Umklappen zum Stillstand kommen. Der Erfolg des Zuwachses dH_0 besteht also in einer Vermehrung von ω bei konstantem H oder in einem Emporsteigen auf $C'E'$.

Wir hatten angenommen, daß wir uns bereits auf einem Punkte der Senkrechten $C'E'$ befinden. Dieselbe Betrachtung, angewandt auf den Fall $\omega = 0$, erklärt, wie man überhaupt auf die Senkrechte gelangt. Ganz entsprechendes gilt natürlich für CE, also sind die senkrechten Züge unserer Figur 12 oder 11 nicht nur mathematische Verbindungslinien, sondern gehören wesentlich mit zur Magnetisierungskurve.

Anders liegen die Dinge, wenn wir, auf einen Punkt von $C'E'$ gelangt, H wieder abnehmen lassen. Dann wird H in beiden Komplexarten abnehmen, und ihre Repräsentanten werden an $E'C$ bezw. $C'E$ herabgleiten, also sowohl M als auch H abnehmen, Mit anderen Worten: befindet man sich auf der senkrechten Geraden $C'E'$ der Magnetisierungskurve, so ist eine Verminderung von M mit einer Einbiegung nach links verbunden.

Digitized by Google

§ 9. Theorie der magnetischen Erscheinungen des Pyrrhotin.

Das von uns studierte ferromagnetische Medium, das isotrop aus rotierenden Molekülen aufgebaut ist, hat eine Magnetisierungskurve, die durch Fig. 11 dargestellt ist. Mit großer Annäherung können wir diese Kurve durch ein Rechteck (Fig. 13) ersetzen, und zwar, wenn A/M_∞ klein ist; denn dann ist nach 166') $\frac{A}{K}$ überall eine kleine Größe und folglich nach 160) M nirgends von M_∞ merklich verschieden. Die Abszissen, in denen die Kurve plötzlich senkrecht ansteigt resp. abfällt, mögen fortan mit $\pm h$, die Sättigungsmagnetisierungen mit $\pm m_\infty$ bezeichnet werden.

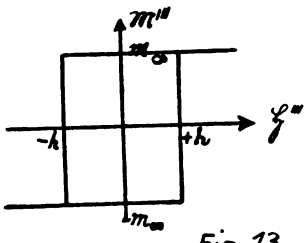


Fig. 13.

Die Feldstärke und Magnetisierung im Innern des Ferromagnetikums sollen wegen des späteren $\mathfrak{H}'''$ resp. $\mathfrak{M}'''$, und nicht mehr $\mathfrak{H}$ resp. $\mathfrak{M}$ genannt werden, da wir diese Bezeichnungen für andere Größen aufsparen wollen.

In diesem Medium — das ist für das folgende von Wichtigkeit — hat $\mathfrak{M}$ stets die Vorzugsrichtung, d. h. die Richtung von $\mathfrak{H}$.

Aus diesem Medium denken wir uns lauter kongruente dreiaxige Ellipsoide mit den Halbaxen a, b, c hergestellt. Wir wollen ein solches Ellipsoid einen Elementarkomplex nennen und annehmen, daß ein magnetischer Krystall aus solchen Elementarkomplexen aufgebaut ist, und zwar so, daß dieselben je nach der krystallinischen Struktur angeordnet sind.

Pyrrhotin z. B., dessen magnetische Eigenschaften durch die Symmetrieverhältnisse des rhombischen Systems darstellbar sind[1]), der also drei auf einander senkrechte zweiwertige Symmetrieaxen (x, y, z Axe) und drei durch je zwei derselben gehende Symmetrieebenen (yz, zx, xy Ebene) hat, können wir uns so aufgebaut denken, daß die Elementarkomplexe in den Punkten eines rhombischen Raumgitters liegen, d. h. in den Ecken rechtwinkliger Parallelepipede mit den Kanten g_x, g_y, g_z parallel den entsprechenden Symmetrieaxen, und zwar seien die Ellipsoide so orientiert, daß die a Axe parallel der x Axe, die b Axe parallel der y Axe und die c Axe parallel der z Axe gerichtet sind.

1) P. Weiß, Journ. de phys. (4) 4 1905 pag. 473.

Digitized by Google

Die Lineardimensionen (a, b, c) der Elementarkomplexe seien klein gegen den gegenseitigen Abstand (g_x, g_y, g_z) derselben, sodaß ein magnetisierter Elementarkomplex bezüglich der Wirkung auf seine Nachbarn als Dipol aufgefaßt werden kann.

Wir können zur Ermittelung des magnetischen Verhaltens eines solchen Krystalls, ganz analoge Betrachtungen wie in § 4 anstellen.

Zu dem Zweck konstruieren wir um einen Elementarkomplex als Zentrum zwei Kugeln, sodaß wir wieder drei Zonen erhalten, und denken uns zunächst den im Zentrum liegenden Komplex fortgenommen. Das von der Außenzone im Kugelmittelpunkt erzeugte Feld ist dann durch die Komponenten

$$192) \qquad \mathfrak{H}_x + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}_x;\ \mathfrak{H}_y + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}_y;\ \mathfrak{H}_z + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}_z$$

gegeben, wenn $\mathfrak{H}$ die im Krystall herrschende Feldstärke, $\mathfrak{M}$ die dadurch hervorgerufene Magnetisierung des Krystalls bedeutet.

Es möge jetzt das von der Mittelzone im Zentrum erzeugte Feld berechnet werden[1]).

Das von einem Dipol vom Momente $\mathfrak{m}$ hervorgerufene Potential hat den Wert[2]).

$$193) \qquad \Phi = -\frac{\mathfrak{m}_x(x'-x) + \mathfrak{m}_y(y'-y) + \mathfrak{m}_z(z'-z)}{r^3},$$

wenn x, y, z die Koordinaten des Aufpunktes, x', y', z' die des Ortes, an dem der Dipol sich befindet, bedeuten und

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$

ist.

Das von diesem Dipol im Aufpunkt hervorgerufene Feld $\mathfrak{H}' = -\operatorname{grad}\Phi$ hat demnach die Komponenten

$$194) \quad \begin{aligned}
\mathfrak{H}'_x &= -\frac{\mathfrak{m}_x}{r^3} + 3\,\frac{\mathfrak{m}_x(x'-x)^2}{r^5} + 3\,\frac{\mathfrak{m}_y(x'-x)(y'-y)}{r^5} + 3\,\frac{\mathfrak{m}_z(x'-x)(z'-z)}{r^5} \\
\mathfrak{H}'_y &= -\frac{\mathfrak{m}_y}{r^3} + 3\,\mathfrak{m}_x\frac{(y'-y)(x'-x)}{r^5} + 3\,\frac{\mathfrak{m}_y(y'-y^2)}{r^5} + 3\,\mathfrak{m}\,\frac{(y'-y)(z'-z)}{r^5} \\
\mathfrak{H}'_z &= -\frac{\mathfrak{m}_z}{r^3} + 3\,\mathfrak{m}_x\frac{(z'-z)(x'-x)}{r^5} + 3\,\mathfrak{m}_y\frac{(z'-z)(y'-y)}{r^5} + 3\,\mathfrak{m}_z\frac{(z'-z)^2}{r^5}
\end{aligned}$$

Summieren wir über sämtliche in der Mittelzone liegenden Dipole,

1) vgl. H. A. Lorentz, Arch. néerl. **25**. 1892.

2) siehe z. B. M. Abraham und A. Föppl. Theorie der Elektr. **1**., 3. Aufl. Leipzig 1907 pag. 66.

Digitized by Google

wählen wir das Zentrum zum Koordinatenursprung, setzen also $x = y = z = 0$ und berücksichtigen, daß infolge der Symmetrie der Anordnung

195) $$\sum y' z' = \sum z' x' = \sum x' y' = 0$$

ist, so nimmt 194) die Form an

196) $$\begin{aligned} \mathfrak{H}'_x &= 3\sum \frac{\mathfrak{m}_x x'^2}{r^5} - \sum \frac{\mathfrak{m}_x}{r^3} \\ \mathfrak{H}'_y &= 3\sum \frac{\mathfrak{m}_y y'^2}{r^5} - \sum \frac{\mathfrak{m}_y}{r^3} \\ \mathfrak{H}'_z &= 3\sum \frac{\mathfrak{m}_z z'^2}{r^5} - \sum \frac{\mathfrak{m}_z}{r^3} \end{aligned}$$

Da alle Elementarkomplexe der Mittelzone aus Symmetriegründen gleiche und gleichgerichtete Momente besitzen, so dürfen wir $\mathfrak{m}_x$ u. s. w. aus den Summenzeichen herausnehmen und schreiben

197) $$\mathfrak{H}'_x = \mathfrak{m}_x \sum \left(\frac{3x'^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \text{ u. s. w.}$$

Wäre die Anordnung cubisch, so wäre

$$\sum \frac{x'^2}{r^5} = \sum \frac{y'^2}{r^5} = \sum \frac{z'^2}{r^5} = \tfrac{1}{3} \sum \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{r^5} = \tfrac{1}{3} \sum \frac{1}{r^3},$$

und dann wäre $\mathfrak{H}' = 0$.

Bei der dem rhombischen System entsprechenden Anordnung werden die Faktoren von $\mathfrak{m}$ in 197) nicht verschwinden. Wir setzen demnach

198) $$\begin{aligned} \sum \left(\frac{3x'^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) &= s_x \\ \sum \left(\frac{3y'^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) &= s_y \\ \sum \left(\frac{3z'^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) &= s_z. \end{aligned}$$

s_x, s_y, s_z sind nicht unabhängig voneinander, sondern es gilt die die Beziehung

$$s_x + s_y + s_z = 0.$$

Befinden sich n Elementarkomplexe in der Volumeinheit, so ist die Magnetisierung des Krystalls

199) $$\mathfrak{M} = n\,\mathfrak{m},$$

sodaß 197) die Form

Digitized by Google

200) $$\mathfrak{H}'_x = \frac{s_x}{n}\mathfrak{M}_x;\ \mathfrak{H}'_y = \frac{s_y}{n}\mathfrak{M}_y;\ \mathfrak{H}'_z = \frac{s_z}{n}\mathfrak{M}_z$$

annimmt.

Sämtliche Dipole erzeugen also an der Stelle eines bestimmten fortgedachten Dipols eine erregende Kraft, die sich aus den Beiträgen der Zone III 192) und denen der Zone II 200) zusammensetzen. Diese erregende Kraft hat also die Komponenten

201) $$\mathfrak{H}''_x = \mathfrak{H}_x + \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{s_x}{n}\right)\mathfrak{M}_x;\ \mathfrak{H}''_y = \mathfrak{H}_y + \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{s_y}{n}\right)\mathfrak{M}_y;\ \mathfrak{H}''_z = \mathfrak{H}_z + \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{s_z}{n}\right)\mathfrak{M}_z$$

Bringen wir in dieses Feld $\mathfrak{H}''$ das fortgedachte Ellipsoid wieder hinein, so ist im Innern ein Feld $\mathfrak{H}'''$ mit den Komponenten

202) $$\mathfrak{H}'''_x = \mathfrak{H}''_x - P_x\frac{\mathfrak{m}_x}{V};\ \mathfrak{H}'''_y = \mathfrak{H}''_y - P_y\frac{\mathfrak{m}_y}{V};\ \mathfrak{H}'''_z = \mathfrak{H}''_z - P_z\frac{\mathfrak{m}_z}{V},$$

wo P_x, P_y, P_z die Entmagnetisierungskoeffizienten des Ellipsoids für Felder bedeuten, die der a-, resp. b-, resp. c-Axe parallel sind, und V das Volumen, also $\frac{\mathfrak{m}}{V}$ die Magnetisierung des Ellipsoids ist.

Mit Benutzung von 201) wird demnach aus den Gleichungen 202)

203) $$\begin{aligned}\mathfrak{H}'''_x &= \mathfrak{H}_x + N_1\mathfrak{M}_x\\ \mathfrak{H}'''_y &= \mathfrak{H}_y + N_2\mathfrak{M}_y\\ \mathfrak{H}'''_z &= \mathfrak{H}_z + N_3\mathfrak{M}_z,\end{aligned}$$

wo N_1 eine Abkürzung für

204) $$N_1 = \frac{4\pi}{3} + \frac{s_x}{n} - \frac{P_x}{nV}\ \text{u. s. w.}$$

bedeutet, also nur von der Form der Elementarkomplexe und von ihrer räumlichen Anordnung abhängt, und es sei $N_1 > N_2 > N_3$.

Im Innern des Ellipsoids müssen aber, wie wir eingangs dieses Paragraphen erwähnten, Feldstärke $\mathfrak{H}'''$ und Magnetisierung $\mathfrak{M}'''$ einander parallel sein; da aber $\mathfrak{M}''' = \frac{\mathfrak{M}}{nV}$ ist, so erhalten wir die Gleichungen

205) $$\frac{\mathfrak{H}'''_x}{\mathfrak{M}_x} = \frac{\mathfrak{H}'''_y}{\mathfrak{M}_y} = \frac{\mathfrak{H}'''_z}{\mathfrak{M}_z}$$

oder wegen 203)

Digitized by Google

$$206) \qquad \frac{\mathfrak{H}_x + N_1 \mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_x} = \frac{\mathfrak{H}_y + N_2 \mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}_y} = \frac{\mathfrak{H}_z + N_3 \mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}_z}.$$

Bevor wir diese Gleichung diskutieren, wollen wir noch die Magnetisierungskurve des Krystalls betrachten, die Feldern in der x Richtung entspricht, der Richtung der leichten Magnetisierbarkeit, in die, wie im nächsten Paragraphen gezeigt wird, sich die Richtung der Magnetisierung von selbst immer einstellt.

Nach Fig. 13 läßt sich das Verhalten eines Komplexes folgendermaßen aussprechen.

Nimmt $\mathfrak{H}'''$ von $+\infty$ aus ab, so bleibt die Magnetisierung im Komplex konstant gleich m_∞, bis $\mathfrak{H}'''$ den Wert $-h$ annimmt; dann ändert sich plötzlich die Magnetisierung und nimmt den Wert $-m_\infty$ an, der konstant bleibt, während $\mathfrak{H}'''$ von $-h$ bis $-\infty$ abnimmt, und auch noch, während es von $-\infty$ bis $+h$ wieder zunimmt.

Die Magnetisierung des Krystalls hat also entweder den Wert $+M_\infty = +nVm_\infty$ oder $-M_\infty = -nVm_\infty$, und das Coercitivfeld H_c des Krystalls, bei dem seine Magnetisierung plötzlich von $-M_\infty$ auf $+M_\infty$ springt, ergibt sich aus 203) zu

$$207) \qquad H_c = h + N_1 M_\infty = h + N_1 nVm_\infty.$$

Auch für den ganzen Krystall ist also die Magnetisierungskurve in Richtung der x Axe ein Rechteck, genau so, wie Weiß[1]) es am Pyrrhotin beobachtet hat.

Dreht man das Feld in der xy-Ebene, der sogenannten magnetischen Ebene aus der x-Axe heraus, so weicht auch die Magnetisierung von dieser Richtung ab, ohne ihre Größe zu ändern, denn jeder einzelne Komplex behält eine der Größe nach konstante Magnetisierung. Die Richtung der Magnetisierung bestimmt sich aus 206). Lassen wir $\mathfrak{H}$ konstant gleich H und mit der x Axe den Winkel α bilden, während $\mathfrak{M} = M$ mit dieser Richtung den Winkel φ bildet, so lautet 206)

$$208) \qquad H \sin(\alpha - \varphi) + M \sin\varphi \cos\varphi (N_2 - N_1) = 0.$$

Auch diese Beziehung ist durch die ausgezeichneten Weißschen Versuche[2]) experimentell gefunden worden. Weiß selbst hat seine Resultate bereits in die Form der Gleichung 206) gebracht, indem er seine Hypothese des molekularen Feldes aufge-

1) P. Weiß, Journ. de phys. (4) 4 pag. 469 et 829, 1905.
2) P. Weiß, l. c.

Digitized by Google

stellt hat[1]), die aussagt, daß zum wirklichen Feld noch ein Molekularfeld mit den Komponenten $N_1 \mathfrak{M}_x$, $N_2 \mathfrak{M}_y$, $N_3 \mathfrak{M}_z$ hinzukommt, und daß die Magnetisierung die Richtung des resultierenden Feldes annimmt.

Daß diese Ablenkungen der Magnetisierung aus der x Richtung reversibel sind, ergibt sich auch aus unserem Mechanismus, da sich im Innern des Komplexes bei den Drehungen von $\mathfrak{H}$ nur $\mathfrak{H}'''$ der Größe und Richtung nach verändert, ohne negative Werte anzunehmen, geschweige denn den Wert $-h$ zu erreichen.

Analog 208) gilt für die xz-Ebene

209) $$H \sin(\alpha - \varphi) + M \sin\varphi \cos\varphi (N_3 - N_1) = 0.$$

Da aber N_1 sehr groß gegen N_3 ist, so muß φ dauernd sehr klein bleiben, wir können also genähert setzen

210) $$H \sin\alpha = M \sin\varphi (N_1 - N_3)$$

oder

211) $$\frac{M_z}{H_z} = \frac{1}{N_1 - N_3}$$

d. h. in der z Richtung verhält sich der Krystall paramagnetisch.

Alle in diesem Paragraphen beschriebenen aus unserem Modell folgenden Eigenschaften eines ferromagnetischen Krystalls sind in genauer Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Weiß am Pyrrhotin.

Es ist selbstverständlich, daß die Magnetisierungskurve isotropen Eisens, in dem die Elementarkomplexe nicht so wohl geordnet sein werden, keineswegs so einfach sein wird, wie die des Pyrrhotin. Wenn man aber Eisen im Magnetfelde elektrolytisch niederschlägt, so erhält man nach Maurain[2]) eine Magnetisierungskurve für Felder, die die Richtung des bei der Elektrolyse wirkenden Feldes haben, wie sie in Fig. 14 dargestellt ist.

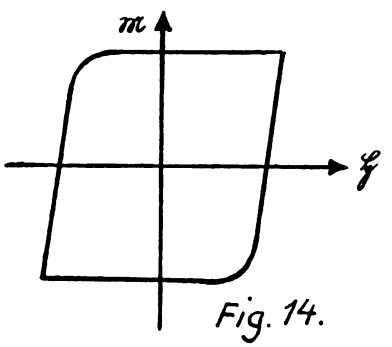


Fig. 14.

Bei dieser Herstellungsart des Eisens werden die Elementarkomplexe die Möglichkeit haben sich zu richten, und dann verhält sich das Eisen wie ein Pyrrhotin-Kry-

1) P. Weiß, Bull. des séances de la Soc. Franç. de Phys. 1907. Separatabdruck S. 10.

2) Ch. Maurain, Journ. de phys. (3) 10 pag. 123; 1901.

Digitized by Google

stall. Die Abweichungen der Magnetisierungskurve des elektrolytischen Eisens von der des Pyrrhotin werden, wie auch Weiß[1]) vermutet, gewissen Nebenumständen bei der Herstellung des Eisens zuzuschreiben sein.

§ 10. Die Energetik der Ferromagnetika.

Um die magnetische Energie und die Hysteresiswärme in einem von rotierenden Molekülen erfüllten Medium zu bestimmen, schlagen wir einen Weg ein, der sich eng an einen von H. A. Lorentz[2]) beschrittenen anschließt.

Wir wollen nämlich den Energieinhalt einer physikalisch unendlich kleinen Kugel vom Volumen v bestimmen und dann durch v dividieren. Dadurch erhalten wir die magnetische Energiedichte unseres Ferromagnetikums.

Das Feld, welches von Teilchen herrührt, die im Innern der Kugel sich befinden, wollen wir durch den Index i kennzeichnen zum Unterschied von dem Feld, das den äußeren Teilchen zugehört, und das den Index a bekommen soll.

Nun hatten wir in § 5 (Formel 150)) gesehen, daß die äußeren Moleküle im Innern der Kugel das Feld

$$\mathfrak{h}_a = \mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M} \tag{212}$$

erzeugen, sodaß ihr Beitrag zur Energiedichte

$$w_a = \frac{1}{v}\cdot\frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{h}_a^2\, dS = \frac{1}{8\pi}\left(\mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}\right)^2 \tag{213}$$

beträgt, da dieses von den äußeren Teilchen herrührende Feld im Innern der Kugel als homogen angesehen werden kann.

Dazu kommt zunächst noch die Dichte der wechselseitigen Energie der beiden Felder $\mathfrak{h}_i$ und $\mathfrak{h}_a$

$$w_{i,a} = \frac{1}{v}\frac{1}{4\pi}\int (\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_a)\, dS. \tag{214}$$

Da aber $\mathfrak{h}_a$ in v gleichförmig ist, können wir diese Größe aus dem Integralzeichen herausnehmen und durch 212) ersetzen, wodurch wir

---

1) P. Weiß, Joun. de phys. (4) **4**. 1905 pag. 846.

2) H. A. Lorentz, Elektronentheorie, Math. Enc. **5**. Art. 14 pag. 242.

Digitized by Google

215) $$\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{H}+\frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}\right)\int \mathfrak{h}_i\,dS$$

bekommen.

Wir bezeichnen in diesem Paragraphen mit $\mathfrak{h}$, was wir in § 2 $\mathfrak{h}'$ genannt haben, also den quellenfreien Feldvektor. Der Mittelwert von $\mathfrak{h}$ ist somit die Induktion $\mathfrak{B}$ und nicht die Feldstärke $\mathfrak{H}$, denn nach 28) ist

216) $$\frac{1}{v}\int \mathfrak{h}'\,dS = \frac{1}{v}\int \mathfrak{h}\,dS+\frac{4\pi}{v}\int \mathfrak{m}'\,dS.$$

Nach § 5 ist aber $\frac{1}{v}\int \mathfrak{h}\,dS = \mathfrak{H}$ und nach 105) und 143) ist $\frac{1}{v}\int \mathfrak{m}'\,dS = \mathfrak{M}$, sodaß nach 216)

217) $$\frac{1}{v}\int \mathfrak{h}'\,dS = \mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$$

wird.

Lassen wir den Strich an $\mathfrak{h}$ wieder fort, da jetzt kein Mißverständnis mehr entstehen kann, so erhalten wir

218) $$\frac{1}{v}\int \mathfrak{h}\,dS = \frac{1}{v}\int (\mathfrak{h}_i+\mathfrak{h}_a)\,dS = \mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{M},$$

also ergibt sich nach 218) und 212)

219) $$\frac{1}{v}\int \mathfrak{h}_i\,dS = \mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{M}-\frac{1}{v}\int \mathfrak{h}_a\,dS = \frac{8\pi}{3}\mathfrak{M}.$$

Durch die Substitution dieses Ausdrucks in 215) wird die Dichte der wechselseitigen Energie

220) $$w_{i,a} = \frac{1}{v}\frac{1}{4\pi}\int (\mathfrak{h}_i,\,\mathfrak{h}_a)\,dS = \tfrac{2}{3}\mathfrak{M}\left(\mathfrak{H}+\frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}\right).$$

Schließlich liefern noch die im Innern der Kugel befindlichen Teilchen einen Beitrag zum Energieinhalt der Kugel, insofern sie als allein im Raume befindlich angesehen werden können. Dieser Beitrag ist

221) $$w_i = \frac{1}{v}\frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{h}_i^2\,dS.$$

Das Integral bezieht sich hierbei auf den Innenraum der Kugel. Anstatt dessen können wir zuerst über den unendlichen Raum integrieren und nachträglich das Integral über den Außenraum der Kugel subtrahieren.

Die magnetische Energie der in der Kugel befindlichen p

Digitized by Google

Moleküle ist nun

$$w_i' = \frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{h}_i^2\,dS = \frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{h}_{i1}^2\,dS + \frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{h}_{i2}^2\,dS + \cdots \frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{h}_{ip}^2\,dS$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{h}_{i1}(\mathfrak{h}_{i2} + \mathfrak{h}_{i3} + \cdots + \mathfrak{h}_{ip})\,dS$$
222)
$$+ \frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{h}_{i2}(\mathfrak{h}_{i1} + \mathfrak{h}_{i3} + \cdots + \mathfrak{h}_{ip})\,dS$$
$$+ \cdots$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{h}_{ip}(\mathfrak{h}_{i1} + \mathfrak{h}_{i2} + \cdots + \mathfrak{h}_{i,p-1})\,dS.$$

Die erste Zeile von 222) ist die kinetische Energie der p rotierenden Teilchen, elektromagnetisch gedeutet. Die Integrale der folgenden Zeilen, oder vielmehr ihr Doppeltes, haben wir bereits in § 3 (Formel 108) und folgende) behandelt; denn in der zweiten Zeile z. B. bedeutet $\mathfrak{h}_{i1}$ das Feld, das von dem betrachteten rotierenden Molekül 1 selbst erzeugt wird, $\mathfrak{h}_{i2} + \mathfrak{h}_{i3} + \cdots + \mathfrak{h}_{ip}$ das Feld der übrigen $p-1$ in der Kugel befindlichen Moleküle am Orte des Moleküls 1. Nennen wir dieses Feld $\mathfrak{h}_1''$, so bekommen wir für die zweite Zeile nach 113)

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{h}_1'', \mathfrak{m}_1),$$

also für die zweite bis $p$te Zeile zusammen

223) $$\tfrac{1}{2}\sum(\mathfrak{h}'', \mathfrak{m}).$$

Die erste Zeile von 222) ist, wie gesagt die kinetische Energie $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_p$ der mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{g}$ um ihre Figurenaxe (z-Axe) rotierenden Moleküle, also z. B.

224) $$T_1 = \sum \tfrac{1}{2} m(x^2 + y^2)\,\mathfrak{g}_1^2 = mK\mathfrak{g}_1^2.$$

Nach 84) ist aber mit hinreichender Genauigkeit

225) $$\mathfrak{g}_1^2 = \mathfrak{g}_{01}^2 - \frac{e}{mc}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}_{01}),$$

denn wir hatten angenommen, daß $\mathfrak{g}_0$ so groß ist, daß das in 84) neben $\mathfrak{g}_0$ auftretende Glied immer sehr klein bleibt; in 225) haben wir das Quadrat dieses sehr kleinen Gliedes vernachlässigt, das Glied erster Ordnung haben wir aber beibehalten, da, wie wir sehen werden, der daraus hervorgehende Term mit den übrigen vergleichbar ist. Ferner geht aus 84) hervor, daß $\mathfrak{h}_1$ in 225) das gesamte fremde Feld bedeutet, in dem sich das Molekül 1 befindet.

Digitized by Google

Somit schreibt sich 224)

$$T_1 = mK\mathfrak{g}_{01}^2 - \frac{eK}{c}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}_{01})$$

oder mit Berücksichtigung von 117)

$$T_1 = mK\mathfrak{g}_{01}^2 - (\mathfrak{m}_{01}, \mathfrak{h}_1)$$

und

226) $$T = \sum mK\mathfrak{g}_0^2 - \sum (\mathfrak{m}_0, \mathfrak{h}).$$

Nach 213), 220), 223) und 226) wäre also die Energiedichte in der Kugel

227) $$w' = \frac{1}{8\pi}\left(\mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\mathfrak{M}\left(\mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}\right) + \tfrac{1}{2}\sum (m, \mathfrak{h}'') - \sum (\mathfrak{m}_0 \mathfrak{h}) + \sum mK\mathfrak{g}_0^2,$$

wenn nicht 223) und 226) die gesamte, im unendlichen Raume befindliche Energie der in der Kugel gelegenen Teilchen darstellen würde. (Hierbei beziehen sich die Summenzeichen auf die in der Volumeinheit befindlichen Teilchen). Wir müssen also die von diesen inneren Teilchen herrührenden Energieanteile w'', soweit sie außerhalb der Kugel lokalisiert sind, von w' abziehen; dabei dürfen wir aber die Kugel als gleichförmig mit der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ magnetisiert ansehen.

Es ergibt sich

228) $$w'' = \frac{4\pi}{9}\mathfrak{M}^2,$$

wie wir folgendermaßen einsehen können.

Nennen wir das von der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ erzeugte Feld im ganzen Raume für den Augenblick $\mathfrak{H}$, so ist die gesamte Energie des unendlichen Raumes, in dem die Kugel sich befindet,

$$\frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{H}^2\, dS.$$

Da aber $\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\varphi$ ist, so ist auch

$$\frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{H}^2\, dS = -\frac{1}{8\pi}\int_\infty (\mathfrak{H}, \operatorname{grad}\varphi)\, dS,$$

oder durch partielle Integration

$$\frac{1}{8\pi}\int_\infty \varphi \operatorname{div}\mathfrak{H}\, .\, dS,$$

und nach § 5 $-\frac{1}{2}\int_\infty \varphi \operatorname{div}\mathfrak{M} dS$ und schließlich nach abermaliger

Digitized by Google

partieller Integration

$$\tfrac{1}{2}\int_\infty (\operatorname{grad}\varphi, \mathfrak{M})\,dS = -\tfrac{1}{2}\int_\infty (\mathfrak{H}, \mathfrak{M})\,dS.$$

Die Integration des letzten Ausdrucks braucht nur über das Innere der Kugel erstreckt zu werden, da außerhalb derselben $\mathfrak{M} = 0$ ist. Von dieser Energie ist $\frac{1}{8\pi}\int_v \mathfrak{H}^2\,dS$ abzuziehen, da es uns ja auf die Energie des Außenraums ankommt, die somit den Wert $-\frac{1}{8\pi}\int_v \mathfrak{H}(\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{M})\,dS$ annimmt. Das Feld $\mathfrak{H}$ im Innern der Kugel drückt sich durch die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ derselben durch die Beziehung

$$\mathfrak{H} = -P\mathfrak{M}$$

aus, wenn $P = 4\pi/3$ den Entmagnetisierungskoeffizienten der Kugel bedeutet [1]). Durch Substitution dieses Wertes von $\mathfrak{H}$ findet man $\frac{4\pi}{9}\mathfrak{M}^2 v$, es ist also, wie in 228) behauptet, $w'' = \frac{4\pi}{9}\mathfrak{M}^2$ von w' abzuziehen, und man erhält

$$w = w' - w'' = \frac{1}{8\pi}\left(\mathfrak{H}+\frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\mathfrak{M}\left(\mathfrak{H}+\frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}\right) - \frac{4\pi}{9}\mathfrak{M}^2$$

229) $$+\tfrac{1}{2}\sum(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}'') - \sum(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{h}) + \sum mKg_0^2.$$

Nun ist das Gesamtfeld $\mathfrak{h}$ am Orte eines Moleküls

230) $$\mathfrak{h} = \mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M} + \mathfrak{h}''.$$

Durch diese Formel können wir $\mathfrak{h}''$ aus 229) eliminieren. Berücksichtigen wir noch, daß $\sum\mathfrak{m} = \mathfrak{M}$ ist, so finden wir

231) $$w = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}, \mathfrak{M}) + \tfrac{1}{2}\sum(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) - \sum(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{h}) + \sum mKg_0^2.$$

Da aber sehr genähert $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$ und $\sum mKg_0^2$ eine Konstante ist, so dürfen wir anstatt 231) auch schreiben

232) $$w = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}, \mathfrak{M}) - \tfrac{1}{2}\sum(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) + \text{Konst.}$$

Es erübrigt noch, $\frac{1}{2}\sum(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$ zu berechnen. Da $\mathfrak{m}$ stets die Richtung des Gesamtfeldes $\mathfrak{h}$ der anderen Moleküle hat, so ist

---

1) vgl. z. B. R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. Leipzig und Berlin 1908 pag. 44.

Digitized by Google

$$\sum(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = |\mathfrak{m}| \sum |\mathfrak{h}|,$$

oder wenn wir die in § 6 bestimmte Verteilungsfunktion einführen,

$$233)\quad \sum(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = nm \int_0^{\pi} |\mathfrak{h}| \frac{\sin \vartheta'}{2} d\vartheta' = \frac{M_\infty}{2} \int_0^{\pi} |\mathfrak{h}| \sin \vartheta' d\vartheta'.$$

Nun ist aber nach 155)

$$\mathfrak{h}^2 = K^2 + A^2 + 2AK \cos \vartheta',$$

sodaß, wenn wir noch $\cos \vartheta' = x$ setzen,

$$234)\quad \sum(m, \mathfrak{h}) = \frac{M_\infty}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{K^2 + A^2 + 2AKx}\, dx$$

wird. Die Ausführung der Quadratur ergibt

$$\sum(m, \mathfrak{h}) = \frac{M_\infty}{3K}(3K^2 + A^2),$$

also

$$235)\quad w = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}, \mathfrak{M}) - \frac{M_\infty}{6K}(3K^2 + A^2) + \text{Konst.}$$

Ist die Magnetisierungskurve genähert durch ein Rechteck zu ersetzen, d. h. A/K sehr klein, so ist

$$235')\quad w = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}, \mathfrak{M}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}, \mathfrak{K}) = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 - \frac{2\pi}{3} \mathfrak{M}^2,$$

da $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{M}$ ist.

235') läßt sich in eine noch etwas andere Form bringen. Wir hatten oben gesehen, daß

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2\, dS = -\tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{H}, \mathfrak{M})\, dS$$

ist, somit können wir die ersten beiden Glieder in 235') gegen einander streichen und erhalten

$$235'')\quad w = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}, \mathfrak{K}).$$

Bei einer unendlich kleinen Aenderung von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}$ ändert sich die Energiedichte nach 235) um

$$dw = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}, d\mathfrak{H}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}, d\mathfrak{M}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}, d\mathfrak{H}) - \frac{M_\infty}{2}\left(1 - \frac{A^2}{3K^2}\right) dK.$$

Mit Berücksichtigung von 160) schreibt sich diese Formel

Digitized by Google

aber einfach

$$236) \quad dw = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}, d\mathfrak{H}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}, d\mathfrak{M}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}, d\mathfrak{H}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}, d\mathfrak{R}).$$

Substituieren wir $\mathfrak{R} = \mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}$, so erhalten wir

$$dw = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}, d\mathfrak{H}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}, d\mathfrak{M}) - \frac{2\pi}{3}(\mathfrak{M}, d\mathfrak{M})$$

oder, wenn wir $\frac{1}{2}(\mathfrak{H}, d\mathfrak{M})$ addieren und subtrahieren,

$$237) \quad dw = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}, d\mathfrak{H}) + (\mathfrak{H}, d\mathfrak{M}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{R}, d\mathfrak{M}).$$

Andrerseits folgt aber aus den Maxwellschen Gleichungen, daß die in der Volumeinheit entwickelte Hysteresiswärme dq mit dem Zuwachs der Energievermehrung dw in der Beziehung steht[1])

$$238) \quad dw + dq = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}, d\mathfrak{H}) + (\mathfrak{H}, d\mathfrak{M}),$$

sodaß durch Subtraktion der Gleichung 237) von 238) sich

$$239) \quad dq = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{R}, d\mathfrak{M})$$

ergibt.

Während nach dem Warburgschen Gesetze[2]) die Hysteresiswärme im allgemeinen nur für vollkommene Cyklen angegeben werden kann, setzt uns die Kenntnis des Mechanismus der Magnetisierung in den Stand, die bei jeder beliebigen Aenderung der Magnetisierung in unserem Ferromagnetikum frei werdende Wärmemenge nach 239) zu berechnen.

Die Formel 239) wollen wir jetzt auf die Magnetisierungskurve unseres Ferromagnetikums anwenden, und zwar möge zunächst die Wärme bestimmt werden, die abgegeben wird, wenn wir uns von E nach C' (Fig. 11) bewegen. Der Zuwachs, den $\mathfrak{M}$ auf diesem Wege erfährt, ist sehr gering, und insofern die Kurve genähert durch ein Rechteck ersetzt werden kann, ändert sich $\mathfrak{M}$ auf diesem Wege überhaupt nicht, also ist nach 239)

$$\int_E^{C'} dq = 0.$$

1) vgl. z. B. M. Abraham und A. Föppl, Theorie d. Elektr. 1 3. Aufl. Leipzig 1907, pag. 380.

2) E. Warburg, Ann. Phys. Chem. (3) 13 1881. p. 141.

Digitized by Google

Dasselbe gilt für das Integral über den Weg $E'C$. Da aber das Integral um das ganze Rechteck herum gleich dem Inhalt des Rechtecks $4hm_\infty$ (Fig. 13) sein muß[1]), und die Wärmeentwicklung auf dem Wege $C'E'$ aus Symmetriegründen gleich der auf dem Wege CE ist, so ergibt sich

$$240) \qquad \int_{C'}^{E'} dq = \int_{C}^{E} dq = 2hm_\infty.$$

Natürlich wäre es ein leichtes, auch mit Berücksichtigung der Abweichung der Hysteresisschleife von der Rechteckform die Energieumsetzungen zu berechnen.

Um die Energie der Volumeinheit des Krystalls zu finden, nennen wir das Feld, welches die Magnetisierung $\mathfrak{M}'''$ der Elementarkomplexe erzeugt, $\mathfrak{H}'''$ und bilden $\frac{1}{8\pi}\int_\infty \mathfrak{H}'''^2\, dS$. Wie wir oben gesehen haben, läßt sich dies Integral durch partielle Integration auf die Form $-\frac{1}{2}\int(\mathfrak{H}''', \mathfrak{M}''')\, dS$ bringen, wobei dies Integral nur über das Volumen der Elementarkomplexe erstreckt zu werden braucht.

Ziehen wir hiervon das gleichfalls über das Volumen der Ellipsoide erstreckte Integral $\frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}'''^2\, dS$ ab, so bleibt

$$W_a = -\tfrac{1}{2}\int(\mathfrak{H}''', \mathfrak{M}''')\, dS - \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}'''^2\, dS$$

als außerhalb der Ellipsoide lokalisierte magnetische Energie übrig.

Die im Innern der Ellipsoide befindliche Energie W_i erhalten wir aus 235'), wenn wir $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{H}'''$ und $\mathfrak{M}'''$ ersetzen, also

$$242) \qquad W_i = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}'''^2\, dS - \frac{2\pi}{3}\int \mathfrak{M}'''^2\, dS,$$

sodaß die Gesamtenergie

$$243) \quad W = W_i + W_a = -\tfrac{1}{2}\int(\mathfrak{H}''', \mathfrak{M}''')\, dS - \frac{2\pi}{3}\int \mathfrak{M}'''^2 dS$$

wird. Daraus folgt für die Energiedichte des Krystalls, wenn wir berücksichtigen, daß n Elementarkomplexe, jedes vom Volumen V, sich in der Volumeinheit befinden, und daß $\mathfrak{M} = nV\mathfrak{M}'''$ ist,

1) vgl. E. Warburg, l. c.

Digitized by Google

244) $$w = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}, \mathfrak{H}''') - \frac{2\pi}{3}\frac{\mathfrak{M}^2}{nV}.$$

Da aber die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ der Größe nach immer konstant bleibt, so ergibt sich aus 244) und 203)

245) $$w = -\tfrac{1}{2}\{\mathfrak{M}_x(\mathfrak{H}_x + N_1\mathfrak{M}_x) + \mathfrak{M}_y(\mathfrak{H}_y + N_2\mathfrak{M}_y) + \mathfrak{M}_z(\mathfrak{H}_z + N_3\mathfrak{M}_z)\} - \text{Konst.}$$

Aus 245) folgt, daß sich die Magnetisierung, wenn kein äußeres Feld wirkt, immer in die Richtung der x-Axe einstellt, wodurch die Bezeichnung „Richtung der leichten Magnetisierbarkeit" gerechtfertigt erscheint.

Hat nämlich der Krystall z. B. die Form einer Kugel, sodaß sein Entmagnetisierungskoeffizient in allen Richtungen $p = \frac{4\pi}{3}$ ist, so wird

$$\mathfrak{H} = -p\mathfrak{M},$$

also

246) $$w = -\tfrac{1}{2}\{\mathfrak{M}_x^2(N_1 - p) + \mathfrak{M}_y^2(N_2 - p) + \mathfrak{M}_z^2(N_3 - p)\},$$

wobei

$$\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}^2$$

einen gegebenen Wert hat. Da $N_1 > N_2 > N_3$ ist, so hat die Energie ihren kleinsten Wert, wenn $\mathfrak{M} \parallel x$ ist; das ist also die Richtung der stabilen Magnetisierung.

Zusammenfassung: In der vorliegenden Untersuchung hat es sich gezeigt, daß die rotierenden elektrisch geladenen Moleküle, die den Ferromagnetismus erzeugen, Rotationskörper sein müssen. Die Rotationsaxe ist im stationären Zustand stets die Figurenaxe des Moleküls, da die Rotationen um eine andere Axe infolge der hierbei stattfindenden Ausstrahlung gedämpft sind und somit allmählich erlöschen. Ist die Rotation sehr schnell, so bleibt das magnetische Moment eines rotierenden Moleküls genähert konstant, und die magnetische Axe stellt sich in die Richtung der Feldstärke ein.

Ein aus solchen Molekülen isotrop zusammengesetzter Körper hat eine Magnetisierungskurve, die genähert ein Rechteck ist.

Denkt man sich den Pyrrhotin oder im Magnetfelde niedergeschlagenes Eisen aus Elementarkomplexen eines solchen Mediums aufgebaut, so erhält man die magnetischen Eigenschaften, die Weiß und Maurain an diesen Stoffen beobachtet haben.

Die Aufgabe einer weiteren Arbeit soll es sein, das magnetische Verhalten von Eisen und Stahl darzustellen.

Digitized by Google

Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß die §§ 4, 5, 7, 8 dieser Abhandlung von mir gemeinsam mit Herrn P. Hertz in Heidelberg während seines Aufenthalts in Tübingen im Sommer 1907 und im folgenden Jahre ausgearbeitet worden sind. Sie sind also unser gemeinsames geistiges Eigentum, und wir beide tragen die Verantwortung für ihren Inhalt. Aus äußeren Gründen wurde Hr. Hertz veranlaßt, seine Mitarbeiterschaft an dem Problem aufzugeben.

Tübingen, Physikal. Institut, 22. Mai 1910.

Digitized by Google

Konvexe Curven.

Von

J. K. Whittemore.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 26. Februar 1910.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Einleitung.

§ 2. Definitionen. Kreis und Dreieck.

I. Jeder Kreis ist eine konvexe Curve (p. 4).

II. Jedes Dreieck ist eine konvexe Curve (p. 4).

§ 3. Allgemeine Eigenschaften konvexer Curven.

III. Eine Strecke, deren Endpunkte innere Punkte sind, enthält nur innere Punkte (p. 6).

IV. Eine Strecke, deren Endpunkte ein innerer Punkt und ein Randpunkt sind, enthält nur innere Punkte (p. 6).

V. Eine Strecke, deren Endpunkte ein innerer und ein äußerer Punkt sind, enthält einen und nur einen Randpunkt (p. 7).

VI. Eine Strecke, deren Endpunkte Randpunkte sind, enthält keinen äußeren Punkt (p. 7).

VII. Wenn C ein Randpunkt ist, so gibt es sowohl äußere, als innere Punkte, die ihm beliebig nahe kommen. Umkehrung (p. 7).

VIII. Wenn eine Gerade g keinen, einen oder unendlich viel Randpunkte enthält, so liegen alle sonstigen Punkte von Γ auf einer Seite von g (p. 8).

IX. Enthält g unendlich viel Randpunkte, so schneidet jede durch einen dieser Punkte gehende von g verschiedene Gerade die Curve Γ wenn Randpunkte auf g auf beiden Seiten des Punktes liegen. (p. 8).

X. Eine Gerade, die Γ schneidet, trennt Γ in zwei auf verschiedenen Seiten von g liegende konvexe Curven (p. 8).

XI. Haben zwei konvexe Curven einen inneren Punkt gemein, so haben sie ∞ viel innere Punkte gemein. Die Gesamtheit dieser Punkte sind wieder die inneren Punkte einer konvexen Curve (p. 9).

XII. Wenn Γ und eine Grade 3 Punkte gemein haben, so haben sie eine Strecke der Geraden gemein (p. 10).

Digitized by Google

§ 4. Tangenten einer konvexen Curve.
XIII. In jedem Punkte einer konvexen Curve gibt es zwei Halbtangenten, die zusammenfallen können (p. 12).
XIV. Jede konvexe Curve liegt ganz im Endlichen (p. 14).
XV. Es gibt zwei und nur zwei Tangenten, die einer gegebenen Richtung parallel sind (p. 14).
XVI. Zwei und nur Tangenten einer konvexen Curve gehen durch jeden äußeren Punkt (p. 15).
§ 5. Stetigkeit.
XVII. Jede konvexe Curve ist in jedem Punkte stetig (p. 17).
§ 6. Konvexe Polygone.
XVIII. Wesen konvexer Polygone (p. 19).
XIX. Jedes Parallelogramm ist eine konvexe Curve (p. 20).
§ 7. Länge und Inhalt.
XX. Jede konvexe Curve kann in 4 oder weniger als 4 angrenzende Konvexsectoren zerlegt werden (p. 21).
XXI. Jede konvexe Curve hat eine Länge (p. 24).
XXII. Jede konvexe Curve hat einen Inhalt (p. 25).
§ 8. Schluß.
XXIII. Projektion konvexer Curven ganz im Endlichen liefert wieder konvexe Curven (p. 28).

§ 1. Einleitung.

D. Hilbert hat in den „Grundlagen der Geometrie[1])“ gewisse Axiome der Geometrie aufgestellt, und aus diesen die Hauptsätze der elementaren Geometrie entwickelt. Es sollen hier diese Sätze auf Grund einer neuen Definition dazu angewandt werden, eine strenge Theorie der konvexen Curven und Polygone in der Euklidischen Ebene aufzubauen. Die vorliegende Entwicklung ist vor allen Dingen auf die Sätze der Anordnung und auf die Idee von „zwischen“ gegründet[2]). Von großer Wichtigkeit darin sind der in § 4 der „Grundlagen“ bewiesene Satz 5, die in § 15 besprochene Streckenrechnung unter Annahme des „Vollständigkeitsaxiomes[3])“, eine Winkelrechnung für Winkel, die kleiner als zwei Rechte sind mit dem entsprechenden Vollständigkeitsaxiom und das Euklidische Parallelenaxiom. Wir heben besonders hervor, daß die Punkte einer Strecke AB die Punkte zwischen den Endpunkten A und B bedeuten: die Länge der Strecke, auch Abstand der Endpunkte genannt, wird durch $\overline{AB}$ bezeichnet. Aus den in den „Grundlagen“ bewiesenen Sätzen geht der für uns in den Be-

1) Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen. Leipzig, B. G. Teubner, 1899.

2) a. a. O. § 3.

3) Dieses Axiom wird von Herrn Professor Hilbert erst in der französischen Uebersetzung der „Grundlagen“ besprochen.

Digitized by Google

trachtungen über Stetigkeit, Curvenlänge und Curveninhalt sehr bedeutende Sinussatz für das Dreieck ABC leicht hervor:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}.$$

Es mag auch erwähnt werden, daß das Parallelenaxiom, obwohl es oft angewandt wird, in vielen Fällen nur zur Vereinfachung der Erörterung dient, und deshalb vermieden werden kann.

§ 2. Definition, Kreis und Dreieck.

Wir definieren eine konvexe ebene Curve auf folgende Weise:

Definition: Eine konvexe ebene Curve, Γ, ist eine Punktmenge, die die Eigenschaft hat, alle Punkte der Ebene, die der Menge Γ nicht angehören, in zwei Gebiete, innere Punkte und äußere Punkte, zu trennen; jede durch einen inneren Punkt, I, laufende Gerade enthält zwei und nur zwei Punkte der Curve Γ, C_1 und C_2, derart, daß I zwischen C_1 und C_2 liegt und jeder Punkt zwischen C_1 und C_2 ein innerer Punkt ist.

Die Beschaffenheit innerer Punkte kann auf folgende gleichbedeutende Weise ausgedrückt werden:

Jede Gerade, die durch einen inneren Punkt geht, enthält eine Strecke, von welcher

1. Alle Punkte innere Punkte sind;
2. die Endpunkte der Curve Γ angehören;
3. Alle sonstigen Punkte der Geraden äußere Punkte sind.

Punkte, die der Menge (Curve) Γ angehören, sollen Randpunkte heißen und man darf sagen, daß solche Punkte auf Γ liegen; sie mögen allgemein mit dem Buchstaben C bezeichnet werden.

Von inneren Punkten darf man sagen, daß sie in Γ oder innerhalb Γ liegen; sie mögen allgemein mit dem Buchstaben I bezeichnet werden.

Punkte, die weder auf Γ noch innerhalb Γ sind, sollen äußere Punkte heißen; wir wollen sagen, daß solche Punkte außerhalb Γ liegen; sie mögen im allgemeinen mit dem Buchstaben E bezeichnet werden.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß es auf Γ — wenn überhaupt eine konvexe Curve Γ existiert —, sowie inner- und

Digitized by Google

außerhalb Γ, unendlich viele Punkte gibt. Aus der obigen Definition einer konvexen Curve folgt noch nicht ihre Existenz; diese soll jedoch sofort bewiesen werden. Für den Beweis der Konvexität einer vorliegenden Curve reicht es hin, die Existenz eines einzigen inneren Punktes von der in der Definition verlangten Beschaffenheit zu zeigen; in der Anwendung aber behauptet man, daß gewisse Punkte innere Punkte seien, und beweist, daß dieselben die verlangten Eigenschaften besitzen.

Wir definieren den Kreis auf folgende Weise: Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, deren Abstand von einem Mittelpunkte, O, gleich einer Zahl, R, dem Halbmesser, ist; wir beweisen

Satz I. Jeder Kreis ist eine konvexe Curve. Jeder Punkt, dessen Abstand von O kleiner als R ist, ist ein innerer Punkt des Kreises, und kein anderer.

Es sei I ein Punkt derart, daß $\overline{OI} < R$. Auf jeder durch I laufenden Geraden liegen zwei Punkte C_1 und C_2, zwischen denen I liegt, so daß

$$\overline{OC_1} = \overline{OC_2} = R.$$

Weiter ist der Abstand jedes Punktes I' zwischen C_1 und C_2 und keines anderen auf der Geraden $C_1 C_2$ liegenden Punktes von O kleiner als R.

Es seien drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte, A, B, C, gegeben. Diese drei Punkte mit den Punkten der Strecken BC, CA, und AB, definieren wir als ein Dreieck.

Wir werden oft eine Gerade durch einen Buchstaben, a, b, c, u. s. w. bezeichnen; die zwei Halbstrahlen in welche eine Gerade, a, durch einen ihrer Punkte getrennt wird, bezeichnen wir mit a_1 und a_2. Es seien a_1 und b_1 zwei von einem gemeinsamen Punkte ausgehende Halbstrahlen, wo $a_1 \neq b_1$, $a_1 \neq b_2$; dann sind a_1 und a_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden b, gleichfalls b_1 und b_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden a. Die Halbstrahlen, a_1 und b_1, bilden einen Winkel (a_1, b_1); jeder Punkt auf derselben Seite von a wie b_1 und zugleich auf derselben Seite von b wie a_1 heißt ein innerer Punkt des Winkels (a_1, b_1).

Wir beweisen jetzt

Satz II. Jedes Dreieck ist eine konvexe Curve.

Es seien A, B, C die Ecken eines Dreiecks. Unter dem Winkel A des Dreiecks verstehen wir den durch die von A ausgehenden Halbstrahlen, AB und AC, gebildeten Winkel. Wir beweisen, daß jeder Punkt, der ein innerer Punkt zweier Winkel des Dreiecks ist, auch ein innerer Punkt des dritten Winkels ist, und

Digitized by Google

behaupten, daß diese Punkte innere Punkte des Dreiecks sind, und daß es keine andere inneren Punkte gibt.

Ein Punkt, der ein innerer Punkt zweier Winkel, B und C, des Dreiecks ist, liegt auf derselben Seite der Geraden BC wie A, auf derselben Seite der Geraden BA wie C, und auf derselben Seite der Geraden CA wie B, ist mithin ein innerer Punkt des Winkels A; wir haben weiter gezeigt, daß eine gleichbedeutende Definition der inneren Punkte des Dreiecks folgende ist: Jeder Punkt, der auf derselben Seite jeder Geraden liegt, die einen Schenkel des Dreiecks enthält, wie die nicht auf dieser Geraden liegende Ecke des Dreiecks, ist ein innerer Punkt des Dreiecks.

Ehe wir den Beweis führen wollen, daß diese als innere Punkte bezeichneten Punkte die in der Definition verlangten Eigenschaften besitzen, betrachten wir zwei Punkte A und B auf den Schenkeln a_1 und b_1 eines Winkels. C sei der Scheitel und I ein innerer Punkt des Winkels. Dann schneidet der von C ausgehende Halbstrahl CI die Strecke AB; denn A und B liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden CI, und die Punkte A, B und der Halbstrahl CI liegen auf derselben Seite irgend einer Geraden, die durch C und einen inneren Punkt des Nebenwinkels (a_2, b_1) bestimmt ist.

Es sei jetzt I ein innerer Punkt der drei Dreieckswinkel A, B und C. Die Transversale AI schneidet BC in A' zwischen B und C. AI schneidet also das Dreieck in zwei Punkten, A und A', zwischen denen I liegt; weiter ist jeder Punkt der Strecke AA' ein innerer Punkt der drei Winkel A, B und C. Wir bezeichnen die von I ausgehenden Halbstrahlen, IA mit a_1, IA' mit a_2; ebenso sei B' der Schnittpunkt der Geraden BI und der Strecke AC, b_1 der von I ausgehende Halbstrahl IB, b_2 der Halbstrahl IB'; es sei endlich C' der Schnittpunkt der Geraden CI und der Strecke AB, c_1 und c_2 die Halbstrahlen IC und IC'.

Es sei nun g irgend eine durch I gehende, aber keine Ecke des Dreiecks enthaltende Gerade; g_1 ihr von I ausgehender Halbstrahl auf derselben Seite der Geraden a (AA') wie B_1; dann liegt g_1 entweder im Winkel (a_1, b_1) oder im Winkel (a_2, b_1). Im ersten Falle schneidet g_1 die Strecke AB; folglich liegt g_2, der andere von I ausgehende Halbstrahl der Geraden g, im Winkel (a_2, b_2), der auch c_1 im Innern enthält. g_2 liegt also entweder im Winkel (a_2, c_1), und schneidet die Strecke $A'C$, oder im Winkel (b_2, c_1) und schneidet die Strecke $B'C$. Wenn aber g_1 im Winkel (a_2, b_1) liegt und somit die Strecke $A'B$ schneidet, so liegt g_2 im Winkel (a_1, b_2) und schneidet die Strecke AB'. Auf jeden Fall schneidet

Digitized by Google

g das Dreieck in zwei Punkten zwischen welchen I liegt, und jeder Punkt zwischen den Schnittpunkten ist ein innerer Punkt aller Winkel des Dreiecks und damit ein innerer Punkt des Dreiecks selbst. Es ist ohne weiteres klar, daß alle anderen Punkte der Ebene äußere Punkte des Dreiecks sind.

Die folgenden Bemerkungen werden uns später nützlich sein. Da wir ohne Beschränkung annehmen können

$$\overline{AB} \geqq \overline{AC},$$

so ist

$$\overline{AB} > \overline{AA'} > \overline{AI},$$

und wir können behaupten, indem wir jetzt unter den Punkten des Dreiecks die Punkte auf dem Dreiecke und die Punkte innerhalb des Dreiecks verstehen: der Abstand jedes Punktes eines Dreiecks von einer seiner Ecken ist nicht größer als die größte seiner Seitenlängen, oder, mit anderen Worten, alle Punkte eines Dreiecks liegen innerhalb eines Kreises, dessen Mittelpunkt eine Ecke des Dreiecks ist und dessen Halbmesser größer als die größte seiner Seitenlängen ist.

§ 3.

Allgemeine Eigenschaften konvexer Curven. Beziehungen einer Geraden und einer konvexen Curve.

Da wir jetzt die Existenz zweier Klassen konvexer Curven bewiesen haben, so betrachten wir einige allgemeinen Eigenschaften dieser Curven in Beziehung auf innere, äußere und Randpunkte. Wir beweisen zunächst

Satz III. Eine Strecke, deren Endpunkte I_1 und I_2 zwei innere Punkte einer konvexen Curve Γ sind, enthält nur innere Punkte von Γ.

Nach der Definition der konvexen Curven schneidet die Gerade $I_1 I_2$ die Curve Γ in zwei und nur zwei Punkten C_1 und C_2, zwischen denen die beiden Punkte I_1 und I_2 liegen; also liegt jeder Punkt der Strecke $I_1 I_2$ zwischen C_1 und C_2 und ist nach der Definition ein innerer Punkt von Γ.

Satz IV. Eine Strecke, deren Endpunkte ein innerer Punkt I und ein Randpunkt C einer konvexen Curve Γ sind, enthält nur innere Punkte von Γ.

Digitized by Google

Die Gerade IC schneidet nämlich Γ noch in C'; I liegt zwischen C und C'; also liegt jeder Punkt der Strecke IC zwischen C und C' und ist deshalb ein innerer Punkt von Γ.

Satz V. Eine Strecke, deren Endpunkte ein innerer Punkt I und ein äußerer Punkt E einer konvexen Curve Γ sind, enthält einen und nur einen Punkt auf Γ.

Denn die Gerade IE schneidet Γ in zwei Punkten C_1 und C_2, zwischen welchen I aber nicht E liegt; also liegen entweder C_1 oder C_2, aber nicht beide zwischen I und E.

Satz VI. Eine Strecke, deren Endpunkte zwei Randpunkte C_1 und C_2 einer konvexen Curve Γ sind, enthält keinen äußeren Punkt. Alle ihre Punkte sind deshalb

a) innere Punkte von Γ, sobald nämlich die Strecke einen inneren Punkt von Γ enthält (nach Satz IV) oder

b) Randpunkte von Γ.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme man an es sei ein äußerer Punkt E zwischen C_1 und C_2; es sei I ein innerer Punkt; nach Satz IV enthalten die Strecken IC_1 und IC_2 nur innere Punkte; die Strecke IE enthält nach Satz V einen Randpunkt C, der ein innerer Punkt des Dreiecks IC_1C_2 ist; nun schneidet eine durch C gehende der Geraden C_1C_2 Parallele die Dreiecksseiten IC_1 und IC_2 in zwei inneren Punkten von Γ, zwischen denen der Randpunkt C liegt. Dies widerspricht Satz III.

Aus der Definition der konvexen Curven folgt unmittelbar

Satz VII. Wenn C ein Punkt auf einer konvexen Curve Γ ist, so gibt es sowohl innere als auch äußere Punkte von Γ, deren Abstände von C kleiner als eine beliebige positive Zahl sind.

Man kann umgekehrt beweisen:

1. Wenn innere Punkte einer konvexen Curve Γ einem Punkte A beliebig nahe kommen, so ist dieser kein äußerer sondern ein innerer oder Randpunkt von Γ.

2. Wenn äußere Punkte einem Punkte A beliebig nahe kommen, so ist dieser kein innerer Punkt.

3. Wenn sowohl innere als äußere Punkte einem Punkte A beliebig nahe kommen, so ist dieser ein Randpunkt. Es gilt 3 wenn Randpunkte dem Punkte A beliebig nahe kommen. Aus 1 folgt wieder Satz VI.

Digitized by Google

Alle möglichen Beziehungen einer konvexen Curve Γ und einer Geraden g kann man auf folgende Weise zusammenfassen:

(1.) Die Gerade g enthält zwei und nur zwei Punkte auf Γ; in diesem Falle liegen innere Punkte von Γ auf g und auf beiden Seiten von g; man sagt die Gerade schneidet Γ.

(2.) Die Gerade g enthält keinen Punkt auf Γ.

(3.) Die Gerade g enthält nur einen oder unendlich viel Punkte auf Γ.

Es soll später erklärt werden, daß im dritten Falle die Gerade g eine Tangente von Γ heißen darf.

In bezug auf den zweiten und dritten Fall können wir jetzt beweisen

Satz VIII. Wenn eine Gerade g keinen, nur einen, oder unendlich viel Punkte auf Γ enthält, so liegen alle nicht auf g liegenden Punkte von Γ auf einer Seite von g.

In dieser Behauptung sind unter Punkte von Γ Randpunkte und innere Punkte zu verstehen.

Wenn es auf beiden Seiten von g Rand- oder innere Punkte von Γ gäbe, so liegen nach Satz VII auf beiden Seiten von g innere Punkte; nach Satz III gibt es auf g einen inneren Punkt und g schneidet Γ, was der Voraussetzung widerspricht.

Es folgt weiter:

Satz IX. Wenn eine Gerade g unendlich viel Punkte von Γ enthält, und C ein solcher Punkt ist, und wenn Punkte auf Γ und zugleich auf g auf beiden Seiten von C liegen, so schneidet Γ jede durch C gehende von g verschiedene Gerade h.

Denn wenn dieser Satz falsch wäre, so würde für die Gerade h entweder (2.) oder (3.) gelten, was nach der Voraussetzung und Satz VIII unmöglich ist.

Wir beweisen jetzt einen Satz, der sofort unendlich viel neue Klassen konvexer Curven liefert.

Satz X. Eine Gerade g, die eine konvexe Curve Γ schneidet, trennt Γ in zwei auf verschiedenen Seiten von g liegende konvexe Curven.

Es schneidet g die Curve Γ in den Punkten C_1 und C_2; alle Punkte der Strecke C_1C_2 sind innere Punkte von Γ.

Die Punkte C_1 und C_2, die Punkte der Strecke C_1C_2, und die Randpunkte von Γ auf einer Seite der Geraden g bilden eine konvexe Curve Γ', von welcher die inneren Punkte die inneren

Digitized by Google

Punkte von Γ sind, die auf der nämlichen Seite von g liegen Ebenso liegt eine zweite konvexe Curve Γ'' auf der anderen Seite von g.

Wir betrachten Γ'; sei I ein innerer Punkt von Γ auf der betrachteten Seite von g. Jede durch I gehende Gerade schneidet Γ in zwei Punkten C und C' zwischen welchen I liegt; wenn C und C' auf derselben Seite von g sind, oder wenn einer der beiden mit C_1 oder C_2 zusammenfällt, so liegen die beiden auf Γ', und alle zwischen C und C' liegenden Punkte sind innere Punkte von Γ und auf der nämlichen Seite von g gelegen; wenn aber C und C' auf verschiedenen Seiten von g liegen, so enthält die Strecke CC' einen Punkt C'' von g, der ein innerer Punkt von Γ ist und deswegen ein Punkt der Strecke C_1C_2, also ein Punkt auf Γ' ist; I liegt zwischen C (auf Γ') und C'', und alle Punkte zwischen C und C'' sind innere Punkte von Γ auf der betrachteten Seite von g, also innere Punkte von Γ'.

Der folgende allgemeinere Satz enthält, wie wir erst später werden beweisen können (S. 14) den Satz X.

Satz XI. Wenn zwei konvexe Curven, Γ und Δ, einen gemeinsamen inneren Punkt haben, so haben sie unendlich viel innere Punkte gemeinsam, und diese sind die inneren Punkte einer konvexen Curve, die entweder mit Γ oder Δ zusammenfällt, oder teils aus Γ und teils aus Δ besteht.

Es sei I ein gemeinsamer innerer Punkt von Γ und Δ. Jede durch I gehende Gerade schneidet Γ in zwei Punkten C_1 und C_2, zwischen welchen I liegt, und schneidet Δ in zwei Punkten D_1 und D_2, zwischen welchen I liegt. Wir dürfen ohne Beschränkung annehmen, daß C_1 und D_1 auf demselben von I ausgehenden Halbstrahl liegen; es sei nun E_1 derjenige der zwei Punkte C_1 und D_1, dessen Abstand von I der kleinere ist, oder falls $C_1 = D_1$, sei $E_1 = C_1 = D_1$; auf ähnliche Weise sei E_2 derjenige der zwei Punkte C_2 und D_2 dessen Abstand von I der kleinere ist, oder falls $C_2 = D_2$, sei $E_2 = C_2 = D_2$. Dann liegt I zwischen E_1 und E_2, und weiter sind alle Punkte zwischen E_1 und E_2 gemeinsame innere Punkte von Γ und Δ; die Punkte E bilden eine Menge E, die eine konvexe Curve ist. Um diese Behauptung zu beweisen seien I' irgend ein zweiter gemeinsamer Punkt von Γ und Δ, g' irgend eine durch I' laufende Gerade, E_1' und E_2' zwei Punkte auf g' bestimmt wie E_1 und E_2 auf g es waren. Es folgt mit Anwendung der ersten Umkehrung vom Satz VII daß E_1' und E_2' der

Digitized by Google

Menge E angehören. Daraus folgt es daß diese eine konvexe Curve ist und auch daß sie nicht von der Wahl des Punktes I abhängt. Wir bemerken der Klarheit halber, daß dann, wenn die Gleichungen

$$E_1 = C_1 \qquad E_2 = C_2$$

immer gelten, die Curve E mit Γ zusammenfällt; und wenn die Gleichungen

$$E_1 = D_1 \qquad E_2 = D_2$$

immer gelten, E mit Δ zusammenfällt, wenn keines der beiden Gleichungspaare immer gelten, so ist E eine von Γ und Δ verschiedene konvexe Curve.

Dieser Satz gibt wieder neue Klassen konvexer Curven.

Es ist schon bewiesen worden, daß eine Strecke einen Teil einer konvexen Curve Γ bilden kann, und wir haben im Satz VI gesehen, daß g und Γ mindestens eine Strecke gemeinsam haben, sobald eine Gerade g mindestens drei Punkte auf Γ enthält.

Wir beweisen jetzt

Satz XII. Wenn eine konvexe Curve Γ und eine Gerade g drei gemeinsame Punkte haben, so haben sie alle Punkte einer Strecke gemeinsam, die Endpunkte der Strecke, und keinen anderen Punkt.

Es sei C ein Punkt auf Γ und zugleich auf der Geraden g, die mit Γ eine Strecke gemeinsam hat; g_1 und g_2 die zwei Halbstrahlen von g von C ausgehend. Wir beweisen zunächst, daß auf jedem dieser Halbstrahlen ein äußerer Punkt von Γ liegt. Es sei I ein innerer Punkt von Γ, und I' ein Punkt der Strecke IC, der nach Satz IV ein innerer Punkt von Γ ist; nun seien h und h' zwei der Geraden g Parallelen, die respektiv durch I und I' gehen; h_1 und h_1' die Halbstrahlen dieser Geraden von I und I' ausgehend, die auf derselben Seite der Geraden IC wie g_1 liegen; nun schneidet h_1' die Curve Γ in einem Punkte C'; die Gerade IC', da sie g nicht parallel ist, schneidet g in E; der Punkt E liegt auf der betrachteten Seite von IC, da alle Punkte der Geraden von IC', die auf der von C' verschiedenen Seite von IC liegen, auch auf derselben Seite von h wie g nicht liegen, und deshalb nicht den Schnittpunkt von g und IC' enthalten; es liegt also E auf g_1; da nun I und E auf verschiedenen Seiten der Geraden h' liegen, so ist C' zwischen I und E, und E ist ein äußerer Punkt von Γ. Ganz ähnlich kann man beweisen, daß es äußere Punkte von Γ auf g_2 gibt.

1) Man siehe z. B. Osgood, Funktionentheorie, s. 26.

Digitized by Google

Es sei nun C ein solcher Punkt, daß Randpunkte von Γ auf g_1 und auf g_2 liegen. Jeder Punkt des Halbstrahls g_1 liegt entweder auf Γ oder außerhalb Γ; durch die bekannte Methode der „Einschachtelung" erkennt man sofort, daß auf g_1 ein Grenzpunkt G_1 existiert von der Beschaffenheit, daß alle Punkte der Strecke CG_1 auf Γ liegen, alle anderen von G_1 verschiedenen Punkte von g_1 außerhalb Γ liegen. Daß G_1 auf Γ liegt folgt aus der dritten Umkehrung vom Satz VII. Ebenso sieht man, daß auch g_2 einen Grenzpunkt G_2 besitzt der auf Γ liegt, und welcher die Eigenschaft hat, Randpunkte und äußere Punkte zu trennen. Damit ist der Satz XII bewiesen.

Es ist bemerkenswert, daß ein solcher Grenzpunkt G in dem einen Sinne auch Grenzpunkt eines anderen Stückes von Γ sein muß. Denn, nach Satz VIII, liegen alle nicht auf g liegenden Punkte von Γ auf einer Seite von g; weiter gibt es einen Randpunkt, der nicht auf g liegt, und dessen Abstand von G kleiner als eine beliebig kleine positive Zahl ε ist; nach Satz VII gibt es auch einen inneren Punkt I, nicht auf g liegend, und einen äußeren Punkt E, der auf g liegt, so daß

$$\overline{GI} < \varepsilon \qquad \overline{GE} < \varepsilon.$$

Nach Satz V enthält die Strecke IE einen nicht auf g liegenden Randpunkt C, und nach der Bemerkung am Ende § 2 ist

$$\overline{GC} < \varepsilon.$$

§ 4. Tangenten einer konvexen Curve.

Die Theorie der Tangenten einer konvexen Curve ist dadurch merkwürdig, daß sie sehr einfach und auch ganz vollständig ist. Diese Theorie ist hauptsächlich auf eine Winkelrechnung gegründet. Nun hat Herr Professor Hilbert in den oben zitierten „Grundlagen" keine Winkelrechnung entwickelt, aber in dem von ihm im Wintersemester 1898-99 gelesenen Kolleg über „Die Elemente der Euklidischen Geometrie[1]" wird eine der Streckenrechnung sehr ähnliche Winkelrechnung begründet. Wir heben noch hervor, daß wir in keinem Falle Winkel größer als ein gestreckter zu betrachten haben, und uns dadurch der schon gegebenen (S. 4) einfacheren Bestimmung eines Winkels bedienen dürfen. Dies vereinfacht die erwähnte Winkelrechnung wesentlich, indem die von Professor Hilbert besprochene Besonderheit vermieden wird. We-

1) Ausgearbeitet und autographiert von Dr. H. v. Schaper, Göttingen, März 1899, S. 40, 41.

Digitized by Google

sentlich in dieser Winkelrechnung für Winkel, die kleiner als ein gestreckter sind, sind die folgenden Sätze:

1. Jedem Winkel, der kleiner als ein gestreckter ist, kann eine positive Zahl, die kleiner als π ist, zugeordnet werden. Diese Zahl soll das Winkelmaß heißen.

2. Kongruente Winkel haben gleiches Winkelmaß.

3. Das Winkelmaß der Summe zweier Winkel ist der Summe ihrer Maße gleich.

Wir müssen das Vollständigkeitsaxiom annehmen:

4. Jeder positiven Zahl, die kleiner als π ist, kann ein Winkel zugeordnet werden, der kleiner als ein gestreckter ist.

Wir werden zunächst den Grundsatz der Tangententheorie beweisen.

Satz XIII. In jedem Punkte einer konvexen Curve gibt es zwei Halbtangenten, die zusammenfallen können.

Es sei C ein Punkt auf der konvexen Curve Γ, und I ein innerer Punkt. Man betrachte nur die Randpunkte auf einer Seite der Geraden IC, und es sei C_1 ein solcher Punkt. Nach Satz VI sind alle Punkte der Strecke CC_1 entweder (a.) innere Punkte oder (b.) Randpunkte zon Γ; ein Halbstrahl, der von I ausgeht und I mit einem Punkte der Strecke CC_1 verbindet, schneidet Γ auf der nämlichen Seite der Geraden IC in einem Punkte C_2; im Falle (a) sind I und C_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden CC_1; im Falle (b) ist C_2 ein Punkt der Strecke CC_1; man ersetze nun C_1 durch C_2 und wähle C_3 auf ähnliche Weise. Man fahre so fort, indem die Punkte C_m so gewählt werden daß

$$\lim_{m=\infty} (C_m IC) = 0$$

wo $(C_m IC)$ das Winkelmaß des durch die von I ausgehenden Halbstrahlen IC und IC_m gebildeten Winkels bedeutet. Nun besteht für jedes n die Ungleichung

$$\pi - (C_1 CI) > (C_1 CC_{n+1}) \geqq (C_1 CC_n)$$

(a.) Wenn für keinen Wert von n das Gleichheitszeichen gilt, so strebt $(C_1 CC_n)$ bei beliebig wachsendem n einer Grenze $(C_1 CT)$ zu, und es existiert nach der Vollständigkeitsannahme eine Gerade CT, die Grenze der Geraden CC_n. (b.) Wenn aber das Gleichheitszeichen für ein gewisses n gilt, so ist C_{n+1} ein Punkt der Strecke CC_n, die deswegen ganz dem Rande angehört, und jeder Punkt C_m, m größer als n, gehört derselben Strecke an, und die

Digitized by Google

Grenze der Geraden CC_m ist bei wachsendem m eben die Gerade der Strecke CC_n, die in diesem Falle auch CT heißen mag. In beiden Fällen nennen wir die Gerade CT die Tangente der Curve Γ auf einer Seite von C, oder eine Halbtangente in C; die Halbtangente soll doch die ganze Gerade, nicht etwa einen Halbstrahl, bedeuten. Falls diese Halbtangente die Strecke CC_n enthält, mag sie auch Streckenhalbtangente heißen.

Wir bemerken, daß jede Gerade, die den Punkt C mit einem inneren Punkt A des Winkels ICT verbindet, Γ schneidet; denn es gibt ein n derart daß $(ACT) > (C_nCT)$ ist, und deshalb schneidet IC_n die Gerade CA in einem inneren Punkte von Γ.

Zweitens bemerken wir, daß alle nicht auf CT liegenden Punkte von Γ — innere und Randpunkte — auf derselben Seite dieser Geraden wie I liegen; denn falls ein solcher Punkt auf der andern Seite von CT und zugleich auf derselben Seite von CI wie C_1 läge, so wäre CT nicht die Grenzgerade. Wenn ein Punkt von Γ und damit nach Satz VII ein innerer Punkt I', auf der von I verschiedenen Seite von CT und zugleich auf der von C_1 verschiedenen Seite von CI liegt, dann enthielte die Gerade $I'C$ zufolge der ersten Bemerkung einen inneren Punkt I'', der zugleich innerer Punkt des Winkels ICT wäre, und C wäre ein Punkt der Strecke $I'I''$, was nach Satz III unmöglich ist.

Wenn nun Punkte von Γ auf den verschiedenen Seiten der Geraden IC betrachtet werden, dann erhält man eine zweite Halbtangente in C, CT', die ganz gleiche Eigenschaften wie CT besitzt. Wenn CT und CT' in eine Gerade zusammenfallen, so heißt C ein gewöhnlicher Punkt von Γ, und diese Gerade heißt die Tangente in C. Die Tangente kann Streckenhalbtangente auf einer oder auf beiden Seiten von C sein; aber wenn das nicht der Fall ist, so enthält die Tangente keinen anderen Punkt von Γ als C. Jede durch einen gewöhnlichen Punkt C von Γ gehende und von der Tangente in C verschiedene Gerade schneidet Γ. Wenn die Halbtangenten in C nicht zusammenfallen, so heißt C eine Ecke von Γ; es können dann eine oder die beiden oder keine der beiden Streckenhalbtangenten sein. Die zwei Geraden CT und CT' bilden zwei Scheitelwinkel und ihre Nebenwinkel. Jeder durch C gehende und im Winkel TCT' liegende Halbstrahl schneidet Γ. Alle Punkte von Γ liegen auf den Schenkeln dieses Winkels oder sind innere Punkte desselben. Jede durch C gehende und im Nebenwinkel von TCT' liegende Gerade enthält keinen anderen Punkt von Γ als C. Eine solche Gerade soll eine Pseudotangente heißen. In jeder Ecke gibt es zwei ver-

Digitized by Google

schiedene Halbtangenten und unendlich viel Pseudotangenten. Daß es zweckmäßig ist, die Pseudotangenten als Tangenten anzusehen, erhellt erst aus zwei später zu beweisenden Sätzen (Sätze XV und XVI). Hiermit ist die Bemerkung nach (3.) s. 7 gerechtfertigt.

Ein sehr wichtiges Resultat geht aus den eben bewiesenen Eigenschaften der Tangenten hervor: Die Tangente oder die Halbtangenten von Γ in einem Punkte C sind von der Wahl des Punktes I, von dem wir ausgegangen sind, ganz unabhängig.

Für die weitere Erörterung von Tangenten ist der auch für sich interessante Satz bedeutsam:

Satz XIV. Jede konvexe Curve liegt ganz im Endlichen; oder anders ausgedrückt: jede konvexe Curve liegt ganz im Innern eines Kreises.

Zunächst erhellt aus den bewiesenen Eigenschaften der Tangenten, daß keine konvexe Curve drei parallele Tangenten hat — unter Tangenten sind hier gewöhnliche, Halb- und Pseudotangenten zu verstehen; denn jede Art Tangente hat nur einen oder unendlich viel Punkte auf Γ und nach Satz VIII liegen alle sonstigen Punkte von Γ auf einer Seite jeder Tangente. Es folgt sofort, daß man drei Punkte C_1, C_2, C_3 auf Γ so nehmen kann, daß die Tangenten oder eine der Halbtangenten in jedem Punkt ein Dreieck bilden, derart, daß jeder Punkt von Γ ein innerer oder Randpunkt des Dreiecks ist. Nach der Bemerkung am Ende § 2 liegt jedes Dreieck innerhalb eines Kreises, daraus ergibt sich, daß dieselbe Tatsache für Γ besteht.

Ehe wir diesen Satz auf die weitere Erörterung der Tangenten anwenden, zeigen wir zunächst unter der Annahme der später zu beweisenden Tatsache (Satz XIX): Jedes Parallelogramm ist eine konvexe Curve, was auf S. 9 behauptet wurde. Der Satz XI enthält Satz X.

Es sei g eine Gerade die Γ schneidet; h eine nicht parallele Gerade; A der Mittelpunkt und R der Halbmesser eines Kreises, der Γ im Innern enthält. Man ziehe zwei der Geraden g Parallelen, g' und g'', so daß die von A auf g' und g'' gefällten Lothe alle beide größer als R sind und ferner so, daß A zwischen g' und g'' liegt; dann liegt der Kreis und mit ihm alle Punkte von Γ zwischen g' und g''. Auf ganz ähnliche Weise ziehe man zwei der Geraden h Parallelen, h' und h'', so daß Γ zwischen diesen liegt. Nun sind die inneren Punkte von Γ, die auf einer Seite der Geraden g liegen, die gemeinsamen inneren Punkte von Γ und vom Parallelogramm, von welchem die Seiten auf den Ge-

Digitized by Google

raden h', g, h'', g' bezw. g'' liegen, und damit ist Satz X aus Satz XI bewiesen.

Wir beweisen jetzt

Satz XV. Zwei und nur zwei Tangenten (gewöhnliche, Halb-, oder Pseudotangenten) jeder konvexen Curve sind irgend einer gegebenen Geraden parallel.

Es ist wegen der Vollständigkeit dieses und des folgenden Satzes (XVI) wichtig, daß die Pseudotangenten mit in Betracht gezogen werden.

Es sei Γ die konvexe Curve, g eine Gerade, die wir ohne Beschränkung als Γ schneidend annehmen dürfen. Es gibt, wie eben bewiesen, zwei der Geraden g Parallelen, g' und g'', derart, daß Γ zwischen diesen liegt. Es wird nun durch die Methode der Einschachtelung oder wiederholte Halbierung bewiesen werden, daß es eine g parallele Tangente zwischen g und g' bezw. g'' gibt und es ist schon bewiesen worden (s. 14), daß es nicht mehr als zwei zu g perallele Tangenten gibt.

Es seien G und G' respektive zwei Punkte der Geraden g und g'; G_1 der Mittelpunkt der Strecke GG', und g_1 eine durch G_1 gehende Parallele der Geraden g. Es sind dann nur drei Fälle möglich:

1. g_1 ist eine Tangente; dann liegen alle nicht auf g_1 liegenden Punkte von Γ auf derselben Seite von g_1 wie g, und jede der Geraden, die zu g parallel ist und die Strecke GG_1 schneidet, schneidet auch Γ, jede Parallele, die die Strecke G_1G' schneidet, enthält keinen Punkt von Γ; so ist g_1 die einzige zur Geraden g parallele Tangente auf derselben Seite von g wie g'.

2. g_1 schneidet Γ; man ersetze g durch g_1 und fahre dann auf dieselbe Weise fort.

3, g_1 enthält keinen Punkt von Γ; man ersetze g' durch g_1, und fahre auf dieselbe Weise fort.

Bei der Wiederholung dieses Prozesses kommt man entweder zum ersten Falle, oder es wird einer Grenzgeraden t' zugestrebt; daß diese eine Tangente ist, folgt daraus, daß sie Γ nicht schneiden kann und, zufolge der ersten Umkehrung vom Satz VII. mindestens einen Randpunkt von Γ enthält.

Aehnlich zeigt man, daß es eine zur Geraden g parallele Tangente t'' auf derselben Seite von g wie g'' gibt.

Aus einer ähnlichen Beweisführung ergibt sich:

Satz XVI. Zwei und nur zwei Tangenten (gewöhnliche, Halb-, oder Pseudotangenten) einer kon-

Digitized by Google

vexen Curve gehen durch einen gegebenen äußeren Punkt.

Es folgt wieder aus Satz VIII, daß nicht mehr als zwei Tangenten durch einen Punkt gehen. Um den Prozeß der wiederholten Halbierung hier anwenden zu können, ist es zunächst notwendig zu zeigen, daß durch einen gegebenen äußeren Punkt E stets eine Gerade hindurchgeht, die keinen Punkt von Γ enthält: es sei I ein innerer Punkt; nach Satz V gibt es einen Randpunkt C auf der Strecke IE; es sei t eine Tangente in C; dann liegen E und alle nicht auf t liegenden Punkte von Γ auf verschiedenen Seiten von t, und eine durch E gehende der Geraden t Parallele g enthält keinen Punkt von Γ. Durch wiederholte Halbierung jedes der zwei Winkel, die von dem von E ausgehenden Halbstrahl EI und jedem der von E ausgehenden Halbstrahlen der Geraden g gebildet werden, ergeben sich zwei durch E gehende Tangenten, von welchen je eine in einem dieser Winkel liegt.

Durch diese Sätze und ihre Beweise ist die wesentliche Verwandtschaft zwischen den Tangenteneigenschaften der konvexen Curven und der Zerteilung der Ebene durch eine Gerade betrachtet worden.

§ 5. Stetigkeit einer konvexen Curve.

Es läßt sich fragen, ob die hier behandelten konvexen Curven stetig sind. Zunächst müssen wir feststellen, wie wir die Stetigkeit einer nicht analytisch gegebenen Curve zu definieren haben. Nun ist eine analytisch gegebene Curve, $y = f(x)$, unter folgenden Umständen auf einer Seite eines ihrer Punkte (x_0, y_0), in diesem Punkte stetig:

1. Es müssen sich zunächst zwei positive Zahlen ϱ, σ derart bestimmen lassen, daß jedes x, das die Ungleichung $\varrho > x - x_0 > 0$ (bezw. $\varrho > x_0 - x > 0$) befriedigt, einen und nur einen Wert, $y = f(x)$, liefert derart, daß $|y - y_0| < \sigma$ ist. Man kann dann sagen, daß y eine eindeutige überall definierte Funktion im Bereich (ϱ, σ) ist.

2. Wenn ein solcher Bereich (ϱ, σ) existiert, so heißt die Curve auf einer Seite des Punktes (x_0, y_0) in diesem Punkte stetig, wenn jeder positiven Zahl ε, die kleiner als σ ist, eine positive Zahl δ kleiner als ϱ zugeordnet werden kann, so daß aus $\delta > x - x_0 > 0$ stets $|y - y_0| < \varepsilon$ folgt.

Diese Definition läßt sich folgender Weise geometrisch fassen:

Eine Curve Γ soll in einem ihrer Punkte C auf einer Seite dieses Punktes stetig heißen,

Digitized by Google

1. wenn es eine Gerade g durch C und einen nicht auf g liegenden Halbstrahl t_1 der von C ausgeht, gibt, so daß zwei positive Zahlen ρ, σ von folgender Beschaffenheit bestimmt werden können: Jede zu g Parallele g_1, die t_1 in T_1 schneidet, soll Γ in einem und nur einem Punkt C_1 schneiden, derart daß aus $\overline{CT_1} < \rho$ stets $\overline{T_1C_1} < \sigma$ folgt.

2. wenn jeder positiven Zahl ε, die kleiner als σ ist, eine positive Zahl δ, kleiner als ρ, derart zugeordnet werden kann, daß jede zur Geraden g Parallele g', die den Halbstrahl t_1 in T' schneidet, wobei $\overline{CT'} < \delta$ ist, die Curve Γ im Punkte C' schneidet, derart daß $\overline{T'C'} < \varepsilon$.

Indem wir diese Definition der Stetigkeit gebrauchen, können wir den folgenden wichtigen Satz beweisen:

Satz XVII. Jede konvexe Curve ist in jedem ihrer Punkte auf beiden Seiten stetig.

Es sei Γ eine konvexe Curve, C ein Punkt auf Γ; es sei t_1 derjenige Halbstrahl einer der Halbtangenten in C, der von C ausgeht und nach der Seite von C läuft, wo die betrachtete Halbtangente herrührt. Es sei ferner I ein innerer Punkt von Γ, und man bezeichne die Gerade CI mit g; außerdem sei t die durch I gehende Parallele zum Halbstrahl t_1, und es möge t die Curve Γ im Punkt A, auf derselben Seite der Geraden CI wie t_1, schneiden.

Dann kann man zufolge der gegebenen Definition ρ gleich $\overline{IA}$ und σ gleich $\overline{CI}$ nehmen und auf diese Weise der ersten Forderung der Definition Genüge leisten; denn eine zur Geraden g parallele, die t_1 in T_1 schneidet, wobei $\overline{CT_1} < \overline{IA}$, schneidet nach Satz IV die Strecke IA in einem inneren Punkte I_1 von Γ; deshalb gibt es einen und nur einen Punkt auf Γ, C_1 der so gelegen ist, daß $\overline{T_1C_1} < \sigma$ ist; falls die Strecke CC_1 der Curve Γ angehört, fällt C_1 mit T_1 zusammen.

Es sei nun C_1 ein Punkt auf Γ, der zugleich ein innerer Punkt des Winkels CIA ist, und es möge mit α das Winkelmaß (ICT_1) bezeichnet werden. Wenn nun das Winkelmaß (C_1IC) dem Grenzwerte Null zustrebt, so nimmt das Winkelmaß (C_1CT_1) beständig ab und strebt auch dem Werte Null zu, oder aber wird gleich Null und bleibt bei abnehmendem (C_1IC) gleich Null. Es kann also T_1 so gewählt werden, daß (C_1CT_1) kleiner als $\alpha/2$ ausfällt.

Jetzt können wir leicht der zweiten Forderung der Stetigkeitsdefinition Genüge leisten. Es sei ε irgend eine positive Zahl, die kleiner als σ ist und δ eine Zahl, die zugleich kleiner als ε und $\overline{CT_1}$ ist, wobei T auf oben angedeutete Weise gewählt worden

Digitized by Google

ist. Wenn nun g' eine zur Geraden g Parallele ist, die t_1 in T' derart schneidet, daß $\overline{CT'}$ kleiner als δ ist, und die außerdem die Curve Γ in C' schneidet, wobei $\overline{T'C'}$ kleiner als σ wird, so folgt unmittelbar aus der Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck $CT'C'$,

$$\overline{T'C'} = \overline{CT'} \frac{\sin x}{\sin(\alpha - x)},$$

wobei x das Winkelmaß $(C'CT')$ bedeutet; nun ist der Bruch $\sin x/\sin(\alpha - x)$ kleiner als die Einheit wenn $x < \alpha/2$ ist. Da nun $x \leqq (C_1CT_1) < \alpha/2$ ist, so folgt

$$\overline{T'C'} < \overline{CT'} < \delta < \varepsilon.$$

Das Gleichheitszeichen der ersten Ungleichung gilt dann und nur dann, wenn die Strecke CT_1 auf der Curve Γ liegt.

Man kann auf dieselbe Methode beweisen, daß Γ im Punkte C auf den verschiedenen Seiten der Geraden IC stetig ist; da nun C irgend ein Punkt auf Γ ist, so ist Γ in jedem ihrer Punkte auf beiden Seiten stetig, und wir können sagen, daß jede konvexe Curve stetig ist. Es ist bemerkenswert, daß bei dem eben gegebenen Beweise der einseitigen Stetigkeit nicht verlangt wird, daß die vorgelegte Curve eine konvexe sei, sondern nur, daß es möglich sei, ein δ so zu wählen, daß x immer kleiner als $\alpha/2$ ausfällt. Jedoch werden die Eigenschaften der konvexen Curven bei dieser Wahl gebraucht, so wie auch beim Beweise der Existenz des Bereiches, in dem die Curve definiert und eindeutig ist.

§ 6. Konvexe Polygone.

Eine Klasse konvexer Curven, die besonderes Interesse bieten, sind diejenigen, die ganz durch eine endliche Anzahl von Strecken gebildet werden. Die Existenz solcher Curven, die konvexe Polygone heißen sollen, geht aus den Sätzen II und X hervor. Die Haupteigenschaften der konvexen Polygone folgen unmittelbar aus den schon bewiesenen Sätzen. Die Strecken, welche das Polygon bilden, heißen die Seiten des Polygons. Jeder Endpunkt einer solchen Strecke ist ein Grenzpunkt (Satz XII), der die Randpunkte und die äußeren Punkte der die Strecke enthaltenden Geraden trennt. Er ist selbst ein Randpunkt, und zufolge der Bemerkung auf Seite 11 ein Endpunkt einer zweiten Strecke, die dem Rande angehört. Ein solcher Punkt heißt eine Ecke des Polygons. Jeder Randpunkt, der keine Ecke ist, ist ein gewöhnlicher Punkt des Polygons, und die Tangente in diesem Punkte

Digitized by Google

enthält eine Strecke des Polygons, ist also eine Streckentangente; nach der Bemerkung auf Seite 13 liegt ein konvexes Polygon auf einer Seite jeder Geraden, die eine seiner Seiten enthält. In einer Ecke hat ein konvexes Polygon zwei nicht zusammenfallende Streckenhalbtangenten, die jede eine Seite des Polygons enthält, und unendlich viel Pseudotangenten. Im Sinne vom Herrn Professor Hilbert[1]) ist jedes konvexe Polygon einfach, und die von ihm als innere und äußere definierten Punkte fallen mit den inneren bezw. äußeren Punkten zusammen.

In der elementaren Geometrie werden die konvexen Polygone oft auf die folgende bequeme Weise definiert[2]):

Ein konvexes Polygon ist ein geschlossener Streckenzug, der ganz auf einer Seite jeder Geraden liegt, die eine Strecke des Zuges enthält. Wir werden jetzt beweisen, daß diese Definition mit der vorher gegebenen übereinstimmt.

Es ist schon bemerkt worden, daß ein konvexes Polygon ganz auf einer Seite jeder Geraden liegt, die eine Seite des Polygons enthält. Es erübrigt nur zu beweisen

Satz XVIII. Ist ein geschlossener geradlinig begrenzter Streckenzug so beschaffen, daß alle seine Punkte auf einer Seite der betreffenden Geraden oder auf ihr selbst liegen, so wird von ihm ein konvexes Polygon begrenzt. Alle Punkte, die zugleich auf derselben Seite aller Geraden liegen, sind innere Punkte.

Wir werden beweisen, daß die obige Behauptung für einen Streckenzug, der aus $n+1$ Strecken besteht, wahr ist, wenn sie für einen aus n Strecken gebildeten Zug gilt, wobei $n \geqq 3$ sein soll. Indem nun gerade diese Behauptung für den Fall, $n = 3$, im Satz II bewiesen worden ist, geht also der Beweis für jedes n durch vollständige Induktion hervor.

Es sei $ABCD \ldots MA$ ein geschlossener Streckenzug, der $n+1$ Strecken enthält; die Punkte $AB \ldots M$ seien die Endpunkte dieser Strecken. Alle Punkte des Zuges, die nicht auf einer beliebigen Strecke liegen, mögen auf derselben Seite der Geraden, die diese Strecke enthält, liegen. Indem wir jetzt den Punkt B ausscheiden und die Strecke AC hinzufügen, entsteht ein geschlossener Streckenzug $ACD \ldots MA$, der n Strecken enthält; wir behaupten

1) Grundlagen, s. 9.

2) Man sehe z. B. Hadamard, Leçons de géométrie élémentaire, I, p. 14.

Digitized by Google

vom letzteren, daß alle Punkte dieses Zuges, die nicht auf irgend einer seiner Strecken liegen, auf einer Seite der Geraden liegen, die diese Strecke enthält; und daß also, nach der Voraussetzung, dieser Streckenzug ein konvexes Polygon ist.

Nach dem eben gesagten liegen alle Punkte des Zuges $ACD \dots MA$, die nicht auf einer dieser Strecken liegen, auf derselben Seite der betreffenden Geraden, wenn nur diese Strecke nicht AC ist. Diese Strecke bedarf einer besonderen Berücksichtigung: Die Punkte C und M liegen auf derselben Seite der Geraden AB; C und B auf derselben Seite der Geraden AM; es sind also B und M auf verschiedenen Seiten der Geraden AC; auf gleiche Weise folgt, daß B und D auf verschiedenen Seiten von AC liegen, also M und D auf derselben Seite der Geraden AC. Nun liegt der Streckenzug $D \dots M$ ganz auf derselben Seite der Geraden AC, da die gegenteilige Annahme auf einen Widerspruch führen würde, wie man leicht ersehen kann. Wir haben also bewiesen, daß der Streckenzug $ACD \dots MA$ ein konvexes Polygon ist, das mit P_n bezeichnet werde. Wir werden nun beweisen, daß der Streckenzug $ABCD \dots MA$ ein konvexes Polygon P_{n+1} ist, indem wir zeigen daß die im Satze XVIII erwähnten Punkte die Eigenschaften innerer Punkte besitzen. Diese Punkte sind

1. Die Punkte der Strecke AC;
2. Die inneren Punkte des Dreiecks ABC;
3. Die inneren Punkte von P_n.

Es sei zunächst I ein Punkt der Strecke AC; die Gerade AC schneidet P_{n+1} in A und C; da nun I zwischen diesen liegt, so ist I ein innerer Punkt, denn auch jede von AC verschiedene, durch I gehende Gerade schneidet die Kanten des Dreiecks und des Polygons P_n in je einem weiteren Punkte; I liegt zwischen diesen zu P_{n+1} gehörenden Punkten und jeder Punkt der zwischen diesen liegt, ist ein innerer Punkt von P_{n+1}. Es sei nun I ein innerer Punkt des Dreiecks ABC; jede durch I gehende Gerade schneidet das Dreieck, und I liegt zwischen den Schnittpunkten; wenn diese auf den Strecken AB und BC liegen, oder einer mit einem der Punkte A, B, C zusammenfällt, so sind sie Punkte des Zuges P_{n+1}; alle Punkte zwischen diesen sind innere Punkte des Dreiecks, deshalb innere Punkte von P_{n+1}; wenn aber einer dieser Dreiecksschnittpunkte ein Punkt der Strecke AC ist, so schneidet die Gerade P_n in einem zweiten Punkt, und deshalb auch P_{n+1} in zwei Punkten, zwischen welchen I liegt; alle Punkte zwischen diesen sind aber innere Punkte von P_{n+1}. Eine ähnliche Betrachtung

Digitized by Google

zeigt, daß die inneren Punkte von P_n auch innere Punkte von P_{n+1} sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Eine bedeutende Anwendung des eben bewiesenen Satzes ist der folgende:

Satz XIX. Jedes Parallelogramm ist eine konvexe Curve.

Ein Parallelogramm wird als ein geschlossener aus vier Strecken bestehender Zug $ABCDA$ definiert, dessen Seitenpare AB und CD, BC und DA parallel sind. Auf diesen können wir Satz XVIII sofort anwenden. Dieser Satz ist (S. 14) schon gebraucht worden.

Die folgende Bemerkung gilt für Satz XVIII. Man könnte nun glauben, daß ein ähnlicher Satz für alle konvexen Curven gälte. Dieses ist aber keineswegs der Fall, denn die folgende Behauptung ist falsch: Eine Curve, die in jedem ihrer Punkte stetig ist und die in jedem Punkte mindestens eine Tangente hat, die ferner ganz im endlichen und auf einer Seite jeder Tangente liegt, die weiter zwei und nur zwei Tangenten hat, die jeder Geraden parallel sind, und die durch jeden Punkt eines Bereiches der Ebene zwei und nur zwei Tangenten zuläßt, ist eine konvexe Curve. Daß die Behauptung falsch ist, sieht man sofort am folgenden Beispiel: Es sei ABC ein Dreieck und es sei aus einem seiner Schenkel ein Punkt, der keine Ecke ist, entnommen. Die so entstehende Curve hat jede der erwähnten Eigenschaften, kann aber nicht konvex sein, indem kein Punkt die Eigenschaften der inneren Punkte besitzt.

§ 7. Länge und Inhalt konvexer Curven.

In diesem Abschnitt soll bewiesen werden, daß jede konvexe Curve eine Länge und einen Inhalt besitzt. Die vorliegende Untersuchung wird wesentlich durch den Begriff des Konvexsektors vereinfacht; derselbe wird folgendermaßen definiert:

Ein Konvexsektor ist eine konvexe Curve, die teils aus zwei Strecken, PA und PC besteht, die einen gemeinsamen Grenzpunkt P haben, und die in A eine der Geraden PC parallele Halbtangente und in C eine der Geraden PA parallele Halbtangente hat.

Wir werden zunächst beweisen:

Satz XX. Jede konvexe Curve kann in vier oder weniger als vier angrenzende Konvexsektoren zerlegt werden, und sogar auf unendlich viele Weisen.

Zwei konvexe Curven mögen angrenzend heißen falls dieselben eine Strecke gemeinsam haben und auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, die diese Strecke enthält.

Digitized by Google

Es sei Γ eine konvexe Curve. Wir ziehen irgend zwei parallele Tangenten, die gewöhnliche, Halb- oder Pseudotangenten sein dürfen; es seien dies die Tangenten in den Punkten A und B. Die Strecke AB gehört der Curve an oder liegt innerhalb. Jedenfalls gibt es zwei der Geraden AB parallele Tangenten, die respektiv die Punkte C und D berühren mögen. Wenn die Strecke AB der Curve angehört, so enthält eine dieser Tangenten die Strecke, andernfalls liegen sie auf verschiedenen Seiten der Geraden AB. Es seien endlich zwei Gerade, die den Tangenten in A und B parallel sind, durch C und D gezogen, die die Gerade AB respektiv in P und Q schneiden mögen. Es schneiden sich die Tangenten in A und C im Punkte R, diejenigen in B und C im Punkte S. Die so gezogenen Geraden zerteilen die Curve Γ allgemein in vier Konvexsektoren, APC, CPB, BQD, DQA, von welchem jeder dem vorhergehenden angrenzend ist. Wie man sofort sieht, ist der Rand des Sektors APC aus den zwei Strecken PA und PC und aus jenem Teil der Curve Γ gebildet, der im Winkel APC liegt. Daß APC eine konvexe Curve ist, falls A, P und C nicht in einer Geraden liegen, erhellt aus dem Satz X. Wenn ausnahmsweise die Strecke AB der Curve Γ angehört, so liegt einer der Punkte C, D auf der Geraden AB, mithin einer der Punkte P, Q auf derselben; es verschwinden in diesem Falle zwei der Sektoren, und Γ ist dann in zwei Konvexsektoren zerteilt. Daß in besonderen Fällen die Anzahl ein, zwei oder drei sein kann ist ersichtlich. Es sei auch bemerkt, daß APC mit dem Parallelogramm $ARCP$ zusammenfallen kann; wenn dies nicht der Fall ist, dann liegen alle Randpunkte des Sektors APC, die nicht zugleich Randpunkte des genannten Parallelogrammes sind, im Innern von $ARCP$.

Wir wollen nun einen einzigen Konvexsektor ins Auge fassen, und zwar unter der Annahme, daß er nicht mit dem einschließenden Parallelogramm zusammenfällt. Wir führen dazu eine Art von Koordinatensystem ein, das dazu geeignet ist, die Untersuchungen über Länge und Inhalt zu befördern.

Da die Gerade PR die Curve Γ schneidet, da weiter P ein innerer oder Randpunkt, R ein äußerer Punkt von Γ ist, so enthält die Strecke PR einen einzigen Punkt auf Γ, der F heißen mag. Wir betrachten nur den Bogen AF von Γ. Es schneide eine durch F gehende, der Geraden AP Parallele, die Strecke AR im Punkte E. Es sei G ein Punkt der Strecke AE, und es sei $\overline{AG}$ mit x bezeichnet; man hat also

$$\overline{AE} > x > 0.$$

Digitized by Google

Eine durch G gehende der Geraden AP Parallele schneidet nach dem vorhergehenden den Bogen AF von Γ in einem einzigen Punkt H; es sei $\overline{GH}$ mit y bezeichnet, wobei

$$\overline{AP} > y \geqq 0.$$

Der Punkt H des betrachteten Bogens hat also die Koordinaten x, y. Es sei H' ein zweiter Punkt des nämlichen Bogens mit den Koordinaten x', y', wobei $x' > x$ sei. Wenn nicht $y = y' = 0$ ist, dann ist stets $y' > y$, wie man sofort sieht. Man darf also über y, als Funktion der Veränderlichen x betrachtet, folgendes aussprechen: Die Funktion y ist im Bereich $\overline{AE} \geqq x \geqq 0$, eindeutig, überall definiert, stetig, und nie abnehmend; und nimmt, wenn y von Null verschieden ist, beständig zu.

Es sei nun H ein Punkt des Bogens AF und es sei $y > 0$; man betrachte die Halbtangente von Γ in H auf der Seite von A. Da H ein innerer Punkt des Parallelogramms $ARCP$ ist, und da die Strecken PA und PC ganz auf einer Seite der betrachteten Tangente liegen, so schneidet diese die Strecke AR; es sei T_1 der Schnittpunkt; man bezeichne mit ϑ_1 das Winkelmaß des von den von T_1 ausgehenden Halbstrahlen T_1R und T_1H gebildeten Winkels RT_1H; auf analoge Weise sei T_2 der Schnittpunkt der Halbtangente in H auf der Seite von F mit der Strecke AR, und es sei ϑ_2 das Winkelmaß (RT_2H).

Da alle Punkte von Γ, die nicht auf einer gegebenen Tangente liegen, auf einer Seite liegen, so folgt unmittelbar $\vartheta_2 \geqq \vartheta_1$. Das Gleichheitszeichen gilt nur im Falle, daß H keine Ecke von Γ ist, so daß die Halbtangenten zusammen fallen. Man betrachte nun einen zweiten Punkt $H'(x', y')$ des Bogens AF, wobei $x' > x$. Es sei L der Schnittpunkt der Sehne HH' mit der Strecke AR. Wie im vorangehenden beweist man auch hier: $(RLH) \geqq \vartheta_2$, wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die Strecke HH' der Curve Γ angehört; wenn die Halbtangente in H', auf der Seite von A, die Strecke AR in T_1' schneidet, und $(RT_1'H')$ mit ϑ_1' bezeichnet wird, so hat man wieder $\vartheta_1' \geqq (RLH)$. Es folgt also $\vartheta_1' \geqq \vartheta_2$, wobei das Gleichheitszeichen wie oben dann und nur dann gilt, falls die Strecke HH' auf Γ liegt. Es sei nun ϑ als Funktion von x im Bereich, $\overline{AE} \geqq x \geqq 0$, folgender Weise definiert:

$x = 0$			$\vartheta = 0$
$\overline{AE} > x > 0$	$y = 0$		$\vartheta = 0$
$\overline{AE} > x > 0$	$y > 0$	H keine Ecke von Γ	$\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2$

Digitized by Google

$\overline{AE} > x > 0 \quad y > 0 \quad H$ eine Ecke von $\Gamma \quad \vartheta = \vartheta_1$
$x = \overline{AE} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vartheta = \beta$

wo β der Wert von ϑ_1 im Punkte F ist; es sei weiter α das Maß des Parallelogrammwinkels RAP; dann ist $\beta < \alpha$.

Von dieser Funktion ϑ kann man folgendes nachweisen: ϑ ist eine überall in dem angegebenen Bereich eindeutig definierte Funktion von x, die gewiß unstetig ist für jeden Wert von x zwischen ϑ und $\overline{AE}$ der eine Ecke von Γ liefert; sie nimmt bei zunehmendem x beständig zu, falls (x, y) nicht auf einer Strecke von Γ liegt ist.

Jetzt sind wir im Stande,

Satz XXI. Jede konvexe Curve hat eine Länge zu beweisen.

Wir gehen von der folgenden Definition der Länge aus[1]):

Eine Curve hat eine Länge „wenn die Länge der ihr eingeschriebenen gebrochenen Linien bei unbegrenzter Verfeinerung der entsprechenden Teilung der Intervalls $a \ldots b$ (in der hiesigen Bezeichnung $0 \ldots \overline{AE}$) stets dem gleichen Grenzwert zustrebt, einerlei wie man bei dieser Verfeinerung verfährt, und dann wird eben dieser Grenzwert als die Länge (der Curve) bezeichnet".

Wir bemerken zunächst, daß unmittelbar aus der Definition folgt: wenn B ein Punkt eines Bogens AC ist, und wenn die Bogen AB und BC alle beide Längen haben, so hat auch AC eine Länge, die gleich ist der Summe der Längen von AB und BC Um den vorliegenden Satz zu beweisen, reicht also hin, seine Gültigkeit für den Bogen AF zu zeigen. Die Länge der Curve Γ ist durch eine Summe von höchstens acht solchen Bogenlängen, und weniger als acht Streckenlängen bestimmt.

Wir beweisen also, daß der Bogen AF eine Länge hat. Es seien $H(x, y)$ und $H'(x', y')$ zwei Punkte des Bogens, und $x' > x$; weiter seien G und G' respektiv die Punkte $(x, 0)$ und $(x', 0)$; dann hat man nach dem Sinussatz immer

$$\overline{HH'} = \overline{GG'} \sin \alpha \operatorname{cosec} [\alpha - (RLH)];$$

da nun

$$\vartheta_2 \leqq (RLH) \leqq \vartheta_1'$$

ist, so ist der Grenzwert der Summe der Streckenlängen $\overline{HH'}$ von A bis F bei beliebiger unbegrenzter Verfeinerung des Intervalls AE gleich dem Werte des Integrals

1) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III, 3, Heft I, s. 20.

Digitized by Google

$$\text{Bogenlänge } AF = \int_0^{\overline{AE}} \sin\alpha \operatorname{cosec}(\alpha - \vartheta)\, dx.$$

Dieses Integral hat einen Sinn, da $\operatorname{cosec}(\alpha - \vartheta)$ zwischen diesen Grenzen eine integrabele Funktion von x ist. ϑ ist nämlich bei zunehmendem x eine nie abnehmende Funktion, $\alpha - \vartheta$ ist also eine nie zunehmende Funktion, und nimmt von α bis $\alpha - \beta$ ab; wenn

1. $\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, so ist $\operatorname{cosec}(\alpha - \vartheta)$ eine nie abnehmende Funktion von x, und daher integrabel, wie viel Unstetigkeiten sie auch haben mag[1]);

2. wenn $\alpha - \beta \geqq \frac{\pi}{2}$, so ist $\operatorname{cosec}(\alpha - \vartheta)$ eine nie zunehmende Funktion von x, und daher integrabel.

3. wenn $\alpha > \frac{\pi}{2} > \alpha - \beta$, so kann das Integral in zwei Teile getrennt werden, von denen jeder einen Wert hat, indem in einem dieser $\operatorname{cosec}(\alpha - \vartheta)$ nie zunimmt, im anderen nie abnimmt.

Wir bemerken der Klarheit halber, daß die Bogenlänge AFC durch ein Integral

$$AFC = \int_0^{\overline{AR}} \sin a \operatorname{cosec}(\alpha - \vartheta)\, dx,$$

gegeben wird, obgleich $\operatorname{cosec}(\alpha - \vartheta)$ in der oberen Grenze unendlich wird, wenn CR nicht eine Streckenhalbtangente des Konvexsectors APC ist; im anderen Falle ist dieses Integral kleiner als die Bogenlänge AFC.

Wir beweisen jetzt

Satz XXII. Jede konvexe Curve hat einen Inhalt.

Herr Hilbert hat bewiesen[2]) — da jedes konvexe Polygon ein einfaches ist —

1. Jedes konvexe Polygon hat einen Inhalt.

2. Der Inhalt eines Parallelogramms $ABCD$, das einen Winkel von Masse α hat, ist gleich $\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin\alpha$.

3. Ein konvexes Polygon, welches ganz im Inneren eines anderen konvexen Polygons liegt, hat einen kleineren Inhalt als das letztere.

Von diesen Sätzen gehen wir aus und stützen uns auf folgende allgemeine Definition[3]) des Inhalts:

---

1) Man siehe z. B. Goursat, Cours d'analyse, vol. I, p. 167.

2) Grundlagen, Kapitel IV.

3) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III, 3, Heft 1, s. 60.

Digitized by Google

„Wenn ein endlicher ebener Bereich so beschaffen ist, daß die obere Grenze O der Flächeninhalte aller eingeschlossenen Bereiche von der vorher betrachteten Art (Polygone) mit der unteren Grenze U der Inhalte aller einschließenden Bereiche dieser Art zusammenfällt, so nennt man den gemeinsamen Wert der beiden erwähnten Grenzen den Flächeninhalt des Bereiches."

Aus dieser Definition folgt unmittelbar: Wenn ein Bereich Γ durch eine Gerade in zwei Bereiche getrennt wird, die auf verschiedenen Seiten dieser Geraden liegen, und wenn jeder dieser Bereiche einen Inhalt hat, so hat Γ einen Inhalt, der gleich der Summe der Inhalte der beiden Bereiche ist. Demnach reicht es hin, um den vorliegenden Satz zu beweisen, zu zeigen, daß jeder Konvexsector einen Inhalt hat, da der Inhalt der konvexen Curve Γ durch eine Summe von vier oder weniger als vier solcher Inhalte hervorgeht.

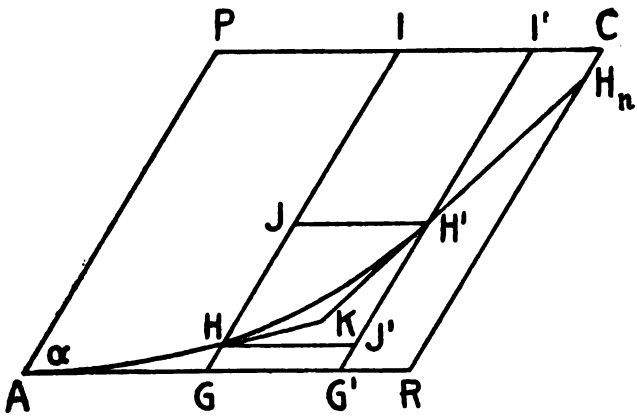
Wir betrachten jetzt einen Konvexsector S, der von dem einschließenden Parallelogramm verschieden sei, da nach (2.) ein Parallelogramm gewiß einen Inhalt hat. Es sei, wie in dem obigen Paragraphen, der Konvexsector mit APC, das einschließende Parallelogramm mit $ARCP$ bezeichnet.

Nun liegt jedes einfache Polygon, welches innerhalb S ist, auch innerhalb des Parallelogramms $ARCP$, und hat nach (3.) oben einen kleineren Inhalt; darum existiert eine obere Grenze O der Inhalte solcher Polygone; jedes einfache Polygon, welches S einschließt, hat einen positiven Inhalt; darum existiert auch eine untere Grenze U der Inhalte solcher Polygone. Wir wollen beweisen, daß O gleich U ist. Da jedes innerhalb S liegende Polygon auch innerhalb jedes S einschließenden Polygons liegt, so ist klar, daß $U \geqq O$ ist.

Es seien $H(x,y)$ und $H'(x',y')$ zwei Punkte des Bogens AC, und $x' > x$; es seien weiter G, J, I respektiv die Punkte $(x,0)$, (x,y'), $(x,\overline{AP})$, und G', J', I' respektiv die Punkte $(x',0)$, (x',y), $(x',\overline{AP})$; (man sehe die begleitende Figur). Wenn die Strecke HH' dem Bogen AC nicht angehört, so liegt die Halbtangente in H auf der Seite von H' im Winkel $H'HJ'$, und die Halbtangente in H' auf der Seite von H im Winkel $HH'J'$, und daher schneiden sich diese Halbtangenten im Punkte K innerhalb des Dreiecks $HJ'H'$; falls jedoch die Strecke HH' dem Bogen AC angehört, so bedeute K irgend einen Punkt dieser Strecke. Nun hat man nach (3.) (s. 25) die folgenden Inhaltsungleichungen:

$$IHJ'I' \geqq IHKH'I' \geqq IHH'I' \geqq IJH'I'$$

Digitized by Google



wobei das erste und dritte Gleichheitszeichen dann und nur dann gelten wenn $y = y' = 0$, also nicht immer gelten; das zweite Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn die Strecke HH' dem Bogen AC angehört. Aus diesen Ungleichungen hat man, da

$$IHJ'I' - IJH'I' = JHH'J'$$

ist,

$$JHH'J' \geqq IHKH'I' - IHH'I' \geqq 0,$$

wobei das erste Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $y = y' = 0$, also nicht immer, das zweite, wenn die Strecke HH' dem Bogen AC angehört.

Es seien nun

$$G_0 = A,\ G_1,\ G_2,\ \ldots\ G_{n-1},\ G_n = R$$

Punkte die die Strecke AR in n gleiche Strecken teilen; es schneide die durch $G_i (i < n)$ gehende zur Geraden AP Parallele den Bogen AC in H_i und die Strecke PC in I_i; H_n sei derjenige gemeinsame Punkt der Curve Γ und der Strecke RC, für welchen y den kleinsten Wert hat, $I_n = C$; jede der Geraden H_iH_{i+1}, die S schneidet, teilt S in zwei konvexe Curven; demnach entsteht, wenn die n Strecken, $H_0H_1, \ldots H_{n-1}H_n$ gezogen werden, ein konvexes innerhalb S liegendes Polygon von Inhalt p, wo

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} I_iH_iH_{i+1}I_{i+1}.$$

Jede Halbtangente in H_i, falls sie nicht mit einer der Geraden AR, CR zusammenfällt, schneidet das Parallelogramm $ARCP$ und teilt dieses in zwei konvexe Polygone, von denen dasjenige, das auf derselben Seite der betrachteten Tangente wie P liegt, S einschließt; demnach bilden die Strecken CP, PA, mit ihren End-

Digitized by Google

punkten, die Halbtangente in A, AR, die beiden Halbtangenten in $H_i (n > i > 0)$, diejenigen in H_n wenn $H_n \neq C$, oder, falls $H = C$, nur diejenige, die von der Seite von A herrührt, ein konvexes S einschließendes Polygon von Inhalt q, wobei

$$q = \sum_{i=0}^{n-1} I_i H_i K H_{i+1} I_{i+1}.$$

wobei K der Schnittpunkt der Halbtangente in H_i auf der Seite von R mit derjenigen in H_{i+1} auf der Seite von A ist. Falls die Strecke $H_i H_{i+1}$ dem Bogen AC angehört, nehmen wir für K irgend einen Punkt dieser Strecke.

Es folgt aus den Definitionen von O und U

$$q \geqq U \geqq O \geqq p,$$

demnach

$$q - p \geqq U - O \geqq 0.$$

Nach dem vorhergehenden ist aber

$$\sum_{i=0}^{n-1} J_i H_i H_{i+1} J_{i+1} = \overline{AP} \cdot \frac{\overline{AR}}{n} \sin\alpha > q - p.$$

also

$$\overline{AP} \cdot \frac{\overline{AR}}{n} \sin\alpha > U - O \geqq 0.$$

Da n eine beliebige ganze positive Zahl ist, so ist $U = O$. Da U zwischen p und q liegt, und da bei unendlich wachsendem n diese gleichen Grenzwerten zustreben, hat man

$$\text{Inhalt von } S = U = \lim_{n=\infty} (p) = \sin\alpha \int_0^{\overline{AR}} (\overline{AP} - y)\, dx.$$

Da dieses Integral augenscheinlich einen Wert hat, denn y ist eine nie abnehmende und stetige Funktion von x, so könnte man versuchen, den Inhalt durch dieses Integral zu definieren. Das geht aber nicht, denn durch eine solche Definition des Inhalts würde sein Wert von der Teilung in Konvexsectoren abhängig gemacht.

§ 8. Schluß.

Wir beweisen nur noch einen Satz, der vieles Interesse bietet, indem neue Klassen konvexer Curven dadurch bekannt werden.

Satz XXIII. Wenn eine konvexe Curve aus einem Punkt oder durch Parallelen derart auf eine zweite Ebene projiziert wird, daß keiner ihrer Randpunkte ins unendliche fällt, so ist die projizierte Curve wieder eine konvexe, und ihre inneren Punkte sind

Digitized by Google

die projizierten der inneren Punkte der gegebenen Curve.

Wenn I zwischen C_1 und C_2 liegt, und wenn I', C_1', und C_2' respektiv die Projektionen dieser Punkte sind, so liegt I' zwischen C_1' und C_2', solange kein Punkt der Strecke $C_1 C_2$ ins Unendliche fällt. Aus dieser Tatsache geht der Beweis sofort hervor.

Durch Anwendung dieses Satzes und der Sätze I, X, XI erhält man folgende konvexe Curven:

Jede Ellipse ist eine konvexe Curve;

Jeder Kegelschnittbogen mit der entsprechenden Sehne ist eine konvexe Curve;

Es existiert eine große Klasse konvexer Curven, die aus beliebig viel Kegelschnittbogen bestehen.

Es sollen zum Schluß noch zwei interessante verwandte Probleme erwähnt werden:

1. Die Entwickelung einer Theorie konvexer Curven in einer Nicht-Euklidischen Ebene.

2. Die Entwickelung einer Theorie konvexer Flächen und Polyeder.

Das letztere bietet großes Interesse und ist in einigen Beziehungen den vorliegenden Untersuchungen eng verwandt, ist aber in Bezug auf Tangenten, Stetigkeit, Flächen- und Rauminhalt viel schwieriger.

Harvard University,
Cambridge, U. S. A.

Digitized by Google

Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\varkappa(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen und **Edmund Landau** in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Juli durch Herrn D. Hilbert.

Einleitung.

Die Riemannsche Zetafunktion der komplexen Variabeln $s = \sigma + ti$ ist in der Halbebene $\sigma > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert. Bekanntlich ist

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \tag{1}$$

eine ganze Funktion; dieselbe ist bei festem $\sigma_0 > 1$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ beschränkt, wie aus

$$|\zeta(s)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} = \zeta(\sigma_0)$$

hervorgeht.

Aus der Riemannschen Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ folgt in Verbindung mit Eigenschaften der Gammafunktion leicht, daß bei festem $\sigma_0 < 0$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ die Funktion (1) nicht beschränkt ist. Landau[1]) bewies im Jahre 1908, daß für jedes $\sigma_0 < \frac{1}{2}$ die Funktion (1) in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ nicht beschränkt ist.

---

1) *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXVI (1908), S. 169—302], S. 265—266.

Digitized by Google

Es war bisher für jedes σ_0 des Intervalls $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 \leqq 1$ ein ungelöstes Problem[1]), zu entscheiden, ob die Funktion (1) in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ beschränkt ist oder nicht.

Es ist nunmehr Bohr gelungen, dies Problem vollständig mit dem unerwarteten Ergebnis zu erledigen, *daß bereits in der Halbebene* $\sigma > 1$ *die Funktion* (1) *nicht beschränkt ist.* § 1 des Folgenden rührt von ihm allein her und liefert diesen Nachweis. Die späteren Paragraphen sind in gemeinsamen Besprechungen beider Verfasser entstanden; insbesondere rühren § 2 und § 6 von Landau her, an dessen frühere Untersuchungen über den Picardschen Satz sie anknüpfen. Wir verdanken zwei Abhandlungen von Herrn Lindelöf[2]) die Möglichkeit, den Satz des § 1 zu den merkwürdigen Folgerungen verwenden zu können, die wir in dieser Arbeit darlegen werden.

Wie gesagt, enthält § 1 den Nachweis, daß die Funktion (1) für $\sigma > 1$ nicht beschränkt ist, und § 2 einen allgemeinen Satz über analytische Funktionen, der mit dem Picardschen Satz in Zusammenhang steht und weiterhin eine wesentliche Rolle spielt.

§ 3 stellt fest, *daß für jedes* $\delta > 0$ *die Zetafunktion im Streifen* $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$ *höchstens einen Wert ausläßt und sogar höchstens einen Wert nicht unendlich oft annimmt.*

§ 4 enthält eine schärfere Fassung des Satzes aus § 1. Bohrs Bemeismethode gestattet gleichzeitig zu beweisen, daß in der Halbebene $\sigma > 1$ nicht einmal[3])

$$\zeta(s) = o(\log\log t)$$

ist; aus § 1 geht nur hervor, daß für $\sigma > 1$ nicht

$$\zeta(s) = O(1)$$

ist.

In § 5 wird bewiesen, daß auch auf der Geraden $\sigma = 1$ nicht

$$\zeta(s) = o(\log\log t)$$

ist.

---

1) Vergl. Franel, *Question 72* [L'Intermédiaire des Mathématiciens, Bd. I (1894), S. 25 und Bd. V (1898), S. 97] und Lindelöf, *Quelques remarques sur la croissance de la fonction* $\zeta(s)$ [Bulletin des Sciences mathématiques, Ser. II, Bd. XXXII (1908), Teil I, S. 341—356], S. 355—356.

2) Vergl. die in der vorigen Fußnote genannte Arbeit, S. 355—356, und die früher erschienene Arbeit: *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* [Acta societatis scientiarum fennicae, Bd. XXXV (1909), No. VII, 35 S.], S. 35.

3) Über die Bezeichnungen o und O vergl. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig und Berlin (Teubner), 1909], S. 59—61.

Digitized by Google

§ 6 enthält eine für das Folgende erforderliche Verschärfung des allgemeinen funktionentheoretischen Satzes aus § 2.

In § 7 wird das Ergebnis des § 3 folgendermaßen verschärft. Wenn a und b zwei verschiedene Zahlen sind, so war in § 3 festgestellt, daß die Gleichung

$$(\zeta(s)-a)\,(\zeta(s)-b) = 0 \tag{2}$$

für jedes $\delta > 0$ im Streifen $1-\delta < \sigma < 1+\delta$ unendlich viele Wurzeln enthält. § 7 beweist die Existenz unendlich vieler Wurzeln der Gleichung (2) sogar im Gebiete

$$t \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{(\log\log t)^\alpha} < \sigma < 1 + \frac{1}{(\log\log t)^\alpha},$$

welches sich nach oben unendlich verschmälert.

Die in § 1 für $\zeta(s)$ angewandte Methode läßt sich in § 8 leicht zur Herleitung eines entsprechenden allgemeinen Satzes über Dirichletsche Reihen mit positiven Koeffizienten benutzen.

§ 9 wendet diesen Satz auf diejenige Zetafunktion $\zeta_\varkappa(s)$ an, welche einem beliebigen algebraischen Zahlkörper $\varkappa$ (vom Grade k) entspricht und auf Grund ihrer Definitionsgleichung für $\sigma > 1$ regulär ist. Landau[1]) hatte 1903 bewiesen, daß

$$\zeta_\varkappa(s) - \frac{\beta}{s-1},$$

wo β eine vom Körper abhängige positive Konstante ist, für $\sigma > 1 - \frac{1}{k}$ regulär ist. Ob für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper die Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ über die Gerade $\sigma = 1 - \frac{1}{k}$ fortsetzbar ist oder nicht, ist auch heute noch völlig unentschieden. Um so merkwürdiger ist es, daß es im vorliegenden Paragraphen u. a. gelingt, zu beweisen: *Die Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ nimmt in der Halbebene $\sigma > 1 - \frac{1}{k}$ entweder alle Werte an oder alle Werte mit einer einzigen Ausnahme.*

§ 1.

Satz I: *Es liegt*

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right|$$

in der Halbebene $\sigma > 1$ nicht unterhalb einer endlichen Schranke.

1) *Ueber die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Vertheilung der Primideale* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXV (1903), S. 64—188], S. 81.

Digitized by Google

Vorbemerkung: Diese Behauptung ist offenbar identisch mit der folgenden:

Es liegt

$$|\zeta(s)|$$

im Gebiete

$$\sigma > 1, \quad t \geqq 1$$

nicht unterhalb einer endlichen Schranke.

Denn

1) es ist

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right|$$

für $\sigma > 1$, $0 \leqq t < 1$ beschränkt;

2) in konjugierten Punkten der Halbebene $\sigma > 1$ hat die Funktion

$$\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{s-1}\right|$$

denselben Wert;

3) es ist

$$\left|\frac{1}{s-1}\right|$$

in der Viertelebene $\sigma > 1$, $t \geqq 1$ beschränkt.

Mit anderen Worten, es lautet die

Behauptung: Nach Annahme einer positiven Zahl g gibt es ein $\sigma_0 > 1$ und ein $t_0 \geqq 1$ derart, daß im Punkte $s_0 = \sigma_0 + t_0 i$

$$|\zeta(s_0)| > g$$

ist.

Beweis: Wir betrachten die Zetafunktion auf der Geraden

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{4g};$$

genau auf dieser Geraden werden wir einen Punkt mit den verlangten Eigenschaften angeben.

N sei irgend eine feste ganze Zahl $\geqq 1$; wir werden später über dieselbe verfügen. Wir betrachten die Summe der ersten N Glieder der Reihe

$$\zeta\left(1 + \frac{1}{4g} + ti\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4g}+ti}},$$

d. h. den Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4g}+ti}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-ti\log n}}{n^{1+\frac{1}{4g}}}.$$

Digitized by Google

Wir wollen zunächst die Existenz einer Zahl $t \geqq 1$ feststellen, für welche die Amplituden aller Glieder, nämlich die N Zahlen

$$-t\log 1, \quad -t\log 2, \quad \ldots, \quad -t\log N,$$

wenn man sie auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π, betrachtet, zwischen $-\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{3}$ liegen. Diese Behauptung der simultanen Lösbarkeit von

$$|-t\log 1 - 2\pi x_1| < \frac{\pi}{3},$$

$$|-t\log 2 - 2\pi x_2| < \frac{\pi}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$|-t\log N - 2\pi x_N| < \frac{\pi}{3},$$

d. h. von

$$\left|t\frac{-\log 1}{2\pi} - x_1\right| < \frac{1}{6},$$

$$\left|t\frac{-\log 2}{2\pi} - x_2\right| < \frac{1}{6},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\left|t\frac{-\log N}{2\pi} - x_N\right| < \frac{1}{6}$$

in ganzzahligen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ nebst einem $t \geqq 1$ ist richtig auf Grund des Kroneckerschen[1]) Satzes:

„Wenn N reelle Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ und eine positive ganze Zahl q gegeben sind, so gibt es ein ganzzahliges[2]) $t \geqq 1$ {übrigens[3]) sogar im Intervall $1 \leqq t \leqq q^N$} und N ganze Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ derart, daß die Ungleichungen

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} |t\alpha_1 - x_1| < \dfrac{1}{q}, \\ \ldots\ldots \\ |t\alpha_N - x_N| < \dfrac{1}{q} \end{cases}$$

erfüllt sind“[4]).

1) *Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln* [Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1884, S. 1071—1080; Werke, Bd. III, Halbband I (1899), S. 31—46], S. 1073—1074 bezw. S. 36—37.

2) Die Ganzzahligkeit von t gebrauchen wir nicht einmal.

3) Dies werden wir in § 4 verwenden.

4) Diesen Satz hat Kronecker einfach so bewiesen: Man setze $u = 0, 1, 2, \ldots, q^N$ und bestimme zu jedem u die ganzen Zahlen $y_1(u), \ldots, y_N(u)$ so, daß

Digitized by Google

Wenn $t = t_0 = t_0(N) \geqq 1$ so gewählt ist, daß für $n = 1, 2, \ldots, N$

$$|-t_0 \log n - 2\pi x_n| < \frac{\pi}{3}$$

ist, ergibt sich für diese n weiter

$$\cos(-t_0 \log n) > \frac{1}{2}.$$

Daher ist[1])

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4g}+t_0 i}}\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-t_0 i \log n}}{n^{1+\frac{1}{4g}}}\right| \geqq \Re \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-t_0 i \log n}}{n^{1+\frac{1}{4g}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(-t_0 \log n)}{n^{1+\frac{1}{4g}}} > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4g}}}.$$

Hieraus folgt

$$\left|\zeta\left(1+\frac{1}{4g}+t_0 i\right)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4g}+t_0 i}}\right| \geqq \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4g}+t_0 i}}\right| - \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4g}+t_0 i}}\right|$$

$$> \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4g}}} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{4g}}} > \frac{1}{2} \int_{1}^{N} \frac{du}{u^{1+\frac{1}{4g}}} - \int_{N}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\frac{1}{4g}}}$$

$$= 2g\left(1 - \frac{1}{N^{\frac{1}{4g}}}\right) - \frac{4g}{N^{\frac{1}{4g}}} = g\left(2 - \frac{6}{N^{\frac{1}{4g}}}\right).$$

$$0 \leqq u\alpha_1 - y_1 < 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$0 \leqq u\alpha_N - y_N < 1$$

ist. Wenn in Bezug auf jede Koordinate des N-dimensionalen Raums das Intervall $0 \leqq z < 1$ in die q Teile

$$0 \leqq z < \frac{1}{q},\ \frac{1}{q} \leqq z < \frac{2}{q},\ \ldots,\ \frac{q-1}{q} \leqq z < 1$$

geteilt wird, so müssen mindestens einem der so entstehenden q^N Teilgebiete zwei zu verschiedenen u gehörige Punkte $(u\alpha_1 - y_1, \ldots, u\alpha_N - y_N)$ entsprechen. Wenn die positiv genommene Differenz dieser beiden Werte von u gleich t gesetzt wird, ist offenbar $1 \leqq t \leqq q^N$, und die Ungleichungen (3) sind erfüllt. Diese Beweismethode liefert offenbar (was wir in § 8 verwenden werden), daß statt $t \geqq 1$ auch $t \geqq \tau$ vorgeschrieben werden kann, wo τ irgend eine feste positive Zahl ist. Denn statt von $u = 0, 1, 2, \ldots, q^N$ kann man natürlich von $u = 0, \tau', 2\tau', \ldots, q^N\tau'$ ausgehen, wo τ' irgend eine ganze Zahl $\geqq \tau$ ist.

1) $\Re(s)$ bedeute stets den reellen Teil einer komplexen Zahl s, $\Im(s)$ den Koeffizienten des rein imaginären Teils.

Digitized by Google

Zu jedem ganzen $N \geqq 1$ gibt es also ein solches $t_0 \geqq 1$, daß

$$\left|\zeta\left(1+\frac{1}{4g}+t_0 i\right)\right| > g\left(2-\frac{6}{N^{\frac{1}{4g}}}\right)$$

ist.

Nun wählen wir $N = N(g)$ so, daß

$$2-\frac{6}{N^{\frac{1}{4g}}} > 1$$

ist. Dann ist für das obige $t_0 = t_0(N) = t_0(g)$

$$\left|\zeta\left(1+\frac{1}{4g}+t_0 i\right)\right| > g,$$

womit der Satz I bewiesen ist.

§ 2.

Satz II: *Es sei die Potenzreihe*

$$F(s) = a_0 + a_1(s-s_0) + a_2(s-s_0)^2 + \cdots$$

für $|s-s_0| < r$ *konvergent und in jedem Punkte dieses Kreises* $\neq a$ *und* $\neq b$, *wo* a *und* b *zwei verschiedene Konstanten sind. Es sei ferner*

$$|a_0| \leqq A$$

und

$$0 < \vartheta < 1.$$

Dann ist für $|s-s_0| \leqq \vartheta r$

$$|F(s)| < \Omega = \Omega(a, b, \vartheta, A),$$

wo Ω *nur von den dahinter in der Klammer stehenden Größen* a, b, ϑ, A *abhängt, d. h. von* s_0, r, a_0, a_1, a_2, ... *unabhängig ist*[1]).

---

1) Herr Schottky (*Über den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen* [Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Jahrgang 1904, S. 1244—1262], S. 1255—1256) hat entdeckt: Bei festen a, b, ϑ, a_0 existiert ein $\Omega = \Omega(a, b, \vartheta, a_0)$ derart, daß jede für $|s-s_0| < r$ reguläre und von a, b verschiedene Funktion

$$F(s) = a_0 + a_1(s-s_0) + \cdots$$

für $|s-s_0| \leqq \vartheta r$ die Ungleichung

$$|F(s)| < \Omega$$

erfüllt. Hierfür wurden dann von ihm selbst und anderen mehrere modifizierte Beweisanordnungen angegeben. Im Texte wird die von Herrn Carathéodory herrührende, von Landau (*Über den Picard'schen Satz* [Vierteljahrsschrift der

Digitized by Google

Für konstante a, b, ϑ, A ist daher $\mathfrak{Q}$ eine absolute Konstante.

Vorbemerkung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf beim Beweise

$$s_0 = 0, \quad r = 1, \quad a = 0, \quad b = 1$$

angenommen werden; denn sonst hat man nur

$$s - s_0 = rz$$

zu setzen und die Potenzreihe in z

$$F_1(z) = \frac{F(s) - a}{b - a} = \frac{a_0 - a}{b - a} + \frac{a_1}{b - a} rz + \frac{a_2}{b - a} r^2 z^2 + \cdots$$

zu betrachten.

Es sei also

$$F(s) = a_0 + a_1 s + \cdots$$

für $|s| < 1$ konvergent, $\neq 0$ und $\neq 1$; es sei ferner

$$|a_0| \leqq A$$

und

$$0 < \vartheta < 1.$$

Zu beweisen ist: Für $|s| \leqq \vartheta$ ist

$$|F(s)| < \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}(\vartheta, A).$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist zunächst $F(0) = a_0$ von 0 und 1 verschieden. Es sei $J(x)$ die bekannte elliptische Modulfunktion und

$$\omega(y) = c_0 + c_1 (y - a_0) + \cdots$$

ein so gewählter Zweig der zu $J(x)$ inversen Funktion, daß c_0 dem Bereich

$$|c_0| \geqq 1, \quad -\frac{1}{2} \leqq \Re(c_0) \leqq \frac{1}{2}$$

angehört.

Wegen

$$|a_0| \leqq A$$

ist nach bekannten Eigenschaften der Modulfunktion

$$\Im(c_0) = \Im(\omega(a_0)) \leqq A_1,$$

wo A_1 bei festem A absolut konstant ist; überdies ist

$$\Im(c_0) \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. LI (1906), S. 252—318], S. 271—273) seinerzeit ausführlich dargestellte Beweisanordnung dazu benutzt, um die nicht selbstverständliche und für unseren Zweck wesentliche Tatsache zu konstatieren, daß, wenn a_0 im Gebiete $|a_0| \leqq A$ variabel ist, ein endliches $\mathfrak{Q}$ gleichmäßig für alle diese a_0 gewählt werden kann.

Digitized by Google

Aus unserer Voraussetzung

$$F(s) \neq 0 \text{ und } \neq 1 \text{ für } |s| < 1$$

folgt, daß die Funktion

$$G(s) = \varpi(F(s)) = c_0 + c_1 a_1 s + \cdots$$

für $|s| < 1$ regulär ist und positiven imaginären Teil hat. Wenn nun $\bar{c}_0$ die zu c_0 konjugierte komplexe Zahl bezeichnet, ist die Funktion

$$H(s) = \frac{G(s) - c_0}{G(s) - \bar{c}_0} = d_1 s + d_2 s^2 + \cdots$$

für $|s| < 1$ regulär und genügt ebenda der Ungleichung

$$|H(s)| < 1.$$

Weil $H(s)$ im Punkte $s = 0$ verschwindet, ist

$$\frac{H(s)}{s}$$

für $|s| < 1$ regulär. Nun ist bei festem positivem $\varrho < 1$ für $\varrho < |s| < 1$

$$\left|\frac{H(s)}{s}\right| < \frac{1}{\varrho};$$

daher ist für $|s| < 1$

$$\left|\frac{H(s)}{s}\right| < \frac{1}{\varrho};$$

da dies für alle positiven $\varrho < 1$ gilt, ist für $|s| < 1$

$$\left|\frac{H(s)}{s}\right| \leqq 1,$$

$$|H(s)| \leqq |s|.$$

Insbesondere ist für $|s| \leqq \vartheta$

$$|H(s)| \leqq \vartheta.$$

Nun ist für $|s| \leqq \vartheta$

$$G(s) = \frac{c_0 - \bar{c}_0 H(s)}{1 - H(s)} = \Re(c_0) + \Im(c_0) i \frac{1 + H(s)}{1 - H(s)},$$

also

$$\Im(G(s)) = \Im(c_0) \Re\left(\frac{1 + H(s)}{1 - H(s)}\right) \leqq \Im(c_0) \left|\frac{1 + H(s)}{1 - H(s)}\right|$$

$$< \Im(c_0) \frac{2}{1 - \vartheta} \leqq A_1 \frac{2}{1 - \vartheta} = A_2,$$

wo A_2 (sowie in der Folge A_3 und A_4) nur von A und ϑ abhängt.

Digitized by Google

Andererseits ist, wenn

$$H(s) = \Theta(s)\, e^{\varphi(s)\, i} = \Theta e^{\varphi i}$$

gesetzt wird, wegen $\Theta \leqq \vartheta$

$$\Re\left(\frac{1+H(s)}{1-H(s)}\right) = \Re\left(\frac{1+\Theta\cos\varphi+\Theta i\sin\varphi}{1-\Theta\cos\varphi-\Theta i\sin\varphi}\right) = \frac{1-\Theta^2}{1-2\Theta\cos\varphi+\Theta^2}$$

$$\geqq \frac{1-\Theta^2}{1+2\Theta+\Theta^2} = \frac{1-\Theta}{1+\Theta} > \frac{1-\vartheta}{2},$$

also

$$\Im(G(s)) > \Im(c_0)\,\frac{1-\vartheta}{2} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{1-\vartheta}{2} = \frac{1}{A_3}.$$

Da nun die Modulfunktion $J(x)$ im Streifen

$$\frac{1}{A_3} < \Im(x) < A_3$$

absolut genommen unterhalb einer festen Schranke A_4 liegt, ist für $|s| \leqq \vartheta$

$$|F(s)| = |J(G(s))| < A_4 = \mathfrak{A}(\vartheta, A),$$

womit der Satz II bewiesen ist.

§ 3.

Satz III: *Es seien a und b zwei beliebige verschiedene komplexe Konstanten und δ, τ zwei positive Konstanten. Dann gibt es im Gebiete*

$$1-\delta < \sigma < 1+\delta, \qquad t > \tau$$

mindestens einen Punkt s, für welchen

$$(\zeta(s)-a)(\zeta(s)-b) = 0$$

ist [1]).

---

1) Herr Lindelöf hat in seiner auf S. 304, Anm. 2 genannten Arbeit (S. 35) zuerst die Existenz einer Zahl σ_0 festgestellt, für welche das Gebiet

$$\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta, \qquad t > \tau$$

eine Wurzel (d. h. unendlich viele Wurzeln) der Gleichung

$$(\zeta(s)-a)(\zeta(s)-b) = 0$$

enthält. Er konnte aber nur $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 \leqq 1$ beweisen, nicht σ_0 bestimmen, während die vorliegende Arbeit $\sigma_0 = 1$ ergeben hat. Die Methode, durch welche Herr Lindelöf die Existenz jenes σ_0 entdeckt hat, ist kurz folgende. Es ergibt sich leicht die Existenz eines σ_0 des Intervalls $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 \leqq 1$ derart, daß $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ für jedes $\delta > 0$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0 + \delta$ beschränkt, dagegen in der Halbebene $\sigma > \sigma_0 - \delta$ nicht beschränkt ist. Von diesem σ_0 führte er den obigen Nach-

Digitized by Google

Vorbemerkung: Damit ist bewiesen, daß die Funktion $\zeta(s)$ im Streifen

$$1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$$

mindestens einen der beiden Werte a, b unendlich oft annimmt. Es ist damit sogar bewiesen, daß für alle c mit höchstens einer Ausnahme die Gleichung

$$\zeta(s) = c$$

eine unendliche Folge von Wurzeln $s_1, s_2, \ldots$ besitzt, für welche

$$\lim_{n=\infty} \Re(s_n) = 1$$

ist.

Beweis: Gesetzt, der Satz sei falsch. Dann wäre für $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$, $t > \tau$ beständig

$$\zeta(s) \neq a$$

und

$$\zeta(s) \neq b.$$

Wir wenden den Satz II nun an auf: die Funktion

$$F(s) = \zeta(s),$$

den Punkt

$$s_0 = 1 + \frac{\delta}{3} + ti,$$

wo $t \geqq \tau + \frac{2\delta}{3}$ ist, den Kreis

$$|s - s_0| < \frac{2\delta}{3} = r$$

und die Zahlen

$$\vartheta = \frac{1}{2},$$

$$A = \zeta\left(1 + \frac{\delta}{3}\right).$$

Die Voraussetzungen des Satzes II sind, da jener Kreis dem Gebiete $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$, $t > \tau$ angehört, offenbar erfüllt, insbe-

---

weis auf Grund allgemeiner funktionentheoretischer Sätze, welche eine Fortführung der Landau-Schottky-Carathéodoryschen Fragestellungen sind. Doch bedarf es der Einführung jener neuen Lindelöfschen Gedanken für unsere Zwecke nicht. Es genügt uns hier der unmittelbar aus den älteren Carathéodoryschen Formeln ableitbare Satz II; ebenso wird uns später in § 6 der aus den älteren Landauschen Formeln zu schließende Satz VI genügen.

Digitized by Google

sondere die Relation

$$|a_0| \leqq A$$

wegen

$$|\zeta(s_0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{3}+ti}}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{3}}} = \zeta\left(1+\frac{\delta}{3}\right).$$

Der Satz II ergibt also für $|s-s_0| \leqq \vartheta r = \frac{\delta}{3}$, d. h. insbesondere auf der horizontalen Strecke $s = \sigma + ti$, $1 \leqq \sigma \leqq 1+\frac{2\delta}{3}$, die Abschätzung

$$|\zeta(s)| < \mathfrak{Q}\left(a, b, \frac{1}{2}, \zeta\left(1+\frac{\delta}{3}\right)\right) = \mathfrak{Q},$$

wo $\mathfrak{Q}$ eine absolute Konstante ist, da ja a, b und δ fest zu denken sind; d. h. $\mathfrak{Q}$ hängt von σ und t nicht ab, wenn nur

$$1 \leqq \sigma \leqq 1+\frac{2\delta}{3}, \quad t \geqq \tau + \frac{2\delta}{3}$$

ist.

Also wäre die Funktion $\zeta(s)$ für

$$1 \leqq \sigma \leqq 1+\frac{2\delta}{3}, \quad t \geqq 1$$

beschränkt, folglich in der ganzen Viertelebene

$$\sigma > 1, \quad t \geqq 1$$

beschränkt, im Gegensatz zum Satz I.

Damit ist der Satz III bewiesen.

§ 4.

Satz IV: *Es gibt eine positive Konstante K derart, daß die Ungleichung*

$$|\zeta(s)| > \frac{1}{K} \log\log t$$

bei jedem gegebenen τ im Gebiete $\sigma > 1$, $t > \tau$ eine Lösung $s_0 = \sigma_0 + t_0 i$ besitzt.

Zum Beispiel hat $K = 9$ diese Eigenschaft.

Vorbemerkung: Dieser Satz läßt sich kurz so formulieren: Es ist in der Halbebene $\sigma > 1$ nicht

$$\zeta(s) = o\,(\log\log t).$$

Digitized by Google

Beweis: τ darf > 1 angenommen werden.

Wir wählen eine positive ganze Zahl g so, daß für $\sigma > 1$, $1 \leqq t \leqq \tau$

$$|\zeta(s)| \leqq g$$

ist. In § 1 war bewiesen: Es gibt für jedes ganze $N \geqq 1$ ein t_0 derart, daß

$$1 \leqq t_0 \leqq 6^N$$

und

$$\left|\zeta\left(1+\frac{1}{4g}+t_0 i\right)\right| > g\left(2-\frac{6}{N^{\frac{1}{4g}}}\right)$$

ist. Wir setzen jetzt

$$N = 6^{4g};$$

dann haben wir ein $t_0 = t_0(g)$ derart, daß

$$1 \leqq t_0 \leqq 6^{(6^{4g})}$$

und

$$\left|\zeta\left(1+\frac{1}{4g}+t_0 i\right)\right| > g$$

ist. Wegen der Definition von g ist hierbei eo ipso

$$t_0 > \tau.$$

Aus

$$1 < \tau < t_0 \leqq 6^{(6^{4g})}$$

folgt

$$\log t_0 \leqq 6^{4g} \log 6,$$
$$\log\log t_0 \leqq 4g \log 6 + \log\log 6 < 8g + 1 \leqq 9g,$$
$$g > \frac{1}{9}\log\log t_0,$$
$$\left|\zeta\left(1+\frac{1}{4g}+t_0 i\right)\right| > \frac{1}{9}\log\log t_0,$$

womit der Satz IV bewiesen ist.

§ 5.

Satz V: *Es ist*

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|\zeta(1+ti)|}{\log\log t} > 0,$$

genauer

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|\zeta(1+ti)|}{\log\log t} \geqq \frac{1}{K},$$

wo K die Bedingung des Satzes IV erfüllt.

Digitized by Google

Beweis: Angenommen, der Satz sei falsch. Dann gäbe es ein $h < \frac{1}{K}$ derart, daß von einer gewissen Stelle an, d. h. für alle $t \geqq \tau$,

$$|\zeta(1+ti)| < h \log\log t$$

ist. τ kann dabei > 3 angenommen werden.

Diese Annahme wird zu einem Widerspruch mit dem folgenden Phragmén-Lindelöfschen[1]) Satze führen:

„Es sei $\sigma_1 < \sigma_2$; es sei eine analytische Funktion $f(s)$ auf den drei Strecken

$$1)\quad \sigma = \sigma_1, \quad t \geqq t_0,$$
$$2)\quad \sigma = \sigma_2, \quad t \geqq t_0,$$
$$3)\quad t = t_0, \quad \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$$

regulär und beschränkt; es sei dort $|f(s)| \leqq C$; es sei $f(s)$ in dem dazwischen liegenden unendlichen Gebiet

$$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \quad t > t_0$$

regulär und für wachsendes t gleichmäßig $O(t^b)$, wo b eine Konstante bedeutet. Dann ist auch im Innern des Gebietes

$$|f(s)| \leqq C.$$"

Wir werden sehen, daß die Voraussetzungen dieses Satzes für folgende Funktion im Gebiete $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq \tau$ erfüllt wären:

$$f(s) = \frac{\zeta(s)}{\log\log s} \frac{s}{s+\gamma};$$

hierbei bezeichnet $\log\log s$ den in der von 1 bis $-\infty$ längs der reellen Achse aufgeschnittenen Ebene regulären Zweig, welcher für reelle $s > 1$ reell ist, und γ ist eine derartige[2]) positive Konstante, daß auf den beiden Begrenzungsstrecken $\sigma = 2$, $t \geqq \tau$ und $t = \tau$, $1 \leqq \sigma \leqq 2$

$$|f(s)| < h$$

ist. Auf der dritten Begrenzungsstrecke $\sigma = 1$, $t \geqq \tau$ wäre nach der gemachten — zu widerlegenden — Annahme

$$|\zeta(s)| < h \log\log t;$$

ferner ist für $\sigma = 1$, $t \geqq \tau$ (übrigens auch für $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq \tau$)

---

1) *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* [Acta Mathematica, Bd. XXXI (1908), S. 381—406], S. 382.

2) Eine solche Wahl ist natürlich möglich.

Digitized by Google

$$|\log\log s| \geqq \Re \log\log s = \log|\log s| \geqq \log(\Re \log s)$$
$$= \log\log|s| > \log\log t$$

und

$$|s| = |\sigma + ti| < |\sigma + \gamma + ti| = |s + \gamma|;$$

daher ist auf der Strecke $\sigma = 1$, $t \geqq \tau$

$$|f(s)| < \frac{h \log\log t}{\log\log t} = h.$$

Also ist auf dem ganzen Rande des Gebietes $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq \tau$ die Funktion $f(s)$ regulär und

$$|f(s)| \leqq h.$$

Im Innern dieses Gebietes ist $f(s)$ auch regulär, und zwar ist wegen

$$\zeta(s) = O(t)$$

dort

$$f(s) = O\left(\frac{t}{\log\log t} \cdot \frac{t}{t}\right) = O(t).$$

Der Phragmén-Lindelöfsche Satz ergibt also auch im Innern des Gebietes

$$|f(s)| \leqq h,$$

d. h.

$$|\zeta(s)| \leqq h \left|\frac{s+\gamma}{s}\right| |\log\log s|. \tag{4}$$

Nun ist aber im Innern des Gebietes gleichmäßig

$$\lim_{t=\infty} \frac{|\log\log s|}{\log\log t} = 1.$$

Denn zu der vorhin festgestellten Ungleichung

$$|\log\log s| > \log\log t$$

kommt noch folgende Abschätzung nach oben hinzu: Es ist

$$\log\log s = \log\log|s| + \int_{|s|}^{s} \frac{d \log\log u}{du} du = \log\log|s| + \int_{|s|}^{s} \frac{du}{u \log u},$$

wo das Integral längs des Kreises $|u| = |s|$ von $|s|$ bis s erstreckt wird. Hieraus folgt

$$|\log\log s| < \log\log(2+t) + \frac{\pi}{2} |s| \frac{1}{|s| \log|s|} = \log\log t + o(1).$$

Der Quotient der rechten Seite von (4) durch $\log\log t$ hat daher im Intervall $1 \leqq \sigma \leqq 2$ für $t = \infty$ gleichmäßig den Limes h; also wäre gleichmäßig im Intervall $1 < \sigma < 2$

Digitized by Google

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|\zeta(s)|}{\log\log t} \leqq h;$$

dies gälte also auch gleichmäßig für $\sigma > 1$, was einen Widerspruch zum Satz IV darstellt.

Damit ist der Satz V bewiesen.

Zusatz: Ein Blick auf diesen Beweis lehrt, daß auch für jedes feste σ_0 des Intervalls $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 < 1$

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|\zeta(\sigma_0 + ti)|}{\log\log t} \geqq \frac{1}{K}$$

ist. Dies ergibt sich wörtlich ebenso, wenn man nur statt $1 \leqq \sigma \leqq 2$ überall $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq 2$ nimmt. Für $\sigma_0 < \frac{1}{2}$ ist die Relation

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|\zeta(\sigma_0 + ti)|}{\log\log t} = \infty$$

und schärferes bekannt[1]).

Folgerung: Aus der bekannten, für $\sigma > 0$ und jedes $m \geqq 1$ giltigen Formel

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1}\frac{1}{[m]^{s-1}} - s\sum_{n=m}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{(u-n)\,du}{u^{s+1}}$$

ergibt sich auf der Geraden $s = 1 + ti$, wenn $t \geqq 1$ ist,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{t} \frac{1}{n^{1+ti}} + \frac{1}{ti}\frac{1}{[t]^{ti}} - (1+ti)\sum_{n=t}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{(u-n)\,du}{u^{2+ti}},$$

$$\left|\zeta(1+ti) - \sum_{n=1}^{t} \frac{1}{n^{1+ti}}\right| < \frac{1}{t} + (1+t)\sum_{n=t}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{t} + (1+t)\int_{[t]}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{t} + \frac{1+t}{[t]} = O(1);$$

daher ist

---

1) Denn, wäre bei einem $\sigma_0 < \frac{1}{2}$

$$\zeta(\sigma_0 + ti) = O(\log\log t)$$

oder auch nur

$$\zeta(\sigma_0 + ti) = o\left(t^{\frac{1}{2} - \sigma_0}\right),$$

so würde aus der Riemannschen Funktionalgleichung bekanntlich

$$\zeta(1 - \sigma_0 + ti) = o\left(t^{\frac{1}{2} - \sigma_0}\right) O\left(t^{\sigma_0 - \frac{1}{2}}\right) = o(1)$$

folgen, was nach einem Satze von Landau (vergl. S. 264—266 der auf S. 1 zitierten Arbeit) unmöglich ist.

Digitized by Google

$$\zeta(1+ti) = \sum_{n=1}^{t} \frac{1}{n^{1+ti}} + O(1),^{1})$$

und Satz V lehrt, daß nicht

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{n^{1+ti}} = O(1),$$

ja sogar nicht

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{n^{1+ti}} = o(\log\log t)$$

ist.

§ 6.

Hilfssatz 1: *Es gibt eine absolute Konstante c derart, daß die Modulfunktion $J(x)$ von $x = u + vi$ der Ungleichung*

$$|J(x)| < e^{c\left(v+\frac{1}{v}\right)}$$

für alle x des Existenzbereiches $v > 0$ genügt.

Beweis: 1) Es sei

$$v \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Wenn

$$e^{2\pi i x} = z$$

gesetzt wird, hat bekanntlich die Modulfunktion $J(x)$, als Funktion von z betrachtet, für $z = 0$ einen Pol erster Ordnung und ist für $0 < |z| < 1$ regulär. Wegen

$$v \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

ist

$$0 < |z| = e^{-2\pi v} \leqq e^{-\pi\sqrt{3}},$$

also

$$|J(x)| < \frac{c_1}{|z|} = c_1 e^{2\pi v} < e^{cv} < e^{c\left(v+\frac{1}{v}\right)}.$$

2) Es sei

$$0 < v < \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Es werde eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ mit ganzzahligen Koeffizienten

1) Aus dieser Formel geht bekanntlich die zur Zeit bestmögliche Abschätzung von $|\zeta(1+ti)|$ nach oben hervor:

$$|\zeta(1+ti)| \leqq \sum_{n=1}^{t} \frac{1}{n} + O(1) = \log t + O(1).$$

Digitized by Google

und der Determinante 1 so bestimmt, daß

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = u' + v' i$$

dem Bereich

$$|x'| \geqq 1, \quad -\frac{1}{2} \leqq x' \leqq \frac{1}{2}$$

angehört. Dann ist

$$v' \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

ferner ist

$$v' \leqq \frac{1}{v};$$

denn in

$$v' = \Im\left(\frac{\alpha(u+vi)+\beta}{\gamma(u+vi)+\delta}\right) = \frac{v}{(\gamma u+\delta)^2+\gamma^2 v^2}$$

ist der Nenner rechts, weil γ und δ nicht beide 0 sind und $v < 1$ ist, $\geqq v^2$. Wegen

$$J(x') = J(x)$$

ist daher nach dem ersten Falle

$$|J(x)| < e^{cv'} \leqq e^{\frac{c}{v}} < e^{c\left(v+\frac{1}{v}\right)}.$$

Hilfssatz 2: *Es gibt eine absolute Konstante B, so daß für jedes $x = u + vi$ des Bereiches*

$$|x| \geqq 1, \quad -\frac{1}{2} \leqq u \leqq \frac{1}{2}, \quad v > 0 \tag{5}$$

die Ungleichung

$$\Im(x) = v \leqq B \log(|J(x)| + 2)$$

besteht.

Vorbemerkung: Dieser Hilfssatz läßt sich auch so formulieren: Es sei a_0 eine beliebige von 0 und 1 verschiedene komplexe Zahl, und $c_0 = \omega(a_0)$ habe die Bedeutung aus § 2. Dann ist

$$\Im(c_0) \leqq B \log(|a_0| + 2).$$

Genau in dieser Form werden wir den Hilfssatz später verwenden.

Beweis: $J(x)$ hat, als Funktion von $z = e^{2\pi i x}$ betrachtet, im Punkte $z = 0$ einen Pol erster Ordnung und ist für $0 < |z| < 1$ regulär. Daher ist für $0 < |z| \leqq e^{-\pi\sqrt{3}}$, d. h. für $v \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also gewiß im Bereiche (5)

$$|J(x)| + 2 > \frac{1}{B_1 |z|} = \frac{e^{2\pi v}}{B_1},$$

wo B_1 eine absolute Konstante bezeichnet. Daraus ergibt sich

Digitized by Google

$$2\pi v < \log B_1 + \log(|J(x)|+2),$$
$$\Im(x) = v \leqq B \log(|J(x)|+2),$$

wie behauptet.

Satz VI: *Es sei die Reihe*

$$F(s) = a_0 + a_1(s-s_0) + \cdots$$

für $|s-s_0| < r$ *konvergent,* $\neq a$ *und* $\neq b$, *wo* a *und* b *zwei verschiedene Konstanten sind. Es sei*

$$0 < \vartheta < 1.$$

Dann ist für $|s-s_0| \leqq \vartheta r$

$$|F(s)| < e^{\frac{D\log(|a_0|+2)}{1-\vartheta}},$$

wo $D = D(a,b)$ *bei festen* a, b *eine positive absolute Konstante ist, d. h. nicht von* $s_0, r, \vartheta, a_0, a_1, \ldots$ *abhängt.*

Vorbemerkung: Dieser Satz enthält natürlich den Satz II. Wie beim Beweise des Satzes II darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$s_0 = 0, \quad r = 1, \quad a = 0, \quad b = 1$$

angenommen werden.

Beweis: Aus unserer Voraussetzung

$$F(s) \neq 0 \text{ und } \neq 1 \text{ für } |s| < 1$$

folgen wie beim Beweise des Satzes II für die dort mit $G(s)$ bezeichnete Funktion im Gebiet $|s| \leqq \vartheta$ die Ungleichungen

$$\Im(c_0)\frac{1-\vartheta}{2} < \Im(G(s)) < \Im(c_0)\frac{2}{1-\vartheta}.$$

Hierbei ist

$$\Im(c_0) \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und nach dem Hilfssatz 2

$$\Im(c_0) \leqq B\log(|a_0|+2).$$

Wir bekommen daher

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(1-\vartheta) < \Im(G(s)) < \frac{2B\log(|a_0|+2)}{1-\vartheta},$$

also nach dem Hilfssatz 1

$$|F(s)| = |J(G(s))| < e^{c\left(\Im(G(s)) + \frac{1}{\Im(G(s))}\right)}$$
$$< e^{c\left(\frac{2B\log(|a_0|+2)}{1-\vartheta} + \frac{4}{\sqrt{3}(1-\vartheta)}\right)} < e^{\frac{D\log(|a_0|+2)}{1-\vartheta}},$$

wie behauptet.

Digitized by Google

§ 7.

Satz VII: *a und b seien zwei gegebene verschiedene Konstanten. Dann gibt es eine positive Zahl $\alpha = \alpha(a, b)$ mit folgender Eigenschaft. Zu jedem $\tau > 3$ gibt es einen Punkt $s = \sigma + ti$, welcher dem Gebiete*

$$(6) \qquad t \geqq \tau, \quad 1 - \frac{1}{(\log\log t)^\alpha} < \sigma < 1 + \frac{1}{(\log\log t)^\alpha}$$

angehört und die Gleichung

$$(\zeta(s) - a)(\zeta(s) - b) = 0$$

erfüllt.

Mit anderen Worten: Diese Gleichung hat im Gebiete

$$t \geqq 3, \quad 1 - \frac{1}{(\log\log t)^\alpha} < \sigma < 1 + \frac{1}{(\log\log t)^\alpha}$$

unendlich viele Wurzeln.

Übrigens wird sich zeigen, daß in diesem Satze $\alpha = \frac{1}{3D}$ sein kann, wo $D = D(a, b)$ eine dem Satze VI genügende Konstante ist.

Beweis: Es sei $\alpha = \frac{1}{3D}$, $\tau > 3$, und es werde angenommen, daß im Gebiete (6) beständig

$$(\zeta(s) - a)(\zeta(s) - b) \neq 0$$

ist; daraus wird sich ein Widerspruch ergeben.

Wir könnten nämlich für alle $t \geqq \tau_1$, wo τ_1 eine gewisse Zahl $> \tau$ ist, den Satz VI anwenden: Auf

$$F(s) = \zeta(s), \quad s_0 = 1 + \frac{1}{4(\log\log t)^\alpha} + ti, \quad r = \frac{1}{2(\log\log t)^\alpha},$$
$$\vartheta = \frac{1}{2}.$$

Das geht für alle $t \geqq \tau_1$; denn alle Punkte $u + vi$ des Kreises $|s - s_0| < r$ gehören für $t \geqq \tau_1$ dem Gebiete

$$v \geqq \tau, \quad 1 - \frac{1}{(\log\log v)^\alpha} < u < 1 + \frac{1}{(\log\log v)^\alpha}$$

an. Sie genügen ja den Ungleichungen

$$t - \frac{1}{2(\log\log t)^\alpha} < v < t + \frac{1}{2(\log\log t)^\alpha},$$
$$1 - \frac{1}{4(\log\log t)^\alpha} < u < 1 + \frac{3}{4(\log\log t)^\alpha},$$

und für alle hinreichend großen t ist erstens

Digitized by Google

$$t - \frac{1}{2(\log\log t)^\alpha} \geqq \tau,$$

zweitens

$$1 - \frac{1}{\left(\log\log\left(t + \frac{1}{2(\log\log t)^\alpha}\right)\right)^\alpha} < 1 - \frac{1}{4(\log\log t)^\alpha},$$

drittens

$$1 + \frac{3}{4(\log\log t)^\alpha} < 1 + \frac{1}{\left(\log\log\left(t + \frac{1}{2(\log\log t)^\alpha}\right)\right)^\alpha}.$$

Für $t \geqq \tau_1$ liefert also der Satz VI speziell im Punkte $s = 1+ti$, der gerade den Abstand $\vartheta r = \frac{1}{4(\log\log t)^\alpha}$ von s_0 hat, die Abschätzung

$$|\zeta(1+ti)| < e^{\frac{D\log(|\zeta(s_0)|+2)}{1-\vartheta}} = e^{2D\log\left(\left|\zeta\left(1+\frac{1}{4(\log\log t)^\alpha}+ti\right)\right|+2\right)}$$

$$\leqq e^{2D\log\left(\zeta\left(1+\frac{1}{4(\log\log t)^\alpha}\right)+2\right)}.$$

Für alle hinreichend großen t (für $t \geqq \tau_2$) ist nun

$$\zeta\left(1+\frac{1}{4(\log\log t)^\alpha}\right)+2 < 5(\log\log t)^\alpha.$$

Für alle hinreichend großen t (für $t \geqq \tau_3$) wäre daher

$$|\zeta(1+ti)| < e^{2D\log(5(\log\log t)^\alpha)} = 5^{2D}(\log\log t)^{2D\alpha}.$$

Es wäre also wegen $2D\alpha = \frac{2}{3} < 1$

$$\zeta(1+ti) = o(\log\log t),$$

im Gegensatz zum Satze V.

Damit ist der Satz VII bewiesen. Er liefert natürlich u. a. das **Korollar**: *Im Gebiete*

$$(7) \qquad t > 16, \quad 1 - \frac{1}{\log\log\log t} < \sigma < 1 + \frac{1}{\log\log\log t}$$

nimmt die Funktion $\zeta(s)$ entweder jeden Wert unendlich oft an oder jeden Wert mit einer einzigen Ausnahme unendlich oft an.

In der Tat ist zu jedem $\alpha > 0$ ein τ so bestimmbar, daß das Gebiet (6) dem Gebiete (7) angehört.

Diese Resultate erscheinen uns höchst bemerkenswert. Wir wollen aber zur Vermeidung von Mißverständnissen besonders

Digitized by Google

hervorheben, daß dadurch nicht die Riemannsche Vermutung

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma > \frac{1}{2}$$

widerlegt ist. Denn der in dem obigen Korollar vorkommende hypothetische Ausnahmewert könnte ja vorhanden sein und gerade gleich 0 sein.

§ 8.

Satz VIII: *Es sei in der Dirichletschen Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für alle n

$$a_n \geqq 0.$$

Sie möge eine im Endlichen gelegene Konvergenzgerade $\sigma = \eta$ haben und im Punkte η divergieren. τ sei irgend eine positive Größe. Dann ist die Funktion $f(s)$ in der Viertelebene $\sigma > \eta$, $t \geqq \tau$ nicht beschränkt.

Vorbemerkung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf beim Beweise $\eta = 0$ angenommen werden, da man sonst nur nötig hat,

$$\frac{a_n}{n^\eta} = b_n, \quad s - \eta = s'$$

zu setzen und die Reihe

$$g(s') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{s'}}$$

zu betrachten.

Die Behauptung lautet also: Nach Annahme einer positiven Zahl g gibt es ein $\sigma_0 > 0$ und ein $t_0 \geqq \tau$ derart, daß im Punkte $s_0 = \sigma_0 + t_0 i$

$$|f(s_0)| > g$$

ist.

Beweis: Aus der vorausgesetzten Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

folgt die Existenz eines ganzzahligen positiven M, für welches

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \geqq 5g$$

ist. Nunmehr wählen wir ein $\sigma_0 > 0$ derart, daß

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} > 4g$$

Digitized by Google

ist, was aus Stetigkeitsgründen möglich ist. Wir wählen nunmehr ein ganzes $N \geqq M$ so, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} < g$$

ist. Wegen $N \geqq M$ ist dabei

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} > 4g.$$

Die am Schluß der Fußnote 4 auf S. 307 gemachte Bemerkung gestattet uns, ein $t_0 \geqq \tau$ und ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_N$ so zu wählen, daß die N Ungleichungen

$$|-t_0 \log n - 2\pi x_n| < \frac{\pi}{3} \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

erfüllt sind. Alsdann ist für $n = 1, 2, \ldots, N$

$$\cos(-t_0 \log n) > \frac{1}{2};$$

daher ergibt sich im Punkt $s_0 = \sigma_0 + t_0 i$

$$|f(s_0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0 + t_0 i}}\right| \geqq \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma_0 + t_0 i}}\right| - \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0 + t_0 i}}\right|$$

$$\geqq \Re \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma_0 + t_0 i}} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}}$$

$$> \frac{1}{2} \cdot 4g - g = g,$$

womit der Satz bewiesen ist.

§ 9.

Es sei $\varkappa$ ein fester algebraischer Zahlkörper $k$ten Grades; es sei $\zeta_\varkappa(s)$ die zugehörige Zetafunktion, welche für $\sigma > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}$$

definiert ist, wo $F(n)$ die Anzahl der Ideale des Körpers mit der Norm n bezeichnet. Es gibt bekanntlich eine positive Konstante β derart, daß die Funktion

$$\zeta_\varkappa(s) - \frac{\beta}{s-1}$$

für $\sigma > 1 - \frac{1}{k}$ regulär ist.

Digitized by Google

Es gelten nunmehr die folgenden Sätze.

Satz IX: *Es liegt*

$$\left| \zeta_\varkappa(s) - \frac{\beta}{s-1} \right|$$

in der Halbebene $\sigma > 1$ *nicht unterhalb einer endlichen Schranke.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz VIII, da beständig

$$F(n) \geqq 0$$

ist und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n}$$

bekanntlich divergiert.

Satz X: *Es seien* a *und* b *zwei beliebige verschiedene komplexe Konstanten und* δ, τ *zwei positive Konstanten, von denen* $\delta \leqq \frac{1}{k}$ *sei*[1]). *Dann gibt es im Gebiete*

$$1 - \delta < \sigma < 1 + \delta, \quad t > \tau$$

mindestens eine Wurzel der Gleichung

$$(\zeta_\varkappa(s) - a)(\zeta_\varkappa(s) - b) = 0.$$

Beweis: Wörtlich wie bei Satz III.

Satz XI: *Es ist in der Halbebene* $\sigma > 1$ *nicht*

$$\zeta_\varkappa(s) = o(\log\log t).$$

Mit anderen Worten: *Es gibt eine derartige positive Zahl* K, *daß die Ungleichung*

$$|\zeta_\varkappa(s)| > \frac{1}{K} \log\log t$$

bei jedem gegebenem $\tau > 1$ *im Gebiete* $\sigma > 1$, $t > \tau$ *eine Lösung* $s_0 = \sigma_0 + t_0 i$ *besitzt.*

Beweis: Wenn

$$H(x) = \sum_{n=1}^{x} F(n)$$

gesetzt wird, so ist bekanntlich für alle $x \geqq 1$

$$\frac{x+1}{\gamma} < H(x) < \Gamma x,$$

wo γ und Γ passend wählbare positive ganze Zahlen bedeuten.

---

1) Dies sagen wir, damit der Streifen $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$ sicher dem Existenzgebiete der Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ angehört.

Digitized by Google

Wir bestimmen eine positive ganze Zahl g so, daß für $\sigma > 1$, $1 \leqq t \leqq \tau$

$$|\zeta_\varkappa(s)| \leqq g$$

ist. Wir betrachten nunmehr die Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ auf der Geraden

$$\sigma_0 = 1 + \frac{1}{4\gamma g}.$$

N sei eine positive ganze Zahl, über die wir noch verfügen werden. Wie beim Beweise des Satzes IV ergibt sich die Existenz eines positiven t_0 derart, daß

$$1 \leqq t_0 \leqq 6^N$$

und

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{F(n)}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}+t_0 i}} \right| > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{F(n)}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

ist. Hieraus folgt

$$\left| \zeta_\varkappa\left(1 + \frac{1}{4\gamma g} + t_0 i\right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}+t_0 i}} \right|$$

$$\geqq \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{F(n)}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}+t_0 i}} \right| - \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}+t_0 i}} \right|.$$

$$> \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{F(n)}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}}} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{H(n)-H(n-1)}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}}} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{H(n)-H(n-1)}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} H(n) \left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}}} - \frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{4\gamma g}}} \right) + \frac{H(N)}{2N^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$- \sum_{n=N}^{\infty} H(n) \left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}}} - \frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{4\gamma g}}} \right) + \frac{H(N)}{N^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

Digitized by Google

$$> \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{\gamma}(n+1)\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}\right)$$

$$-\sum_{n=N}^{\infty}\Gamma n\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\gamma}\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\sum_{n=1}^{N-1}(n+1)\int_{n}^{n+1}\frac{du}{u^{2+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$-\Gamma\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\sum_{n=N}^{\infty}n\int_{n}^{n+1}\frac{du}{u^{2+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$> \frac{1}{2\gamma}\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\sum_{n=1}^{N-1}\int_{n}^{n+1}\frac{udu}{u^{2+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$-\Gamma\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\sum_{n=N}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{udu}{u^{2+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$= \frac{1}{2\gamma}\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\int_{1}^{N}\frac{du}{u^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}-\Gamma\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\int_{N}^{\infty}\frac{du}{u^{1+\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$= \frac{1}{2\gamma}\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)4\gamma g\left(1-\frac{1}{N^{\frac{1}{4\gamma g}}}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)4\gamma g\frac{1}{N^{\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$= 2g\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\left(1-\frac{1}{N^{\frac{1}{4\gamma g}}}\right)-4\Gamma\gamma g\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\frac{1}{N^{\frac{1}{4\gamma g}}}$$

$$= g\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\left(2-\frac{2+4\Gamma\gamma}{N^{\frac{1}{4\gamma g}}}\right).$$

Nunmehr setzen wir

$$N = (2+4\Gamma\gamma)^{4\gamma g};$$

Digitized by Google

dann haben wir ein $t_0 = t_0(g)$ derart, daß

$$1 \leqq t_0 \leqq 6^{\left((2+4\Gamma\gamma)^{4\gamma g}\right)}$$

und

$$\left|\zeta_\varkappa\left(1+\frac{1}{4\gamma g}+t_0 i\right)\right| > g\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right)\left(2-\frac{2+4\Gamma\gamma}{N^{\frac{1}{4\gamma g}}}\right) = g\left(1+\frac{1}{4\gamma g}\right) > g$$

ist. Wegen der Definition von g ist hierbei eo ipso $t_0 > \tau$.

Aus

$$1 < \tau < t_0 \leqq 6^{\left((2+4\Gamma\gamma)^{4\gamma g}\right)}$$

folgt

$$\log t_0 \leqq (2+4\Gamma\gamma)^{4\gamma g} \log 6,$$

$$\log\log t_0 \leqq 4g\gamma \log(2+4\Gamma\gamma) + \log\log 6 < Kg,$$

wo K nur vom Körper abhängig ist. Daher ist

$$g > \frac{1}{K}\log\log t_0,$$

$$\left|\zeta_\varkappa\left(1+\frac{1}{4\gamma g}+t_0 i\right)\right| > \frac{1}{K}\log\log t_0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz XII: *Es sei* $1-\frac{1}{k} < \sigma_0 \leqq 1$ *und* σ_0 *fest. Dann ist*

$$\limsup_{t=\infty} \frac{|\zeta_\varkappa(\sigma_0+ti)|}{\log\log t} > 0.$$

Beweis: Wörtlich wie der des Satzes V, wobei die bekannte Tatsache benutzt wird, daß im Streifen $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq 2$ gleichmäßig

$$\zeta_\varkappa(s) = O(t)$$

ist.

Satz XIII: *a und b seien zwei gegebene verschiedene Konstanten. Dann gibt es eine positive Zahl* $\alpha = \alpha(a,b)$ *mit folgender Eigenschaft. Zu jedem* $\tau > 3$ *gibt es einen Punkt* $s = \sigma + ti$, *welcher dem Gebiete*

$$t \geqq \tau, \quad 1-\frac{1}{(\log\log t)^\alpha} < \sigma < 1+\frac{1}{(\log\log t)^\alpha}$$

angehört und die Gleichung

$$(\zeta_\varkappa(s)-a)(\zeta_\varkappa(s)-b) = 0$$

erfüllt.

Beweis: Wörtlich wie der des Satzes VII.

Digitized by Google

Korollar: *Im Gebiete*

$$t > 16, \quad 1 - \frac{1}{\log\log\log t} < \sigma < 1 + \frac{1}{\log\log\log t}$$

nimmt die Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ *entweder jeden Wert unendlich oft an oder jeden Wert mit einer einzigen Ausnahme unendlich oft an.*

Wir bemerken noch besonders, daß in den Lindelöfschen Untersuchungen keines unserer Resultate über die Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ (insbesondere nicht einmal das am Ende der Einleitung hervorgehobene) enthalten war; denn (vergl. die Fußnote zu S. 312) in keiner Halbebene, welche dem Existenzbereich von $\zeta_\varkappa(s)$ angehört, war vor der jetzigen Abhandlung bewiesen, daß $\zeta_\varkappa(s) - \frac{\beta}{s-1}$ nicht beschränkt ist, und wir haben daher erst jetzt die Möglichkeit gehabt, die aus dem Ideenkreise des Picardschen Satzes stammenden Methoden auf $\zeta_\varkappa(s)$ anzuwenden.

Digitized by Google

Herdbestimmung bei Erdbeben aus den Ankunftszeiten.

Von

Ludwig Geiger.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Mai 1910 durch E. Wiechert[1]).

§ 1. Vorwort.

Bei einem scharf ausgeprägten Beben beträgt die Unsicherheit in der Bestimmung der Ankunftszeit der I. Vorläufer nur ± 1 Sekunde, aber bei den II. Vorläufern ist sie viel größer; im allgemeinen beträgt sie mindestens $\pm \frac{1}{10}$ Minute $= \pm 6$ Sekunden. Die Differenz der Ankunftszeiten beider Vorläufer ist also auf mindestens ± 6 Sekunden unsicher, und gerade auf dieser Differenz beruht die Bestimmung der Herddistanz. Für eine Herddistanz von 45° ergibt dies aber schon eine Unsicherheit der Distanz von $\pm 1°$ oder von 2 %. Für viele Zwecke wird diese Genauigkeit allerdings genügen, doch kommen auch Fälle vor, wobei die Unsicherheit in der Zeitdifferenz noch viel größer ist, denn das Bebendiagramm sieht so kompliziert aus, daß man im Zweifel ist, welche Welle überhaupt als Beginn der II. Vorläufer anzusprechen ist. Als Beispiel diene das Beben von 1909 November 10: Das Göttinger Diagramm zeigt zwar sehr scharf den Beginn der I. Vorläufer, aber der weitere Verlauf des Bebens ist so kompliziert, daß ich mich zu der Hypothese genötigt sah, daß 2 Beben mit rund 1 Minute Intervall superponiert sind[2]). Es ist einleuchtend, daß hier jede Möglichkeit einer genauen Distanzbestimmung in der oben geschilderten Weise versagen muß. Und doch ist es gerade bei solch abnormen Beben am aller interessantesten, den

1) In anderer Fassung schon am 18. Dez. 1909 vorgelegt.

2) Vergl. Göttinger Wochenberichte 1909 Nr. 45.

Digitized by Google

Herd möglichst scharf zu ermitteln, weil erst dann ein Studium des Diagramms ermöglicht wird. Ein anderer Fall ist der, daß es sich darum handelt, die Laufzeitfunktionen fortzusetzen. Bis zu ca. 90° Herddistanz sind diese Funktionen ja schon gut durch Wiechert und Zoeppritz festgelegt worden[1]), für große Distanzen mußten sie aber unter einer gewissen Annahme über das Erdinnere extrapoliert werden, weil es nicht möglich war, geeignetes Ausgangsmaterial zu beschaffen, d. h. einerseits klare Diagramme von Stationen mit mehr als 90° Herddistanz, andererseits den genauen Ort des Herdes. Aus diesem Grunde mußten die beobachteten Laufzeitfunktionen mit 90° Herddistanz abbrechen, während doch gerade der weitere Verlauf von allergrößtem Interesse ist, denn seine Kenntnis würde uns gestatten, die Physik des Erdkerns zu erforschen.

Wenn es nun möglich wäre, eine Methode der Herdbestimmung anzugeben, die einzig auf den Ankunftszeiten und auf der Laufzeitfunktion der I. Vorläufer beruht, dann könnte der Herd jedes noch so komplizierten Bebens mit sehr großer Schärfe angegeben werden, sobald der Anfang der I. Vorläufer scharf bekannt ist. Nimmt man wieder an, daß die Ankunftszeiten eine Unsicherheit von ± 1 Sekunde enthalten, so wird jetzt bei einer mittleren Herddistanz von 45° die Unsicherheit der Distanz nur $\frac{1}{7}°$ oder $\frac{1}{8}$ % betragen. Dann wird es aber auch möglich, sich gutes Ausgangsmaterial für eine Fortsetzung der Laufzeitfunktionen über 90° Herddistanz hinaus zu beschaffen, denn jetzt ist man nicht mehr darauf angewiesen, sich auf Beben zu beschränken, deren Herd dadurch scharf bekannt ist, daß er in dicht bevölkertem Land liegt, sondern jedes scharf einsetzende Beben — liege sein Herd in der Wüste, in unbewohnten Gebirgen oder unter dem Meere — ist gleich gut zu verwenden, sobald man die Angaben von mindestens drei Stationen besitzt, die näher als 90° beim Herde liegen.

Im folgenden soll eine Methode mitgeteilt werden, die die Lösung dieser Aufgabe ganz allgemein aus den Angaben von N Stationen gestattet. Es sind dabei mindestens drei Stationen erforderlich; ist dies eben der Fall, so ist das Problem eindeutig bestimmt und liefert einen ganz bestimmten Ort als Herd und eine ganz bestimmte Zeit als Bebenzeit im Herd. Hat man mehr als drei Stationen, so ist das Problem überbestimmt, und man hat nach der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen. Zum

1) K. Zoeppritz und L. Geiger: Über Erdbebenwellen III; Gött. Nachr. Math.-phys. Kl. 1909.

Digitized by Google

Schluß wird an zwei Beispielen — eines für fünf und eines für drei Stationen — die Anwendbarkeit der Methode gezeigt.

§ 2. Problem bei N Stationen ($N > 3$).

I. Symbole.

Wir haben den Herd und N Stationen ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Zum Herd gehört	Zur Station n gehört
L_H = geogr. Länge,	L_n = geogr. Länge,
B_H = geogr. Breite,	B_n = geogr. Breite,
t_H = Herdzeit.	Δ_n = Herddistanz in Graden,
	t_n^* = beobachtete Ankunftszeit der I. Vorläufer,
	T_n = Laufzeit der I. Vorläufer.

Näherungswerte (*N.-W.*) werden überstrichen, z. B. $\overline{\Delta_n}$.

II. Gegeben.

L_n = geographische Länge jeder der N Stationen,
B_n = geographische Breite jeder der N Stationen,
t_n^* = beobachtete Ankunftszeiten der I. Vorläufer in den N Stationen,
$T(\Delta)$ = Laufzeitfunktion der I. Vorläufer.

Wir lassen hier in Tabelle 1 die Laufzeitfunktion der I. Vorläufer tabellarisch für $\Delta = 0^0$ bis $\Delta = 120^0$ von Grad zu Grad folgen. Die Tabelle enthält unter d noch die Differenzen der benachbarten Laufzeiten[1]).

1) Die Tabelle ist durch graphische Interpolation aus E Wiecherts und K. Zoeppritzens grundlegenden Laufzeittabellen hergeleitet (K. Zoeppritz und L. Geiger, l. c.).

Digitized by Google

Tabelle 1: Laufzeit der I. Vorläufer von $\Delta = 0^0$ bis $\Delta = 120^0$ von Grad zu Grad.

Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.
0	0		10	150		20	281		30	388		40	474		50	546	
		15			14			12			10			8			6
1	15	16	11	164	14	21	293	11	31	398	9	41	482	8	51	552	7
2	31	16	12	178	14	22	304	11	32	407	9	42	489	8	52	559	6
3	47	15	13	192	14	23	315	11	33	416	9	43	497	7	53	565	7
4	62	15	14	206	13	24	326	11	34	425	8	44	504	7	54	572	6
5	77	15	15	219	13	25	337	11	35	433	9	45	511	7	55	578	7
6	92	15	16	232	12	26	348	10	36	442	8	46	518	7	56	585	6
7	107	14	17	244	13	27	358	10	37	450	8	47	525	7	57	591	7
8	121	15	18	257	12	28	368	10	38	458	8	48	532	7	58	598	6
9	136	14	19	269	12	29	378	10	39	466	8	49	539	7	59	604	7
10	150		20	281		30	388		40	474		50	546		60	611	

Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.	Δ^0	T Sek.	d Sek.
60	611		70	675		80	737		90	795		100	849		110	898	
		7			7			6			6			6			5
61	618	6	71	682	6	81	743	6	91	801	5	101	855	5	111	903	4
62	624	7	72	688	6	82	749	6	92	806	6	102	860	5	112	907	5
63	631	6	73	694	7	83	755	5	93	812	5	103	865	5	113	912	4
64	637	7	74	701	6	84	760	6	94	817	6	104	870	4	114	916	4
65	644	6	75	707	6	85	766	6	95	823	5	105	874	5	115	920	5
66	650	6	76	713	6	86	772	6	96	828	6	106	879	5	116	925	4
67	656	7	77	719	6	87	778	5	97	834	5	107	884	4	117	929	4
68	663	6	78	725	6	88	783	6	98	839	5	108	888	5	118	933	5
69	669	6	79	731	6	89	789	6	99	844	5	109	893	5	119	938	4
70	675		80	737		90	795		100	849		110	898		120	942	

III. Gesucht.

L_H = geographische Länge des Herdes,
B_H = geographische Breite des Herdes,
t_H = Bebenzeit am Herd (= Herdzeit).

IV. Lösung.

Auf irgend einem Wege beschafft man sich Näherungswerte $\overline{L}_H$, $\overline{B}_H$, $\overline{t}_H$ für die Länge und Breite des Herdes und die Herdzeit. Diese N-W erhält man entweder aus makroseismischen Beobachtungen oder aus Stationsbeobachtungen. Wir setzen dann

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} L_H &= \overline{L}_H + \delta\overline{L}_H \\ B_H &= \overline{B}_H + \delta\overline{B}_H \\ t_H &= \overline{B}_H + \delta\bar{t}_H. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Darin bedeuten $\delta\overline{L}_H$, $\delta\overline{B}_H$, $\delta\bar{t}_H$ Verbesserungen der N-W, und unsere Aufgabe besteht jetzt in der Berechnung dieser Verbesserungen. Dazu verfahren wir folgendermaßen:

Wir berechnen die Entfernungen $\overline{\Delta}_n$ aller N Stationen vom Orte $\overline{L}_H$, $\overline{B}_H$. Dazu dient uns der sphärische Cosinussatz (vergl. Figur 1):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cos}\,\overline{\Delta}_n &= \mathrm{Sin}\,\overline{B}_H . \mathrm{Sin}\,B_n + \mathrm{Cos}\,\overline{B}_H . \mathrm{Cos}\,B_n . \mathrm{Cos}\,(\overline{L}_H - L_n) \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

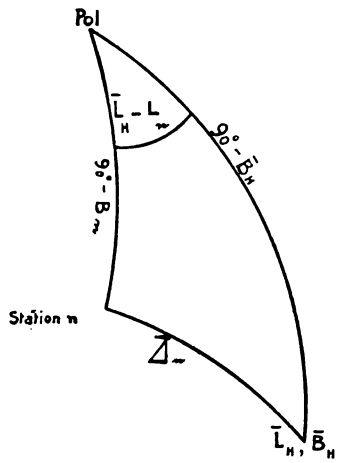


Fig. 1.

Nachdem so die $\overline{\Delta}_n$ berechnet sind, entnehmen wir der Tabelle 1 die zugehörigen Laufzeiten $\overline{T}_n$.

Indem wir zu der angenommenen Herdzeit $\bar{t}_H$ die Laufzeiten $\overline{T}_n$ addieren, erhalten wir die angenäherten Ankunftszeiten $\bar{t}_n$ in den N Stationen:

$$\bar{t}_n = \bar{t}_H + \overline{T}_n. \quad (3)$$

Diese angenäherten Ankunftszeiten $\bar{t}_n$ werden nun im allgemeinen von den tatsächlich beobachteten Ankunftszeiten t_n^* differieren. Wir nennen die Differenzen: Beobachtung minus Näherungswert „Fehler" und bezeichnen sie mit F_n, also

$$F_n = t_n^* - \bar{t}_n. \quad (4)$$

Zwischen $\bar{t}_n$ und den Verbesserungen $\delta\overline{L}_H$, $\delta\overline{B}_H$, $\delta\bar{t}_H$ gilt dann auf Grund des Taylor'schen Satzes die Beziehung

$$t_n^* = \bar{t}_n + \frac{\partial\bar{t}_n}{\partial\overline{L}_H}\cdot\delta\overline{L}_H + \frac{\partial\bar{t}_n}{\partial\overline{B}_H}\cdot\delta\overline{B}_H + \frac{\partial\bar{t}_n}{\partial\bar{t}_H}\cdot\delta\bar{t}_H, \quad (5)$$

Digitized by Google

oder

$$F_n = \frac{\partial \bar{t}_n}{\partial \bar{L}_H} \cdot \delta \bar{L}_H + \frac{\partial \bar{t}_n}{\partial \bar{B}_H} \delta \bar{B}_H + \frac{\partial \bar{t}_n}{\partial \bar{t}_H} \cdot \delta \bar{t}_H. \tag{6}$$

Nun folgt aus (3):

$$\frac{\partial \bar{t}_n}{\partial \bar{L}_H} = \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{L}_H}; \quad \frac{\partial \bar{t}_n}{\partial \bar{B}_H} = \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{B}_H}; \quad \frac{\partial \bar{t}_n}{\partial \bar{t}_H} = 1. \tag{7}$$

(7) in (6) eingesetzt gibt die N „Fehlergleichungen“

$$F_n = \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{L}_H} \cdot \delta \bar{L}_H + \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{B}_H} \cdot \delta \bar{B}_H + \delta \bar{t}_H, \tag{8}$$

oder wenn man

$$\frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{L}_H} = a_n; \quad \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{B}_H} = b_n; \quad 1 = c_n \tag{9}$$

setzt:

$$F_n = a_n . \delta \bar{L}_H + b_n . \delta \bar{B}_H + c_n . \delta \bar{t}_H. \tag{10}$$

Die Coefficienten a_n und b_n kann man in folgender Weise einfach berechnen: Es ist nämlich

$$a_n = \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{L}_H} = \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{\Delta}_n} \cdot \frac{\partial \bar{\Delta}_n}{\partial \bar{L}_H} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{B}_H} = \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \bar{\Delta}_n} \cdot \frac{\partial \bar{\Delta}_n}{\partial \bar{B}_H}. \tag{11}$$

Rechnen wir $\partial \bar{T}_n$ in Zeitsekunden, $\partial \bar{\Delta}_n$ in Bogenminuten, so liefert Tabelle 1

$$\frac{\partial \bar{T}^s_n}{\partial \bar{\Delta}'_n} = \frac{d^s_n}{60'}. \tag{12}$$

Die Differentialquotienten $\frac{\partial \bar{\Delta}_n}{\partial \bar{L}_H}$ und $\frac{\partial \bar{\Delta}_n}{\partial \bar{B}_H}$ in (11) direkt zu berechnen wäre recht umständlich. Wir ziehen es deshalb vor, diese Differentialquotienten folgendermaßen zu bestimmen: wir berechnen außer den Distanzen $\bar{\Delta}_n$ der N Stationen vom angenäherten Herde $\bar{L}_H$, $\bar{B}_H$ auch noch die Distanzen der N Stationen von den beiden Punkten

$$(\bar{L}_H + i\bar{L}_B),\ B_H \quad \text{und} \quad \bar{L}_H,\ (\bar{B}_H + i\bar{B}_H),$$

d. h. von Punkten, die nur in der geographischen Länge resp. nur in der geographischen Breite variiert sind. Hierbei ist i kein Faktor, sondern dient nur zur Charakterisierung der Inkremente. Diese Distanzen mögen $\bar{\Delta}_{n_L}$ resp. $\bar{\Delta}_{n_B}$ heißen. Dann ist

Digitized by Google

$$\frac{\partial \overline{\Delta}_n}{\partial \overline{L}_H} = \frac{\overline{\Delta}_n - \overline{\Delta}_n}{i\overline{L}_H} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \overline{\Delta}_n}{\partial \overline{B}_H} = \frac{\overline{\Delta}_n - \overline{\Delta}_n}{i\overline{B}_H}. \tag{13}$$

Wegen (11) und (12) ist dann

$$a_n = \frac{d_n^s}{60'} \cdot \frac{\overline{\Delta}_n - \overline{\Delta}_n}{i\overline{L}_H} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{d_n^s}{60'} \cdot \frac{\overline{\Delta}_n - \overline{\Delta}_n}{i\overline{B}_H}. \tag{14}$$

Gleichung (10) repräsentiert also N Gleichungen, die den N Stationen entsprechen. Giebt man allen N Stationen gleiches Gewicht, so berechnen wir die 3 Unbekannten $\delta\overline{L}_H$, $\delta\overline{B}_H$, $\delta\overline{t}_H$, indem wir in bekannter Weise die 3 „Normalgleichungen“

$$\left.\begin{aligned} [aF] &= [aa].\delta\overline{L}_H + [ab].\delta\overline{B}_H + [ac].\delta\overline{t}_H \\ [bF] &= [ab].\delta\overline{L}_H + [bb].\delta\overline{B}_H + [bc].\delta\overline{t}_H \\ [cF] &= [ac].\delta\overline{L}_H + [bc].\delta\overline{B}_H + [cc].\delta\overline{t}_H \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

bilden, worin

$$\left.\begin{aligned} [aa] &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2, \\ [ab] &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n, \\ [aF] &= a_1 F_1 + a_2 F_2 + \cdots a_n F_n \text{ etc. ist.} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Kennt man jedoch den mittleren Fehler ε_n der beobachteten Ankunftszeiten t_n^*, so hat t_n^* das Gewicht

$$g_n = \frac{1}{\varepsilon_n^2}. \tag{17}$$

Dieses Gewicht g_n wird dadurch berücksichtigt, daß man die N Fehlergleichungen (10) mit $\sqrt{g_n} = \frac{1}{\varepsilon_n}$ multipliziert:

$$\frac{F_n}{\varepsilon_n} = \frac{a_n}{\varepsilon_n} \cdot \delta\overline{L}_H + \frac{b_n}{\varepsilon_n} \cdot \delta\overline{B}_H + \frac{c_n}{\varepsilon_n} \cdot \delta\overline{t}_H, \tag{18}$$

oder kurz

$$F_n' = a_n' . \delta\overline{L}_H + b_n' . \delta\overline{B}_H + c_n' . \delta\overline{t}_H \tag{19}$$

und erst dann die Normalgleichungen bildet:

$$\left.\begin{aligned} [a'F] &= [a'a'].\delta\overline{L}_H + [a'b'].\delta\overline{B}_H + [a'c'].\delta\overline{t}_H \\ [b'F] &= [a'b'].\delta\overline{L}_H + [b'b'].\delta\overline{B}_H + [b'c'].\delta\overline{t}_H \\ [c'F] &= [a'c'].\delta\overline{L}_H + [b'c'].\delta\overline{B}_H + [c'c'].\delta\overline{t}_H. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Digitized by Google

Um die Schreibweise zu vereinfachen, wollen wir fernerhin nicht mehr zwischen (15) und (20) unterscheiden, sondern nur noch Gleichung (15) betrachten.

Nachdem die 3 Normalgleichungen nach den Verbesserungen $\delta\overline{L}_H$, $\delta\overline{B}_H$, $\delta\overline{t}_H$ aufgelöst sind, werden diese Verbesserungen in (1) eingesetzt, was uns die gesuchten Werte L_H, B_H, t_H liefert. Wie die Auflösung der Normalgleichungen (15) bequem und sicher ausgeführt werden kann, soll in VI gezeigt werden.

Handelt es sich darum, außer L_H, B_H, t_H auch die zugehörigen Δ_n zu bestimmen, (etwa zur Konstruktion einer Laufzeitfunktion), so ist es nicht nötig, diese Δ_n nach dem Cosinussatz (2) nochmals zu berechnen. Man verwendet vielmehr die Differentialgleichung

$$\Delta_n = \overline{\Delta}_n + \frac{\partial\overline{\Delta}_n}{\partial\overline{L}_H}\cdot\delta\overline{L}_H + \frac{\partial\overline{\Delta}_n}{\partial\overline{B}_H}\cdot\delta\overline{B}_H, \tag{21}$$

worin alle rechts stehenden Glieder bekannt sind. Es genügt dabei völlig, wenn die Multiplikationen mit dem Rechenschieber ausgeführt werden.

Wenn die N-W $\overline{L}_H$, $\overline{B}_H$, $\overline{t}_H$ sehr schlecht gewählt waren, so kann es vorkommen, daß die gefundenen Werte L_H, B_H, t_H noch nicht genügen. Man faßt dann L_H, B_H, t_H als neue N-W auf und wendet das oben beschriebene Verfahren nochmals an. Jedoch kommt man dann wesentlich schneller ans Ziel: man berechnet die $\overline{\Delta}_n$ nach (21) und F_n nach (6). Die Coefficienten a_n, b_n in (10) braucht man aber nicht neu zu berechnen, weil sie sich nur in Gliedern höherer Ordnung von den ersten Werten unterscheiden. Daher sind auch nur die 3 Glieder $[aF]$, $[bF]$, $[cF]$ der Normalgleichungen (15) neu zu berechnen, während rechts alles unverändert bleibt.

V. Praktisches zur Auflösung der Normalgleichungen.

Zur Auflösung der Normalgleichungen (15) eignet sich das Gauß'sche Rechenverfahren, das gleichzeitig den Gang der Rechnung dauernd kontrolliert. Eine Darstellung dieser Methode findet sich z. B. in Kohlrauschs Lehrbuch der praktischen Physik, die wir hier kurz wiedergeben wollen. Der Einfachheit halber schreiben wir die eckigen Klammern der Koeffizienten nicht:

Digitized by Google

Rechnung.

Man bilde $aa\ ab\ ac\ aF$
$bb\ bc\ bF$
$cc\ cF$
$FF.$

Kontrolle.

Es sei $a+b+c = S$ und
$a_1 S_1 + a_2 S_2 + \cdots a_n S_n = aS$ etc.
Dann muß sein

$$\begin{aligned} aa + ab + ac &= aS \\ ab + bb + bc &= bS \\ ac + bc + cc &= cS \\ aF + bF + cF &= FS. \end{aligned}$$

Man bilde und bezeichne

$$bb - \frac{ab}{aa} \cdot ab = bb \cdot 1$$

$$bc - \frac{ab}{aa} \cdot ac = bc \cdot 1$$

$$bF - \frac{ab}{aa} \cdot aF = bF \cdot 1$$

$$cc - \frac{ac}{aa} \cdot ac = cc \cdot 1$$

$$cF - \frac{ac}{aa} \cdot aF = cF \cdot 1.$$

Man berechne

$$bS - \frac{ab}{aa} \cdot aS = bS \cdot 1$$

$$cS - \frac{ac}{aa} \cdot aS = cS \cdot 1$$

$$FS - \frac{aF}{aa} \cdot aS = FS \cdot 1;$$

dann muß sein

$$\begin{aligned} bb \cdot 1 + bc \cdot 1 &= bS \cdot 1 \\ bc \cdot 1 + cc \cdot 1 &= cS \cdot 1 \\ bF \cdot 1 + cF \cdot 1 &= FS \cdot 1. \end{aligned}$$

Man bilde uud bezeichne

$$cc \cdot 1 - \frac{bc \cdot 1}{bb \cdot 1} \cdot bc \cdot 1 = cc \cdot 2$$

$$cF \cdot 1 - \frac{bc \cdot 1}{bb \cdot 1} \cdot bF \cdot 1 = cF \cdot 2.$$

Man berechne

$$cS \cdot 1 + \frac{bc \cdot 1}{bb \cdot 1} \cdot bS \cdot 1 = cS \cdot 2$$

$$FS \cdot 1 + \frac{bF \cdot 1}{bb \cdot 1} \cdot bS \cdot 1 = FS \cdot 2;$$

dann muß sein

$$\begin{aligned} cc \cdot 2 &= cS \cdot 2 \text{ und} \\ cF \cdot 2 &= FS \cdot 2. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man die Unbekannten $\delta\bar{L}_H$, $\delta\bar{B}_H$, $\delta\bar{t}_H$:

$$\left.\begin{aligned} \delta\bar{t}_H &= \frac{cF.2}{cc.2}; \quad \delta\bar{B}_H = \frac{bF.1}{bb.1} - \frac{bc.1}{bb.1}\delta\bar{t}_H; \\ \delta\bar{L}_H &= \frac{aF}{aa} - \frac{ab}{aa}\delta\bar{B}_H - \frac{ac}{aa}\delta\bar{t}_H. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Digitized by Google

Zur Kontrolle der ganzen Rechnung setzt man die gefundenen Werte $\delta\overline{L}_H$, $\delta\overline{B}_H$, $\delta\overline{t}_H$ in die N Fehlergleichungen (10) ein und erhält so die N Widersprüche f_n:

$$f_n = a_n.\delta\overline{L}_H + b_n.\delta\overline{B}_H + c_n\delta\overline{t}_H - F_n. \tag{23}$$

Dann muß sein

$$ff = FF - \frac{aF}{aa}\cdot aF - \frac{bF.1}{bb.1}\cdot bF\cdot 1 - \frac{cF.2}{cc.2}\cdot cF\cdot 2. \tag{24}$$

Ein geeignetes Rechnungsschema findet man in dem Beispiel unter VII, Tabelle 4.

VI. Fehlerbestimmung.

Wir dürfen uns nicht mit der Berechnung der $\overline{L}_H$, $\overline{B}_H$, $\overline{t}_H$ begnügen, ohne uns ein Urteil über die erreichte Genauigkeit resp. über die mittleren zu befürchtenden Fehler μ_L, μ_B, μ_t dieser Größen gebildet zu haben[1]).

Dazu berechnen wir die Gewichtskoefficienten dieser 3 Größen Q_{LL}, Q_{LB}, Q_{BB}, Q_{Lt}, Q_{Bt}, Q_{tt}, für die gilt[2]):

$$\left.\begin{aligned} Q_{LL} &= \frac{bb.cc - bc.bc}{D} = \frac{Z_{LL}}{D}; & Q_{LB} &= -\frac{ab.cc - ac.bc}{D} = -\frac{Z_{LB}}{D};\\ Q_{BB} &= \frac{aa.cc - ac.ac}{D} = \frac{Z_{BB}}{D}; & Q_{Lt} &= -\frac{ac.bb - ab.bc}{D} = -\frac{Z_{Lt}}{D};\\ Q_{tt} &= \frac{aa.bb - ab.ab}{D} = \frac{Z_{tt}}{D}; & Q_{Bt} &= -\frac{bc.aa - ab.ac}{D} = -\frac{Z_{Bt}}{D}; \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

worin

$$D = [aa].[bb.1].[cc.2]$$

und Z eine Abkürzung für „Zähler" ist. Zur Kontrolle prüft man, ob die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} [aS].\{Q_{LL} + Q_{LB} + Q_{Lt}\} + [bS].\{Q_{LB} + Q_{BB} + Q_{Bt}\}\\ + [cS].\{Q_{Lt} + Q_{Bt} + Q_{tt}\} = 3 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

1) Vergl. z. B. die Lehrbücher F. R. Helmert, die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Aufl. 1907 oder W. Jordan, Vermessungskunde I.

2) W. Jordan, l. c.

Digitized by Google

oder kurz

$$[aS] \cdot Q_L + [bS] \cdot Q_B + [cS] \cdot Q_t = 3 \qquad (26')$$

erfüllt ist; 3 ist darin die Anzahl der Unbekannten[1]). Tabelle 4 enthält auch die Berechnung und Kontrolle dieser Werte Q.

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler μ der 3 Unbekannten ist

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{ff}{N-3}}, \qquad (27)$$

und die mittleren Fehler μ_L, μ_B, μ_t von L_H, B_H, t_H sind[2])

$$\mu_L = \pm \mu \sqrt{Q_{LL}}, \quad \mu_B = \pm \mu \sqrt{Q_{BB}}, \quad \mu_t = \pm \mu \sqrt{Q_{tt}}. \qquad (28)$$

Ein erschöpfendes Bild der erreichten Genauigkeit bei der Bestimmung des Herdortes giebt die s. g. mittlere Fehlerellipse, deren Größe und Lage die Unsicherheit der Herdbestimmung vollständig charakterisiert[3]).

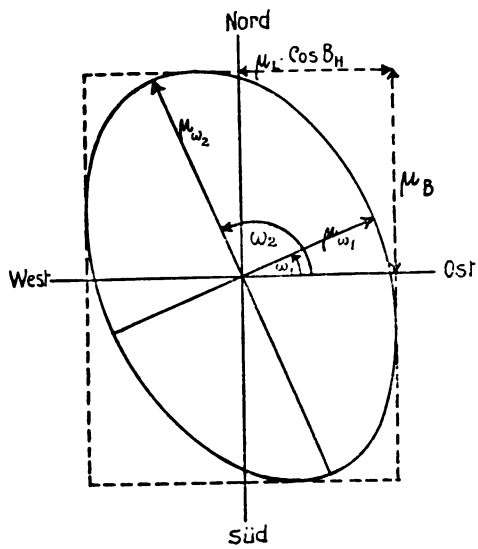


Fig. 2.

Die beiden Ellipsenhalbaxen μ_{ω_1}, μ_{ω_2} seien gegen den Parallelkreis durch den Herd unter den Winkeln ω_1 und ω_2 geneigt. Um diese Größen berechnen zu können, müssen wir zunächst die Q

1) A. S. Flint, Annals of mathematics, 1888 IV, S. 182.
2) F. R. Helmert, l. c. S. 107.
3) F. R. Helmert, l. c. § 7.

Digitized by Google

auf gleichen Maßstab reducieren, indem wir setzen:

$$Q_{11} = \mathrm{Cos}^2 B_H \cdot Q_{LL}, \quad Q_{12} = \mathrm{Cos}\, B_H \cdot Q_{LB}, \quad Q_{22} = Q_{BB}. \tag{29}$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\, 2\omega_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} &= \frac{2Q_{12}}{Q_{11}-Q_{22}} \\ \text{und} \qquad \mu_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} &= \pm\mu\sqrt{Q_{11}+Q_{12}\cdot \mathrm{tg}\,\omega_{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}}} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Projiciert man die Ellipse auf den Parallelkreis und den Meridian des Herdes, so sind diese beiden Projectionen gleich $\mu_L \cdot \mathrm{Cos}\, B_H$ und μ_B. Graphisch ist diese Kontrolle leicht ausführbar. Es mag schließlich noch erwähnt werden, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Herd innerhalb der mittleren Fehlerellipse liegt, gleich $1 - e^{-1/2} = 0{,}393$ ist.

VII. Beispiel für 5 Stationen.

Als Beispiel wählen wir das indische Beben von 1905 April 4, das u. a. der Wiechert-Zöppritz'schen Laufzeitfunktion zu Grunde liegt [1]). Nach makroseismischen Berichten liegt der Herd bei 76° 24′ E und 32° 18′ N. Als N-W wählen wir deshalb

$$\overline{L}_H = 76^\circ 0' \text{ E}, \qquad \overline{B}_H = 32^\circ 0' \text{ N}.$$

Wir benützen die Beobachtungen der 5 Stationen Taschkent, Schemacha, Tiflis, Irkutsk, Batum, und berechnen zuerst die Distanzen $\overline{\Delta}_n$, $\underset{L}{\overline{\Delta}}_n$, $\underset{B}{\overline{\Delta}}_n$ nach (2), wozu 4-stellige Logarithmen genügen. Tabelle 1 liefert die Differentialquotienten $\frac{d^s_n}{60'}$. Daraus erhalten wir die Differentialquotienten $\frac{\partial\overline{\Delta}_n}{\partial\overline{L}_H}$, $\frac{\partial\overline{\Delta}_n}{\partial\overline{B}_H}$ nach (13) und die Coeffizienten a_n, b_n nach (11), ferner die Summen S_n, wobei $c_n = 1$ ist. Dann entnimmt man der Tabelle 1 die zu $\overline{\Delta}_n$ gehörigen Laufzeiten $\overline{T}_n$ und wählt einen probeweisen N-W $\overline{t}_H$ für die Herdzeit; daraus erhält man die angenäherten Ankunftszeiten $\overline{t}_n$ und die Fehler $\overline{F}_n$. Man wird dann $\overline{t}_H$ so lange variieren, bis $[FF]$ ein Minimum ist. Tabelle 2 giebt z. B. diese Rechnungen für die Station Taschkent. Alle Werte, vor denen ein * steht, stehen gleich in den Tabellen der andern Stationen. Die horizontalen Bogen sollen andeuten, daß die durch sie verbundenen Werte

1) E. Wiechert und K. Zoeppritz, über Erdbebenwellen I und II Göttinger Nachr. math.-phys. Kl., S. 544, 1907.

Digitized by Google

gleich sind, die verticalen Klammern links sollen den Rechner darauf aufmerksam machen, daß die durch sie verbundenen Funktionen in den Logarithmentafeln an der gleichen Stelle zu finden sind.

Tabelle 3 enthält die in dieser Weise berechneten Koefficienten der Fehlergleichungen (10). Tabelle 4 ist durch dicke Striche in 5 Felder geteilt: das oberste enthält die Bildung und Auflösung der 3 Normalgleichungen gemäß V. Die Kontrollrechnung enthält das Feld rechts, ebenso die nach (22) gefundenen Verbesserungen $\delta\bar{L}_H$, $\delta\bar{B}_H$, $\delta\bar{t}_H$ und die nach (1) gefundenen Werte L_H, B_H, t_H. Das Feld unten links enthält die Berechnung der Gewichtskoeffizienten Q_{LL}, Q_{BB}, Q_{tt}, Q_{LB}, Q_{Lt}, Q_{Bt} nach (25) und der mittleren Fehler μ_L, μ_B, μ_t der Unbekannten nach (28). Das Feld unten in der Mitte enthält die Kontrolle der Gewichtskoefficienten nach (26). Das Feld links in halber Höhe enthält verschiedene Hilfsgrößen, die in der Tabelle mehrfach nötig sind.

Man sieht, daß die berechneten Herdkoordinaten sich sehr gut mit den direkt beobachteten decken.

Tabelle 5 giebt die Berechnung der Widersprüche f_n nach (23). Die Berechnung der definitiven Herddistanzen Δ_n nach (21) enthält Tabelle 2. Weil die analogen Tabellen der anderen Stationen hier nicht mitgeteilt sind, stellen wir die 5 definitiven Herddistanzen zusammen:

Taschkent	=	11° 0′
Schemacha	=	24° 16′
Tiflis	=	27° 22′
Irkutsk	=	28° 5′
Batum	=	29° 40′.

Digitized by Google

Tabelle 2.

Station Taschkent. $d_n^s/60' = 0{,}23$.

	$\overline{L_H}, \overline{B_H}$	$(\overline{L_H}+i\overline{L_H}), \overline{B_H}$	$\overline{L_H}, (\overline{B_H}+i\overline{B_H})$
B_H	* 32° 0′ N	32° 0′ N	* 32° 0′ N
B_n	41° 19′ E	41° 19′ E	41° 19′ E
L_H	* 76° 0′ E	* 77° 0′ E	* 76° 0′ E
L_n	69° 18′ E	69° 18′ E	69° 18′ E
$L_H - L_n$	6° 42′	7° 42′	6° 42′
lg Cos $(L_H - L_n)$	9,9970	9,9961	9,9970
lg Cos B_H	* 9,9284	* 9,9284	* 9,9236
lg Cos B_n	9,8757	9,8757	9,8757
lg II	9,8011	9,8002	9,7963
lg Sin B_H	* 9,7242		* 9,7361
lg Sin B_n	9,8197		9,8197
lg I	9,5439		9,5558
II	0,6326	0,6313	0,6256
I	0,3498	0,3498	0,3595
Cos $\overline{\Delta}_n$	0,9824	0,9811	0,9851
$\overline{\Delta}_n$	10° 46′	$\overline{\Delta}_n$ = 11° 9′	$\overline{\Delta}_n$ = 9° 54′
$(\partial\overline{\Delta}_n/\partial\overline{L_H}).\delta\overline{L_H}$	+25′,4	$\overline{\Delta}_n - \overline{\Delta}_n = +23'$	$\overline{\Delta}_n - \overline{\Delta}_n = -52'$
$(\partial\overline{\Delta}_n/\partial\overline{B_H}).\delta\overline{B_H}$	−11′,7		
Δ_n	11° 0′	$\frac{\partial\overline{\Delta}_n}{\partial\overline{L_H}} = +0{,}38$	$\frac{\partial\overline{\Delta}_n}{\partial\overline{B_H}} = -0{,}87$
	h m s	$a_n = +0{,}09$	$b_n = -0{,}20$
$\overline{T_n}$	0 2 41		
$\overline{t_H}$	* 0 49 42	$S_n = +0{,}89$	
$\overline{t_n} = \overline{T_n}+\overline{t_H}$	0 52 23		
t_n^*	0 52 24		
$F_n = t_n^* - \overline{t_n}$	+1		

$n = 1$

Tabelle 3.

n	a	b	c	S	F
1	+ 0,09	− 0,20	+ 1	+ 0,89	+ 1
2	+ 0,14	− 0,08	+ 1	+ 1,06	+ 6
3	+ 0,13	− 0,08	+ 1	+ 1,05	+ 1
4	− 0,09	− 0,14	+ 1	+ 0,77	− 10
5	+ 0,13	− 0,08	+ 1	+ 1,05	+ 10

Digitized by Google

Tabelle 4.

$aa = +0{,}0696$	$ab = -0{,}0374$	$ac = +0{,}4000$	$aS = +0{,}4322$	$aF = +3{,}26$	
*	$bb = +0{,}0788$	$bc = -0{,}5800$	$bS = -0{,}5386$	$bF = -0{,}16$	
*	$\frac{ab}{aa}ab = +0{,}0201$	$\frac{ab}{aa}ac = -0{,}2150$	$\frac{ab}{aa}aS = -0{,}2325$	$\frac{ab}{aa}aF = -1{,}75$	
*	$bb.1 = +0{,}0587$	$bc.1 = -0{,}3650$	$bS.1 = -0{,}3061$	$bF.1 = +1{,}59$	
		$cc = +5{,}00$	$cS = +4{,}82$	$cF = +8{,}0$	$FS = +11{,}10$
$\frac{ab}{aa} = -0{,}538$	$\frac{bc.1}{bb.1} = -6{,}22$	$\frac{ac}{aa}ac = +2{,}31$	$\frac{ac}{aa}aS = +2{,}49$	$\frac{ac}{aa}aF = +18{,}8$	$\frac{aF}{aa}aS = +20{,}25$
$\frac{ac}{aa} = +5{,}75$	$\frac{bF.1}{bb.1} = +27{,}1$	$cc.1 = +2{,}69$	$cS.1 = +2{,}33$	$cF.1 = -10{,}8$	$FS.1 = -0{,}15$
$\frac{aF}{aa} = +46{,}8$	$\frac{cF.2}{cc.2} = -2{,}20$	$\frac{bc.1}{bb.1}bc.1 = +2{,}27$	$\frac{bc.1}{bb.1}bS.1 = +1{,}90$	$\frac{bc.1}{bb.1}bF.1 = -9{,}9$	$\frac{bF.1}{bb.1}bS.1 = -8{,}27$
$1/D = +584$	$\mu = \pm 4{,}53$	$cc.2 = +0{,}42$	$cS.2 = +0{,}43$	$cF.2 = -0{,}9$	$FS.2 = -0{,}86$
$bb.cc = +0{,}394$	$aa.cc = +0{,}348$	$aa.bb = +0{,}00548$	$ab.cc = -0{,}187$	$ac.bb = +0{,}0315$	$bc.aa = -0{,}0404$
$bc.bc = +0{,}336$	$ac.ac = +0{,}160$	$ab.ab = +0{,}00140$	$ac.bc = -0{,}232$	$ab.bc = +0{,}0217$	$ab.ac = -0{,}0149$
$Z_{LL} = +0{,}058$	$Z_{BB} = +0{,}188$	$Z_{tt} = +0{,}00408$	$-Z_{LB} = -0{,}045$	$-Z_{Lt} = -0{,}0098$	$-Z_{Bt} = +0{,}0255$
$Q_{LL} = +33{,}9$	$Q_{BB} = +110$	$Q_{tt} = +2{,}39$	$Q_{LB} = -26{,}3$	$Q_{Lt} = -5{,}72$	$Q_{Bt} = +14{,}9$
$\sqrt{Q_{LL}} = \pm 5{,}82$	$\sqrt{Q_{BB}} = \pm 10{,}5$	$\sqrt{Q_{tt}} = \pm 1{,}55$			
$\mu_L = \pm 26'$	$\mu_B = \pm 48'$	$\mu_t = \pm 7^s$			

$Q_{LL} = +33{,}9$	$Q_{LB} = -26{,}3$	$Q_{Lt} = -5{,}7$	$FF = +238$
$Q_{LB} = -26{,}3$	$Q_{BB} = +110{,}0$	$Q_{Bt} = +14{,}9$	$\frac{aF}{aa}aF = +153$
$Q_{Lt} = -5{,}7$	$Q_{Bt} = +14{,}9$	$Q_{tt} = +2{,}4$	*
			$\frac{bF.1}{bb.1}bF.1 = +43$
$Q_L = +1{,}9$	$Q_B = +98{,}6$	$Q_t = +11{,}6$	*
$aS.Q_L = +0{,}8$	$bS.Q_B = -53{,}1$	$cS.Q_t = +55{,}8$	$\frac{cF.2}{cc.2}cF.2 = +2$
			$ff = +41$
			$\delta\overline{L}_H = +66',7$
			$\delta\overline{B}_H = +13',5$
			$\delta\overline{t}_H = -2^s,2$
			$L_H = 77^\circ\ 7'\,\mathrm{E} \pm 26'$
			$B_H = 32^\circ 14'\,\mathrm{N} \pm 47'$
			$t_H = 0^h\,49^m\,40^s \pm 7^s$

Digitized by Google

Tabelle 5.

	Taschkent	Schemacha	Tiflis	Irkutsk	Batum
a	+ 0,09	+ 0,14	+ 0,13	— 0,09	+ 0,13
b_n	— 0,20	— 0,08	— 0,08	— 0,14	— 0,08
$a_n \,.\, \delta\overline{L}_H$ Sek.	+ 6,0	+ 9,3	+ 8,7	— 6,0	+ 8,7
$b_n \,.\, \delta\overline{B}_H$ Sek.	— 2,7	— 1,1	— 1,1	— 1,9	— 1,1
$\delta\overline{t}_H$ Sek.	— 2,2	— 2,2	— 2,2	— 2,2	— 2,2
$-F_n$ Sek.	— 1,0	— 6,0	— 1,0	+ 10,0	— 10,0
f_n Sek.	+ 0,1	± 0,0	+ 4,4	— 0,1	— 4,6

Zur Konstruktion der Fehlerellipse berechnen wir nach (29)

$$Q_{11} = +24{,}2; \qquad Q_{12} = -22{,}2; \qquad Q_{22} = +110$$

und finden nach (30)

$$\operatorname{tg} 2\omega_{\left\{\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right.} = \frac{-44{,}4}{-85{,}8} = +0{,}518,$$

woraus

$$\omega_1 = 13^0\,42', \qquad \omega_2 = 103^0\,42'$$

resultieren. Die Halbaxen μ_{ω_1} und μ_{ω_2} liefert (30):

$$\mu_{\omega_1} = \pm 4{,}53\,\sqrt{24{,}2 - 22{,}2\,.\,0{,}244} = \pm 19{,}7 \text{ Meilen},$$

$$\mu_{\omega_2} = \pm 4{,}53\,\sqrt{24{,}2 + 22{,}2\,.\,4{,}10} = \pm 48{,}5 \quad \text{„} \quad .$$

Figur 3 zeigt die daraus konstruierte Fehlerellipse. Wir projicieren sie graphisch auf den Parallelkreis resp. den Meridian, und erhalten die Werte ± 22,3 resp. ± 47,7 Meilen; andererseits findet man direkt

$$\mu_L \,.\, \operatorname{Cos} B_H = \pm 22 \text{ Meilen},$$

$$\mu_B \qquad\qquad = \pm 48 \quad \text{„} \quad ,$$

und erkennt, daß die beiden Wertepaare sich hinreichend decken.

Figur 3 zeigt, daß die Fehlerellipse sehr gestreckt ist. Verfügt man über weitere Stationen, so wird man ev. hauptsächlich solche hinzuziehen, die in der Richtung der großen Ellipsenaxe liegen. Dadurch kann man erreichen, daß sich die Ellipse einem Kreise vom Radius μ_{ω_1} nähert, wodurch die Herdzeit ganz bedeutend genauer resultiert.

Digitized by Google

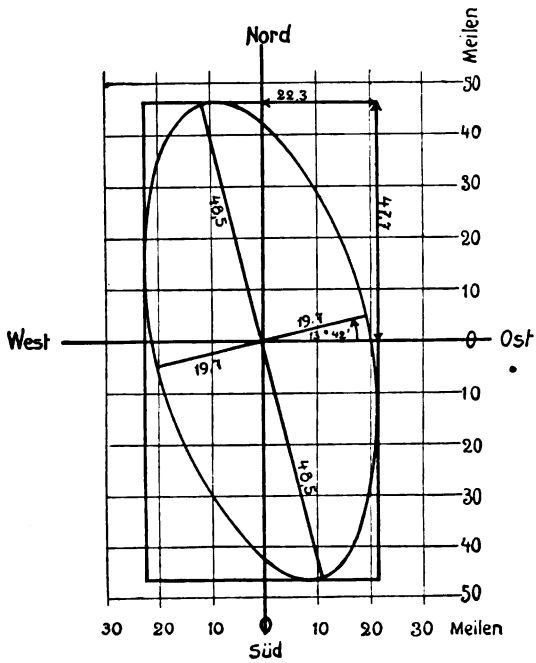


Fig. 3.

§ 3. Problem bei 3 Stationen.

I. Analytische Lösung für 3 Stationen.

Ist die Anzahl der Stationen $N = 3$, so ist das Problem nicht mehr überbestimmt, bedarf also auch keiner Ausgleichungsrechnung mehr. Man wird dann die 3 Fehlergleichungen (10) homogen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} a_1.\delta\overline{L}_H + b_1.\delta\overline{B}_H + c_1.\delta\overline{t}_H - F_1 &= 0 \\ a_2.\delta\overline{L}_H + b_2.\delta\overline{B}_H + c_2.\delta\overline{t}_H - F_2 &= 0 \\ a_3.\delta\overline{L}_H + b_3.\delta\overline{B}_H + c_3.\delta\overline{t}_H - F_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

und successive auflösen. Zur Kontrolle berechnet man gleichzeitig die Quersummen

$$s_n = a_n + b_n + c_n + F_n. \qquad (28)$$

Man multipliziert die 1. Gleichung (27) mit

Digitized by Google

$\left.\begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} \text{ und subtrahiert sie von der 2.,} \\ \frac{a_3}{a_1} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 3., \end{array}\right\}$

und erhält

$$\left.\begin{aligned} b_2' . \delta\overline{B}_H + c_2' . \delta\overline{t}_H - F_2' &= 0, \\ b_3 . \delta\overline{B}_H + c_3' . \delta\overline{t}_H - F_3' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Dann multipliziert man die 1. Gleichung (29) mit $\frac{b_3'}{b_2'}$, subtrahiert sie von der 2. und erhält

$$c_3'' . \delta\overline{t}_H - F_3'' = 0, \tag{30}$$

was $\delta\overline{t}_H$ liefert. Durch Rückwärtssubstituieren erhält man auch die beiden andern Unbekannten $\delta\overline{B}_H$ und $\delta\overline{L}_H$.

Es empfiehlt sich dabei nach folgendem Schema zu rechnen (vergl. auch das Beispiel in II dieses §):

No.	a_n	b_n	c_n	F_n	s_n
(1)	a_1	b_1	c_1	F_1	s_1
(2)	a_2	b_2	c_2	F_2	s_2
(3)	*	$\frac{a_2}{a_1} \cdot b_1$	$\frac{a_2}{a_1} \cdot c_1$	$\frac{a_2}{a_1} \cdot F_1$	$\frac{a_2}{a_1} \cdot s_1$
(4)	a_3	b_3	c_3	F_3	s_3
(5)	*	$\frac{a_3}{a_1} \cdot b_1$	$\frac{a_3}{a_1} \cdot c_1$	$\frac{a_3}{a_1} \cdot F_1$	$\frac{a_3}{a_1} \cdot s_1$
(6) = (2) − (3)	*	b_2'	c_2'	F_2'	s_2'
(7) = (4) − (5)	*	b_3'	c_3'	F_3'	s_3'
(8)	*	*	$\frac{b_3'}{b_2'} \cdot c_2'$	$\frac{b_3'}{b_2'} \cdot F_2'$	$\frac{b_3'}{b_2'} \cdot s_2'$
(9) = (7) − (8)	*	*	c_3''	F_3''	s_3''

II. Beispiel für 3 Stationen.

Wir behandeln als Beispiel für 3 Stationen das gleiche Beben, daß in § 2, VII für 5 Stationen gelöst worden war, und zwar wählen wir die 3 Stationen

Taschkent, Tiflis, Irkutsk.

Die Rechnung bis zur Aufstellung der Fehlergleichungen (27) ist genau die selbe wie oben; man wird also nach dem Schema der

Digitized by Google

Tabelle 2 rechnen mit dem einzigen Unterschiede, daß man zur Kontrolle statt der Summe

$$S_n = a_n + b_n + c_n$$

die Summe

$$s_n = a_n + b_n + c_n + F_n \tag{31}$$

bildet. Die Werte für a_n, b_n, c_n, F_n entnehmen wir der Tabelle 3 und lösen die 3 Gleichungen nach dem in § 3, I mitgeteilten Schema auf:

Tabelle 6.

No.	a_n	b_n	c_n	F_n	s_n
(1)	+ 0,09	− 0,20	+ 1	+ 1	+ 1,89
(2)	+ 0,13	− 0,08	+ 1	+ 1	+ 2,05
(3)	*	− 0,29	+ 1,44	+ 1,44	+ 2,74
(4)	− 0,09	− 0,14	+ 1	− 10	− 9,23
(5)	*	+ 0,20	− 1	− 1	− 1,89
(6) = (2) − (3)	*	+ 0,21	− 0,44	− 0,44	− 0,69
(7) = (4) − (5)	*	− 0,34	+ 2,00	− 9,00	− 7,34
(8)	*	*	+ 0,71	+ 0,71	+ 1,12
(9) = (7) − (8)	*	*	+ 1,29	− 9,71	− 8,46

Wir erhalten nach (30), (29), (28):

$$\delta\overline{t}_H = -\ 7^s,5$$
$$\delta\overline{B}_H = -17',8$$
$$\delta\overline{L}_H = +54',8$$

und gemäß (1):

$$L_H = 76^\circ 55' \text{ E},$$
$$B_H = 31^\circ 42' \text{ N},$$
$$t_H = 0^h\ 49^m\ 35^s.$$

Als Schlußkontrolle setzen wir die Werte $\delta\overline{L}_H$, $\delta\overline{B}_H$, $\delta\overline{t}_H$ in (27) ein und erhalten $-0,05$; $+0,02$; $+0,07$ statt je Null was hinreichend ist.

Digitized by Google

Ueber Deformationen an den Krystallen des Kaliumchlorat $KClO_3$ nach Untersuchungen von Paul Fischer.

Von

O. Mügge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Juli 1910.

Zu den Substanzen, welche der rhomboëdrischen Form des Kalkcarbonates in krystallographischer Hinsicht ähneln, gehört neben dem rhomboëdrischen Natriumnitrat auch das monokline Kaliumchlorat; alle drei fallen auch durch eine gewisse atomistische Analogie auf:

$$CaCO_3,\ NaNO_3,\ KClO_3.$$

Die Aehnlichkeit erstreckt sich auch auf die optischen Eigenschaften und, wie die Untersuchungen von P. Fischer nun ergeben haben, auch auf die beim Kalkspat wie am Natriumsalpeter bekanntlich sehr bemerkenswerten Cohaesionsverhältnisse.

Die drei Flächen des Natriumchlorat, welche den drei Spaltflächen des Kalkspats nach ihren Winkeln entsprechen, werden nach der Aufstellung von Brooke als Basis (001) und Säule (110) aufgefaßt; sie sind auch beim Natriumchlorat Spaltflächen, (001) aber vollkommener als (110). Den Flächen des nächststumpferen Rhomboëders $(01\bar{1}2)$ des Kalkspats entsprechen dann am Natriumchlorat nach Winkeln und Zonenverband Orthopinakoid (100) und negative Hemipyramide (112), beide häufig beobachtet. Am Kalkspat sind die genannten Flächen bekanntlich ausgezeichnete Gleitflächen für einfache Schiebungen mit der jeder Fläche des nächststumpferen Rhomboëders gegenüberliegenden Fläche des Spaltrhomboëders als zweiter Kreisschnittsebene; Kaliumchlorat verhält sich ganz ähnlich, nur liegen die Verhältnisse, z. T. wegen seiner

Digitized by Google

monoklinen Symmetrie, z. T. weil auch die reciproken Schiebungen möglich sind, erheblich complicirter, indem die Krystalle nicht weniger als 5 verschiedene Deformationen eingehen:

1) Einfache Schiebungen längs $K_1 = (100)$ mit $K_2 = (001)$ als zweiter Kreisschnittsebene (oder $\sigma_2 = [100]$ als Grundzone). Sie geht am leichtesten von allen vor sich und ist der des Kalkspats nach dem nächststumpferen Rhomboëder $(01\bar{1}2)$ am ähnlichsten, indem die Ebene der Schiebung in beiden Fällen rational, nämlich Symmetrieebene ist.

Auch Größe und Verhältnis der Schiebung sind ähnlich wie am Kalkspat:

$$CaCO_3 \quad s = 0.693;\ \sigma = 1.405$$
$$NaClO_3 \quad s = 0.716;\ \sigma = 1.420$$

Lamellare verschobene Teile entstehen leicht, wenn nach der Klinoaxe gestreckte Krystalle zwischen den mit Korkplättchen belegten Flächen $(10\bar{1})$ und $(\bar{1}01)$ gepreßt werden.

2) Einfache Schiebungen längs $K_1 = (001)$ entstehen durch Druck parallel der Klinoaxe der für den oberen Teil des Krystalls vom negativen zum positiven Ende derselben gerichtet ist. Daß die verschobenen Teile sich in Zwillingsstellung nach (001) befinden, läßt sich geometrisch wegen der Feinheit der entstehenden Lamellen nicht mit Sicherheit nachweisen, indessen zeigen die an den deformierten Teilen hergestellten Spaltflächen nach (110) eine feine Streifung parallel (001). Die Zwillingsstellung ergiebt sich mit Sicherheit aus den durch die Basis sichtbaren Interferenzfiguren, welche denen der natürlichen Zwillinge nach (001) ganz gleichen, ferner daraus, daß derartig deformierte Krystalle denselben silberigen oder farbigen Lichtschein auf (001) annehmen der für die natürlichen polysynthetisch nach (001) verzwillingten Krystalle charakteristisch ist, endlich daraus, daß die deformierten Teile in übersättigten Lösungen zu deutlichen Zwillingen nach (001) auswachsen. Es ist sehr wahrscheinlich, daß die zweite Kreisschnittsebene in diesem Falle (100), die Schiebung also reciprok zu der unter 1) ist. Zwillingslamellen gleich den hier mechanisch erzeugten entstehen auch beim Erhitzen auf ca. 200°. Am Kalkspat hat diese Schiebung kein Analogon, indessen kommen Zwillinge nach $(10\bar{1}1)$ wie sie durch eine derartige Deformation entstehen würden vielfach natürlich vor.

3) Einfache Schiebungen nach $K_1 = (110)$ entstehen, wenn die Krystalle so gepreßt werden, daß Druckcomponenten parallel der Symmetrieebene (welche im Allgemeinen Deformationen wie unter 1) und 2) bewirken, da für diese die Symmetrieebene Ebene der

Digitized by Google

Schiebung ist) möglichst vermieden werden, am ehesten beim Pressen zwischen Korkbacken in der Richtung der Orthoaxe. Die verschobenen Teile erscheinen wieder nur in der Form feiner Lamellen aus deren Reflexen auf (001) und (100) sich ergiebt, daß diese Flächen in die nach (110) symmetrische Lage übergeführt werden, also $[1\bar{1}0]$ als Grundzone bestimmen. Damit ist auch die Lage der verschobenen Teile auf $(10\bar{1})$, $(01\bar{1})$ und (100) im Einklang. Die Schiebung entspricht bei pseudorhomboëdrischer Auffassung der Krystalle wie die unter 2) beschriebene einer solchen nach dem Grundrhomboëder, indessen ist die Schiebungsrichtung hier irrational (sie weicht allerdings nur $5^0\,3'$ von der rationalen Kante $[110 : 10\bar{1}]$ ab). Die Lamellen machen sich durch ihre abweichenden optischen Eigenschaften bemerkbar und ihre Zwillingslage tritt noch deutlicher hervor, wenn man sie weiter wachsen läßt. Hinsichtlich der Analogie mit Kalkspat gilt dasselbe wie unter 2).

4) Einfache Schiebungen längs $\sigma_1 = [110]$ entstehen gleichzeitig mit den unter 3) aufgeführten und machen sich durch Streifung auf den Flächen außer auf $(1\bar{1}0)$ und (001) bemerklich. Die Lage der verschobenen Flächenteile macht es sehr wahrscheinlich, daß bei dieser einfachen Schiebung die zweite Kreisschnittsebene $K_2 = (110)$ ist, die Schiebung also reciprok zu der unter 3) aufgeführten. Damit ist in guter Uebereinstimmung die Lage der (hier irrationalen) Gleitfläche K_2, welche sich nach Rechnung und Beobachtung der Lage von (112) nähert.

5) Außer diesen einfachen Schiebungen gehen die Krystalle auch Translation ein, und zwar nach (001) in der Richtung der Klinoaxe. Sie erfolgt, wenn der obere Teil eines Krystalls einem Druck in der Richtung vom negativen zum positiven Ende dieser Axe ausgesetzt und gleichzeitig zwischen den etwa mit Korkplatten belegten Basisflächen gepreßt wird. Wie bei den Krystallen von Baryumbromid und Glimmer ist diese Translation eine einseitige, erfolgt nicht auch in der Gegenrichtung. Daß in diesem Falle bloße Translation, nicht einfache Schiebung wie unter 2) stattfindet, ergiebt sich einmal aus dem optischen Verhalten so deformierter Platten parallel (001), dann daraus, daß Spaltflächen parallel (110) durch die verschobenen Teile keine Streifung nach (001) aufweisen, endlich daraus, daß die deformierten Teile unter Verlust ihrer charakteristischen Translationsstreifung als einheitliche Krystalle weiter wachsen.

Auf der einseitigen Translationsfähigkeit nach (001) beruht eine ebenfalls nur einseitige Biegbarkeit um die Orthoaxe und zwar nach oben für den vorderen Teil der Krystalle. Man kann

Digitized by Google

sie bewirken durch Eindrücken eines parallel zur Orthoaxe aufgelegten Glasstabes auf die Basis (und zwar auf die obere Fläche (001) für die Biegung im angegebenen Sinn). Die cylindrische Einmuldung der oberen Basisfläche erreicht 40°, auch die anliegenden Säulenflächen werden gekrümmt und bedecken sich mit feiner Translationsstreifung nach (001). Vielfach entstehen gleichzeitig auch Zwillingslamellen nach (001). Eine Zurückbiegung ist nicht möglich. Während man bei Krystallen, deren Translationsebene senkrecht zu einer gradzähligen Symmetrieaxe liegt (z. B. Antimonglanz, Gyps), leicht sattelförmige Biegungen erhält, bei manchen sogar Ringbiegung möglich ist (z. B. 1.2.4.6-Tribromtoluol), weil bei ihnen die Translation in Richtung und Gegenrichtung gleich gut erfolgt, ist dies beim chlorsauren Kali nicht möglich. Zwillinge nach (001) sind in Folge der nur einseitigen Translation überhaupt nicht biegbar, bei hinreichend großem Druck zerspringen sie vielmehr explosionsartig.

Erscheinungen, welche dieser Translationsfähigkeit entsprechen würden, sind am Kalkspat nicht mit Sicherheit bekannt. Biegungen treten am Kalkspat nur schwierig ein, dann aber anscheinend ebenfalls nur einseitig und zwar in einem Sinne der eine Translationsfähigkeit längs $(01\bar{1}2)$ nach derselben Richtung in der die einfache Schiebung stattfindet wahrscheinlich macht. Diese Translationsebene würde also nicht (001) sondern (100) des Kaliumchlorats entsprechen.

Am Kalkspat stehen die Schlag- und Ritzfiguren auf den Spaltungsflächen mit seinen einfachen Schiebungen in engem Zusammenhang, es ist daher nicht zu verwundern, daß sie am Kaliumchlorat auf den Flächen des Pseudorhomboëders (001).(110) denen des Kalkspats in Form und Orientierung durchaus ähnlich, indessen auf (110) der monoklinen Symmetrie entsprechend merklich unsymmetrisch sind. Sie scheinen wesentlich durch die Spaltbarkeit nach (001) und (110) und durch die einfachen Schiebungen nach (100) und längs [110] bedingt zu sein, während die Schiebungen nach (001) und (110) und die Translation nach (001) sich kaum bemerklich machen. Man erhält sie durch vorsichtiges Eindrücken einer Nadel in die Spaltflächen, sie sind nur unter dem Microscop gut zu erkennen.

Trotz der großen Analogie der geometrischen und Cohaesions-Verhältnisse des Kaliumchlorat mit denen des Kalkspates sind seine einfachen Schiebungen nicht als mimetisch in Bezug auf die Symmetrie des Kalkspats zu bezeichnen, da durch sie, auch wenn sie molekular vor sich gehen würden, keine Annäherung an rhom-

Digitized by Google

boëdrische Symmetrie zu erreichen sein würde, dazu würden vielmehr einfache Schiebungen nach den den Symmetrieebenen $(11\bar{2}0)$ des Kalkspats ungefähr entsprechenden Flächen $(11\bar{2})$ mit dazu annähernd senkrechter Grundzone und zu diesen reciproke dienlich sein. Es ist daher bemerkenswert, daß eine am Kaliumchlorat aufgefundene Zustandsänderung, die bei ca. 255° vor sich geht, die Krystalle nicht in eine rhomboëdrische, Kalkspat-ähnliche, sondern in eine davon stark abweichende rhombische Modification überführt, wie namentlich aus der Beobachtung der Interferenzcurven bei hoher Temperatur sich ergibt. Danach wird (001) optische Symmetrieebene, und da beim Erwärmen auf diese Temperatur auch zahllose feine Zwillingslamellen nach (001) entstehen, wird rhombische Symmetrie auch in geometrischer Hinsicht erreicht. Die Zwillingslamellen machen sich anfänglich durch den von Stokes u. a. untersuchten silberigen oder farbigen Reflex auf (001) bemerklich, dieser verschwindet aber wieder nachdem die Umwandlung eingetreten ist, vermutlich weil die Dicke der Lamellen jetzt molekular, also klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes, geworden ist. Daß eine merkliche Wärmetönung bei der Umwandlung nicht beobachtet werden konnte, rührt vermutlich daher, daß sich die Umwandlung ähnlich wie bei Aragonit innerhalb eines größeren Temperaturintervalles vollzieht, darauf deutet das Eintreten der Zwillingslamellirung schon erheblich unter der Umwandlungstemperatur hin.

Digitized by Google

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

Sechste Mitteilung

von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Mai 1910.

In der vorliegenden Mitteilung behandle ich zunächst die Randwertaufgabe für ein simultanes System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus, sodann setze ich eine neue Methode, die Methode der „Parametrix", zur Zurückführung von Differentialgleichungen auf Integralgleichungen auseinander und verwende dieselbe zur Integration der allgemeinsten elliptischen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf der Kugel, wobei die Theorie der Eigenwerte und der Eigenfunktionen auf der Kugel sowie das zugehörige Variationsproblem vollständig erledigt wird. Die dann folgenden letzten drei Abschnitte beschäftigen sich mit besonderen, ganz verschiedenartigen Problemen aus der Geometrie und Analysis, nämlich mit Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche, mit einem Problem aus der Theorie der automorphen Funktionen und endlich mit einer gewissen zweiparametrigen Randwertaufgabe, die mit Kleins Oszillationstheorem in engster Beziehung steht: ich wollte durch die Auswahl dieser Beispiele die mannigfache Verwendbarkeit meiner Theorie der orthogonalen und polaren Integralgleichungen offenbar machen.

Digitized by Google

XVII.

Die Randwertaufgabe für ein System simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus.

In meiner zweiten Mitteilung[1]) habe ich eine Methode angegeben, wie die Randwertaufgaben für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von elliptischem Typus mittelst der Theorie der Integralgleichungen gelöst werden können. Meine Methode ist auch anwendbar, wenn ein System von simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vorliegt: nur bedarf es dann einer entsprechenden Greenschen Formel und an Stelle der früheren Greenschen Funktion mit logarithmischer Unendlichkeitsstelle $x = \xi$, $y = \eta$ tritt ein System von Greenschen Funktionen, die an jener Stelle gewisse Singularitäten erster Ordnung aufweisen. Wir wollen hier die damit angedeuteten Modifikationen meiner Methode an dem folgenden speziellen Probleme erläutern.

In der xy-Ebene sei eine geschlossene Kurve C durch die Gleichungen

$$x = a(s), \qquad y = b(s)$$

gegeben, wo $a(s)$, $b(s)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s sind; das von C umschlossene Gebiet der xy-Ebene werde mit J bezeichnet. Es seien die zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= pu + qv, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= ku + lv \end{aligned} \tag{1}$$

vorgelegt, wo p, q, k, l gegebene innerhalb J einschließlich C zweimal stetig differenzierbare Funktion der unabhängigen Variabeln x, y bedeuten; es wird nun nach zwei solchen Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ gefragt, die innerhalb J den partiellen Differentialgleichungen (1) genügen, während $u(xy)$ auf der Randkurve C ge-

1) Diese Nachrichten 1904, S. 213.

Digitized by Google

gebene auf C viermal stetig differenzierbare Werte

$$u(s) = f(s)$$

annimmt [1]).

Für die linker Hand in (1) stehenden Differentialausdrücke erster Ordnung führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$L(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$M(u, v) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ein. Alsdann stellen wir die folgende, der bekannten Greenschen Formel entsprechende, für zwei willkürliche Funktionenpaare $u(xy)$, $v(xy)$, $u^*(xy)$, $v^*(xy)$ gültige Identität auf:

$$(2)\quad \int \{u^* L(u, v) - v^* M(u, v) + u L(u^*, v^*) - v M(u^*, v^*)\}\, dJ = \int \left\{u\left(v^* \frac{dx}{ds} + u^* \frac{dy}{ds}\right) + v\left(u^* \frac{dx}{ds} - v^* \frac{dy}{ds}\right)\right\} ds,$$

wo das Doppelintegral linker Hand über J oder irgend ein innerhalb J gelegenes Gebiet und das einfache Integral rechter Hand über die Randkurven dieses Gebietes zu erstrecken ist.

Es mögen nun $G^{\mathrm{I}}(xy, \xi\eta)$, $G^{\mathrm{II}}(xy, \xi\eta)$ für die Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

die Greenschen Funktionen erster Art bez. zweiter Art im erweiterten Sinne [2]) sein; dies sind solche Funktionen der Variabelnpaare x, y; ξ, η, deren jede die Form besitzt

$$-\tfrac{1}{2} \log \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\} + \gamma(xy, \xi\eta)$$

— unter γ eine für jeden innerhalb J liegenden Punkt ξ, η und für jeden innerhalb J oder auf C liegenden Punkt x, y zweimal stetig differenzierbare Funktion verstanden —, die ferner identisch in ξ, η den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^{\mathrm{I}}}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 G^{\mathrm{II}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^{\mathrm{II}}}{\partial y^2} = \frac{2\pi}{J},$$

1) Die hier dargelegte Methode wird in der demnächst erscheinenden Inauguraldissertation von W. A. Hurwitz (Göttingen 1910) auch auf Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von nicht elliptischem Typus sowie auf kompliziertere Randbedingungen ausgedehnt werden.

2) Vgl. die zweite Mitteilung, S. 251—252.

Digitized by Google

sowie den Randbedingungen bez. der Integralbedingung

$$(3) \qquad [G^{\mathrm{I}}(xy,\ \xi\eta)]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial G^{\mathrm{II}}(xy,\ \xi\eta)}{\partial n}\right]_{\substack{x=a(s)\\ y=b(s)}} = 0, \qquad \int_{(J)} G^{\mathrm{II}}(xy,\ \xi\eta)\,dJ = 0$$

genügen, wo J den Flächeninhalt des Gebietes J bedeutet und unter n die Richtung der inneren Normalen auf der Kurve C zu verstehen ist.

Wir nehmen jetzt erstens

$$u^* = -\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}, \qquad v^* = \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y},$$

sodaß

$$L(u^*,\ v^*) = 0,$$
$$M(u^*,\ v^*) = 0$$

wird und führen diese Werte in die Formel (2) ein, indem wir zuvor die Unendlichkeitsstelle ξ, η durch einen kleinen Kreis ausschließen. Der Grenzübergang bei Zusammenziehung dieses Kreises auf den Mittelpunkt ξ, η liefert dann die Gleichung

$$(4) \quad -\int_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}L(u,\ v)+\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}M(u,\ v)\right\}dJ = \int_{(C)} u(s)\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}\,ds - 2\pi u(\xi\eta),$$

wo das Doppelintegral linker Hand über das Gebiet J und das einfache Integral rechts über dessen Randkurve C zu erstrecken ist, während n die Richtung der inneren Normale auf C bezeichnet.

Nehmen wir zweitens

$$u^* = \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}, \qquad v^* = \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x},$$

wobei

$$L(u^*,\ v^*) = 0,$$
$$M(u^*,\ v^*) = \frac{2\pi}{J}$$

wird, so führt das entsprechende Verfahren zu der Formel

$$(5) \quad \int_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}L(u,\ v)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}M(u,\ v)-\frac{2\pi}{J}v\right\}dJ$$
$$= \int_{(C)} u(s)\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s}\,ds - 2\pi v(\xi\eta).$$

Digitized by Google

Hilfssatz. Wenn zwei Funktionen $A(xy)$, $B(xy)$ zweimal stetig differenzierbar innerhalb J einschließlich des Randes C und überdies von der Beschaffenheit sind, daß für sie identisch in ξ, η die zwei Integralgleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} \int_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x} A(xy) + \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y} B(xy) \right\} dJ &= 0, \\ \int_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y} A(xy) - \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x} B(xy) \right\} dJ &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind, so sind A und B selbst identisch Null.

Zum Beweise dieses Hülfssatzes bestimmen wir durch Berechnung des ebenen Flächenpotentials auf die in der Potentialtheorie übliche Weise eine Funktion $u(xy)$, die innerhalb J einschließlich C der Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

genügt. Alsdann finden wir durch Integration sofort eine zugehörige Funktion v, so daß

$$(7)\qquad \left| \begin{aligned} L(u, v) &= A, \\ M(u, v) &= B, \end{aligned} \right.$$

wird. Führen wir nun die so gefundenen Funktionen $u(xy)$, $v(xy)$ in (4) und (5) ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf (7) und (6) die Gleichungen

$$\begin{aligned} u(\xi\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} u(s) \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n} ds, \\ v(\xi\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} u(s) \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s} ds + \frac{1}{J} \int_{(J)} v(xy) dJ. \end{aligned}$$

Die erstere Gleichung zeigt, daß $u(xy)$ nichts anders als dasjenige ebene Potential ist, das in J der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt und auf C die Werte $u(s)$ aufweist. Bringen wir andererseits die letzte Gleichung auf die Form

$$v(\xi\eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \frac{du(s)}{ds} G^{\mathrm{II}} ds + \frac{1}{J} \int_{(J)} v(xy) dJ,$$

so erkennen wir, daß v dasjenige ebene Potential ist, dessen normale Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial n}$ auf C gleich den Werten $\frac{du(s)}{ds}$ sind, d. h.

Digitized by Google

es ist v genau ein zu u konjugiertes ebenes Potential, sodaß überall innerhalb J die Differentialgleichungen

$$L(u, v) = 0,$$
$$M(u, v) = 0$$

gelten. Wegen (7) folgt hieraus, daß A und B identisch Null sind und damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Um nunmehr die anfangs gestellte Randwertaufgabe für die Differentialgleichungen (1) zu lösen, betrachten wir das folgende System von Integralgleichungen

$$(8)\quad -\int_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}(pu+qv)+\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}(ku+lv)\right\}dJ = \int_{(C)} f(s)\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}ds - 2\pi u(\xi\eta),$$

$$(9)\quad \int_{(J)}\left\{\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}(pu+qv)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}(ku+lv)-\frac{2\pi}{J}v\right\}dJ = \int_{(C)} f(s)\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial s}ds - 2\pi v(\xi\eta),$$

das sich auch in die Gestalt

$$(10)\quad \begin{cases} u(\xi\eta)+\int_{(J)}\{K_1(\xi\eta, xy)\,u(xy)+K_2(\xi\eta, xy)\,v(xy)\}\,dJ = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} f(s)\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial n}ds, \\ v(\xi\eta)+\int_{(J)}\{K_3(\xi\eta, xy)\,u(xy)+K_4(\xi\eta, xy)\,v(xy)\}\,dJ = -\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\frac{df(s)}{ds}G^{\mathrm{II}}ds, \end{cases}$$

bringen läßt, wo zur Abkürzung

$$2\pi K_1(\xi\eta, xy) = -\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}p(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}k(xy),$$
$$2\pi K_2(\xi\eta, xy) = -\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x}q(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y}l(xy),$$
$$2\pi K_3(\xi\eta, xy) = \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}p(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}k(xy),$$
$$2\pi K_4(\xi\eta, xy) = \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y}q(xy)-\frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x}l(xy)-\frac{1}{J}$$

gesetzt ist. Nehmen wir in (10) rechter Hand Null, so entstehen die zu (10) zugehörigen homogenen Integralgleichungen.

Wir machen nun zunächst die Annahme, daß diese homogenen Integralgleichungen keine Lösung besitzen. Nach dem bekannten von Fredholm aufgestellten Satze haben dann die Integralgleichungen (10) gewiß eine Lösung, d. h. es gibt stetige Funktionen $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$, die den Gleichungen (10) genügen. Da wegen der dreimaligstetigen Differenzierbarkeit der Funktion $f(s)$, $\frac{df(s)}{ds}$

Digitized by Google

auch die rechten Seiten in (10) dreimal stetig differenzierbare Funktionen von ξ, η innerhalb J und auf C sind, so folgt in der üblichen Weise durch dreimalige Iteration der Formeln (10) wonach sich $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ schließlich als achtfache Integrale darstellen, daß diese Funktionen $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ ebenfalls dreimal stetig differenzierbar innerhalb J und auf C sind.

Wegen der Symmetrie der Greenschen Funktion G^{I} in den Variabelnpaaren x, y und ξ, η folgt nach (3), daß sie identisch in x, y verschwindet, sobald der Punkt ξ, η in einen Punkt σ der Randkurve C rückt und mithin müssen dann auch $K_1(\sigma, xy)$ und $K_2(\sigma, xy)$ identisch in x, y verschwinden; die erstere der beiden Gleichungen (10) liefert mithin für die Funktion u die vorgeschriebenen Randwerte

$$u(\sigma) = f(\sigma). \tag{11}$$

Nunmehr führen wir die eben als Lösung der Integralgleichungen (10) erhaltenen Funktionen u, v sowohl in die Formeln (4), (5) wie in die Formeln (8), (9) ein. Subtrahieren wir dann (8) von (4) und andererseits (9) von (5), so entstehen unter Benutzung von (11) Gleichungen von der Gestalt

$$\int_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial x} A(xy) + \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial y} B(xy) \right\} dJ = 0,$$

$$\int_{(J)} \left\{ \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial y} A(xy) - \frac{\partial G^{\mathrm{II}}}{\partial x} B(xy) \right\} dJ = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$A(xy) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - (pu + qv),$$

$$B(xy) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - (ku + lv),$$

gesetzt ist. Da hier offenbar A, B zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Variabeln x, y innerhalb J und auf C werden, so sind dieselben mit Rücksicht auf den oben bewiesenen Hilfssatz identisch Null d. h. die Funktionen u, v genügen den anfangs vorgelegten partiellen Differentialgleichungen (1) erster Ordnung.

Nunmehr mögen entgegen der oben gemachten Annahme die zu (10) gehörigen homogenen Integralgleichungen eine Lösung $u(\xi\eta)$, $v(\xi\eta)$ besitzen, sodaß nicht zugleich $u = 0$, $v = 0$ ist. Dann zeigen die eben dargelegten Ueberlegungen, daß diese Funktionen Lösungen der Differentialgleichungen (1) sind, von denen

Digitized by Google

die erstere, $u(xy)$, die Randwerte Null besitzt. Ferner sind in diesem Falle — wie die Theorie der Integralgleichungen lehrt —, die inhomogenen Integralgleichungen (10) gewiß lösbar, sobald ihre rechte Seiten gewisse lineare Integralbedingungen erfüllen d. h. bei der gegenwärtigen Annahme besitzen die partiellen Differentialgleichungen (1) gewiß dann eine Lösung, wobei u die Randwerte $f(s)$ besitzen, wenn $f(s)$ gewissen linearen Integralbedingungen genügt. Doch sei bemerkt, daß unter besonderen Umständen diese Integralbedingungen identisch von allen Funktionen $f(s)$ erfüllt sein können; so besitzt offenbar das für

$$p = 0, \quad q = 0, \quad k = 0, \quad l = 0$$

aus (1) hervorgehende Gleichungssystem stets Lösungen, wobei u beliebig vorgeschriebene Randwerte $f(s)$ aufweist, obwohl dieses Gleichungssystem die von $u = 0$, $v = 0$ verschiedenen Lösungen $u = 0$, $v = 1$ mit den Randwerten $f(s) = 0$ zuläßt.

Durch Zusammenfassung der erhaltenen Resultate gewinnen wir den Satz:

Wenn die partiellen Differentialgleichungen (1) *außer* $u = 0$, $v = 0$ *kein Lösungssystem* u, v *besitzen, derart daß* u *auf der Randkurve* C *verschwindet, so besitzen sie stets notwendig ein Lösungssystem* u, v *derart, daß* u *auf der Randkurve* C *irgend vorgeschriebene Werte* $f(s)$ *annimmt. Im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn es ein Lösungssystem* u, v *der partiellen Differentialgleichungen* (1) *derart gibt, daß* u *auf* C *verschwindet und die Funktionen* u, v *nicht beide überall in* J *Null sind, so existiert ein Lösungssystem* u, v, *wobei* u *auf* C *die vorgeschriebenen Randwerte* $f(s)$ *annimmt, sicher immer dann, wenn* $f(s)$ *gewissen linearen Integralbedingungen in endlicher Anzahl genügt.*

XVIII.

Eine neue Methode der Zurückführung von Differentialgleichungen auf Integralgleichungen. Begriff der Parametrix.

Zum Schluß meiner fünften Mitteilung[1]) habe ich auf eine neue Methode hingewiesen, durch welche sich die Lösung linearer

1) Diese Gött. Nachr. 1906, S. 480. Vgl. auch den Bericht über einen von mir in der mathematischen Gesellschaft zu Göttingen gehaltenen Vortrag, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16 (1907), S. 77—78.

Digitized by Google

Differentialgleichungen mit Hülfe von Integralgleichungen bewerkstelligen läßt. Diese Methode unterscheidet sich von dem in meiner zweiten Mitteilung[1]) entwickelten Verfahren wesentlich dadurch, daß an Stelle der dort benutzten Greenschen Funktion die „Parametrix" tritt, d. h. eine Funktion, die ebenso, wie die Greensche Funktion außer von den Variabeln noch von Parametern abhängt, und auch die Unstetigkeits- und Randbedingungen wie die Greensche Funktion erfüllen muß, aber keineswegs wie diese einer Differentialgleichung zu genügen braucht. Die hierdurch gekennzeichnete Modifikation bringt den Vorteil mit sich, daß man bei der Integration der Differentialgleichung nicht nötig hat, zuvor die Lösbarkeit einer anderen Differentialgleichung vorauszusetzen und es daher auch gelingt, solche partielle Differentialgleichungen auf Integralgleichungen zurückzuführen, die nicht in derjenigen Normalform vorliegen, wie ich sie in meiner zweiten Mitteilung stets angenommen habe.

Ich entwickle in diesem Abschnitte die neue Methode an dem Beispiel der allgemeinsten linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus, während das Integrationsgebiet die Vollkugel ist.

Es seien s, t die unabhängigen Variabeln und z, w irgendwelche Funktionen derselben; als untere Indices an einer Funktion mögen s, t bedeuten, daß die partiellen Ableitungen der Funktion nach s, t zu nehmen sind. Wir gehen aus von dem allgemeinsten linearen partiellen Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$\mathfrak{L}(z) \equiv az_{ss} + 2bz_{st} + cz_{tt} + lz_s + mz_t + nz,$$

wo a, b, c, l, m, n gegebene Funktionen von s, t sind. Der zu $\mathfrak{L}(z)$ adjungierte Differentialausdruck ist

$$\mathfrak{M}(z) \equiv (az)_{ss} + 2(bz)_{st} + (cz)_{tt} - (lz)_s - (mz)_t + nz;$$

ferner mögen

$$\mathfrak{P} \equiv a(wz_s - zw_s) + b(wz_t - zw_t) + (l - a_s - b_t)wz,$$
$$\mathfrak{Q} \equiv b(wz_s - zw_s) + c(wz_t - zw_t) + (m - b_s - c_t)wz$$

die zu $\mathfrak{L}(z)$ gehörigen Bilinearausdrücke heißen: es gilt dann bekanntlich die Identität

$$w\mathfrak{L}(z) - z\mathfrak{M}(w) = \mathfrak{P}_s + \mathfrak{Q}_t. \tag{12}$$

1) Diese Gött. Nachr. 1904. Erwähnt sei an dieser Stelle die inzwischen erschienene scharfsinnige Abhandlung von E. E. Levi: I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. Roma 1909.

Digitized by Google

Wenn wir in $\mathfrak{L}(z)$ statt s, t irgendwelche neue Variable s', t' einführen und den Differentialausdruck dann mit der Funktionaldeterminante der ursprünglichen Variabeln nach den neuen d. h. mit

$$t_{s'} r_{t'} - t_{t'} r_{s'}$$

multiplizieren, so heiße der so entstehende Differentialausdruck

$$\mathfrak{L}'(z) = a' z_{s's'} + 2b' z_{s't'} + c' z_{t't'} + l' z_{s'} + m' z_{t'} + n' z$$

der transformierte Ausdruck von $\mathfrak{L}(z)$; desgleichen heiße der aus $\mathfrak{M}(z)$ durch Einführung der neuen Variabeln s', t' und Multiplikation mit jener Funktionaldeterminante entstehende Ausdruck $\mathfrak{M}'(z)$ der transformierte Ausdruck von $\mathfrak{M}(z)$. Endlich mögen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}' &= \mathfrak{P} t_{t'} - \mathfrak{Q} s_{t'}, \\ \mathfrak{Q}' &= \mathfrak{P} t_{s'} + \mathfrak{Q} s_{s'}, \end{aligned} \tag{13}$$

wenn man rechter Hand in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ die neuen Variabeln s', t' an Stelle von s, t einführt, die transformierten Ausdrücke von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ heißen. Indem wir in der Identität statt s, t die neuen Variabeln s', t' einführen, gelangen wir zu der Identität

$$w\mathfrak{L}'(z) - z\mathfrak{M}'(w) = \mathfrak{P}'_{s'} + \mathfrak{Q}'_{t'}$$

und von dieser führen leichte Ueberlegungen unter Berücksichtigung der Bauart der Ausdrücke $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ zum Beweise des folgenden Satzes:

Der transformierte Ausdruck $\mathfrak{M}'(z)$ ist genau der zu $\mathfrak{L}'(z)$ adjungierte Ausdruck und die transformierten Ausdrücke $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ sind genau die zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörigen Bilinearausdrücke.

Im Folgenden wollen wir der Kürze halber die Koeffizienten a, b, c, l, m, n des Differentialausdruckes $\mathfrak{L}$ desgleichen alle anderen vorkommenden Funktionen stets als beliebig oft differenzierbar voraussetzen — woweit nicht ausdrücklich Ausnahmen festgesetzt werden.

Es seien nun auf der Kugel mit dem Radius 1 irgend zwei einfach zusammenhängende Gebiete K_1 und K_2 gegeben, die in dem Gebiete K_{12} übereinandergreifen; s_1, t_1 seien irgendwelche krummlinige Koordinaten für das Gebiet K_1 und s_2, t_2 irgendwelche krummlinige Koordinaten für K_2; ferner sei $\mathfrak{L}_1(z)$ ein Differentialausdruck in den Variabeln s_1, t_1 und $\mathfrak{L}_2(z)$ ein Differentialausdruck in den Variabeln s_2, t_2. Bezeichnen wir das Linienelement auf der Kugel in üblicher Weise mit

Digitized by Google

$$e_1 ds_1^2 + 2 f_1 ds_1 dt_1 + g_1 dt_1^2,$$
$$\text{bez. } e_2 ds_2^2 + 2 f_2 ds_2 dt_2 + g_2 dt_2^2,$$

so ist das Flächenelement der Kugel

$$dk = \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}\, ds_1 dt_1,$$
$$\text{bez.} = \sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}\, ds_2 dt_2;$$

ferner wird innerhalb des Gebietes K_{12}

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial t_1}{\partial t_2} - \frac{\partial s_1}{\partial t_2}\frac{\partial t_1}{\partial s_2} = \frac{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}}$$

und wegen

$$\mathfrak{L}_1'(z) = \mathfrak{L}_1(z)\left(\frac{\partial s_1}{\partial s_2}\frac{\partial t_1}{\partial t_2} - \frac{\partial s_1}{\partial t_2}\frac{\partial t_1}{\partial s_2}\right)$$

folgt mithin

$$\frac{\mathfrak{L}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} = \frac{\mathfrak{L}_1'(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}}.$$

Wenn nun der besondere Umstand zutrifft, daß der auf die Variabeln s_2, t_2 transformierte Differentialausdruck $\mathfrak{L}_1'$ mit $\mathfrak{L}_2$ identisch ist, so stellt die Formel

$$L(z) = \frac{\mathfrak{L}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} \text{ in } K_1$$
$$= \frac{\mathfrak{L}_2(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}} \text{ in } K_2$$

in dem gemeinsamen Gebiete K_{12} den nämlichen Differentialausdruck dar; zugleich erweist sich der Wert dieses Differentialausdruckes $L(z)$, wenn z eine Funktion einer innerhalb K_1 oder K_2 gelegenen Stelle auf der Kugel bedeutet, als unabhängig von der Wahl der krummlinigen Koordinaten s, t. Ist die Vollkugel mit einer endlichen Anzahl von übereinandergreifenden Gebieten K_1, K_2, ... bedeckt und in diesen je ein regulärer Differentialausdruck bez. $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ... gegeben von der Art, daß immer in dem gemeinsamen Teile von je zwei übereinandergreifenden Gebieten der transformierte Differentialausdruck des einen Gebietes mit dem Differentialausdrucke des anderen übereinstimmt, so definieren die Formeln

$$L(z) = \frac{\mathfrak{L}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} \text{ in } K_1,$$
$$= \frac{\mathfrak{L}_2(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}} \text{ in } K_2,$$
. . . . . .

Digitized by Google

eindeutig und widerspruchslos überall auf der Kugel einen Differentialausdruck, dessen Wert, wenn z eine Funktion der Stelle auf der Kugel bedeutet, ebenfalls unabhängig von der Wahl der krummlinigen Koordinaten s, t ausfällt; der Differentialausdruck $L(z)$ heiße *ein auf der Vollkugel regulärer Differentialausdruck.* Wie man leicht erkennt, bestimmen die zu $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ... bez. in K_1, K_2, ... adjungierten Differentialausdrücke $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... vermöge der Formeln

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{\mathfrak{M}_1(z)}{\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}} \text{ in } K_1, \\ &= \frac{\mathfrak{M}_2(z)}{\sqrt{e_2 g_2 - f_2^2}} \text{ in } K_2, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ebenfalls einen auf der Vollkugel regulären Differentialausdruck $M(z)$; derselbe heiße der zu $L(z)$ adjungierte Differentialausdruck.

Wenn wir die Formel (12) in einem von beliebigen geschlossenen Kurven berandeten Gebiete G der Kugel mit den krummlinigen Koordinaten s, t integrieren, so erhalten wir die Integralformel

$$(14) \qquad \iint_{(G)} \{w\mathfrak{L}(z) - z\mathfrak{M}(w)\}\, ds\, dt = \int_{(R)} (\mathfrak{P}dt - \mathfrak{Q}ds),$$

wo das Doppelintegral linker Hand über das Innere von G und das Linienintegral rechter Hand über sämtliche Randkurven R und zwar jedesmal in der Richtung hin zu erstrecken ist, daß das Gebiet G zur linken Hand bleibt.

Wenn wir in dem Linienintegral rechter Hand an Stelle der Variabeln s, t beliebig neue Variabele s', t' einführen, so sind nach dem oben bewiesenen Satze die transformierten Ausdrücke $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ genau die zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörigen Bilinearausdrücke: mittelst der Formeln (13) folgt hieraus die wichtige Tatsache, daß der Integrand des Linienintegrals rechter Hand in (14) derselbe bleibt, wenn wir bei der Bildung derselben an Stelle von $\mathfrak{L}$ den beliebig transformierten Ausdruck $\mathfrak{L}'$ zu Grunde legen.

Teilen wir jetzt die Vollkugel etwa durch den Aequator in die zwei Hälften K_1, K_2 und wenden auf jede derselben die Formel (14) an, so entsteht — wegen der eben bewiesenen Invarianz der Integranden in den Linienintegralen und da in dem Linienintegral der zweiten Formel der Aequator in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufen ist, wie bei der ersten Formel — durch Addition die Formel

$$\iint w\mathfrak{L}(z) - z\mathfrak{M}(w)\}\, ds\, dt = 0,$$

Digitized by Google

wo das Doppelintegral über beide Kugelhälften zu erstrecken ist. Führen wir hierin die auf der Kugel regulären Differentialausdrücke $L(z)$, $M(z)$ und das Flächenelement dk der Kugel ein, so erhalten wir

$$\int \{wL(z) - zM(w)\}\, dk = 0, \tag{15}$$

wo das Integral über die Vollkugel zu erstrecken ist.

Der Differentialausdruck L heiße *von elliptischem Typus*, wenn überall in jedem der Ausdrücke $\mathfrak{L}$ für alle Werte der Variabeln s, t die Ungleichung

$$ac - b^2 > 0 \tag{16}$$

erfüllt ist; wir nehmen zugleich a und c positiv an.

Unser Hauptproblem besteht zunächst in der Integration der Differentialgleichung von elliptischem Typus

$$L(z) = f,$$

wo f eine überall auf der Kugel definierte Funktion bedeutet.

Um dieses Problem auf ein Problem der Theorie der Integralgleichungen zurückzuführen, bedarf es des Begriffes der Parametrix. Für den vorliegenden Fall verstehen wir unter einer *Parametrix* eine Funktion $p(st, \sigma\tau)$ des Argumentpunktes s, t und des Parameterpunktes σ, τ. auf der Kugel von folgenden Eigenschaften:

1. Die Parametrix $p(st, \sigma\tau)$ ist überall in den Koordinaten des Argumentpunktes s, t und des Parameterpunktes σ, τ stetig und beliebig oft differenzierbar, außer wenn der erstere mit dem letzteren Punkte zusammenfällt, d. h. wenn gleichzeitig $s = \sigma$, $t = \tau$ wird: alsdann wird $p(st, \sigma\tau)$ logarithmisch unendlich, wie folgt

$$p(st, \sigma\tau) = -\frac{\log\{c(\sigma\tau)(s-\sigma)^2 - 2b(\sigma\tau)(s-\sigma)(t-\tau) + a(\sigma\tau)(t-\tau)^2\}}{4\pi\sqrt{a(\sigma\tau)c(\sigma\tau) - (b(\sigma\tau))^2}} + S(st, \sigma\tau),$$

wo $S(st, \sigma\tau)$ eine Funktion vom Argumentpunkt s, t und vom Parameterpunkt σ, τ auf der Kugel bedeutet, die für $s = \sigma$, $t = \tau$ zwar stetig sein muß, aber deren zweite Ableitungen für $s = \sigma$, $t = \tau$ von erster Ordnung unendlich werden dürfen — während sonst überall beliebig häufige stetige Differenzierbarkeit möglich sein soll.

2. Die Parametrix ist symmetrisch in Bezug auf Argumentpunkt und Parameterpunkt, d. h. es ist

$$p(st, \sigma\tau) = p(\sigma\tau, st).$$

Digitized by Google

Um eine Parametrix zu konstruieren, betrachten wir die räumlichen Koordinaten x, y, z eines Punktes der Kugel als Funktion der krummlinigen Koordinaten s, t — indem wir immer in jedem Teilgebiet auf der Kugel die demselben eigenen Koordinaten s, t wählen und zwar derart, daß überall auf der Kugel

$$(17) \qquad y_s z_t - z_s y_t \neq 0, \qquad z_s x_t - x_s z_t \neq 0, \qquad x_s y_t - y_s x_t \neq 0$$

ausfällt. Dann bestimmen wir aus den drei Gleichungen

$$(18) \qquad \begin{aligned} Ax_s^2 + By_s^2 + Cz_s^2 &= c(st)\sqrt{eg-f^2}, \\ Ax_s x_t + By_s y_t + Cz_s z_t &= -b(st)\sqrt{eg-f^2}, \\ Ax_t^2 + By_t^2 + Cz_t^2 &= a(st)\sqrt{eg-f^2} \end{aligned}$$

die Größen A, B, C als Funktionen des Argumentpunktes s, t; dieselben sind gegenüber einer Transformation der Koordinaten s, t invariant und stellen daher Funktionen auf der Kugel dar; aus (17) folgt leicht, daß die Determinante dieser Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x_s^2 & y_s^2 & z_s^2 \\ x_s x_t & y_s y_t & z\ z_t \\ x_t^2 & y_t^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

stets von Null verschieden ist.

Nunmehr verstehen wir unter ξ, η, ζ die räumlichen Koordinaten des Parameterpunktes σ, τ auf der Kugel, so daß ξ, η, ζ bez. ebenso von σ, τ abhängen, wie x, y, z von s, t — und bilden dann den Ausdruck

$$\psi(st,\ \sigma\tau) = A(x-\xi)^2 + B(y-\eta)^2 + C(z-\xi)^2.$$

Setzen wir hierin

$$\begin{aligned} x-\xi &= x_s(s-\sigma) + x_t(t-\tau) + \cdots, \\ y-\eta &= y_s(s-\sigma) + y_t(t-\tau) + \cdots, \\ z-\zeta &= z_s(s-\sigma) + z_t(t-\tau) + \cdots \end{aligned}$$

ein, so ergibt sich mit Benutzung von (18) die Entwicklung

$$\begin{aligned} \psi(st,\ \sigma\tau) &= \sqrt{eg-f^2}\{c(st)(s-\sigma)^2 - 2b(st)(s-\sigma)(t-\tau) + a(st)(t-\tau)^2\} + (s-\sigma,\ t-\tau)_3 \\ &= \sqrt{eg-f^2}\{c(\sigma\tau)(s-\sigma)^2 - 2b(\sigma\tau)(s-\sigma)(t-\tau) + a(\sigma\tau)(t-\tau)^2\} + (s-\sigma,\ t-\tau)_3, \end{aligned}$$

wo beidemal $(s-\sigma,\ t-\tau)_3$ Ausdrücke mit Gliedern von dritter und höherer Ordnung in $s-\sigma$, $t-\tau$ bezeichnen. Mit Rücksicht hierauf ist wegen (16) gewiß

$$(19) \qquad \psi(st,\ \sigma\tau) > 0,$$

sobald die Differenzen $s-\sigma$, $t-\tau$ absolut genügend klein gewählt aber nicht beide Null sind: es sei ε eine so kleine Konstante, daß

Digitized by Google

die Ungleichung (19) statt hat, sobald

$$0 < (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 < \varepsilon^2$$

ist. Endlich sei γ der absolut größte Wert, den $\psi(st, \sigma\tau)$ annimmt, wenn der Argumentpunkt s, t und der Parameterpunkt (σ, τ) beliebig auf der Kugel variieren: alsdann stellt der Ausdruck

$$\Psi(st, \sigma\tau) = \psi(st, \sigma\tau) + \frac{2\gamma}{\varepsilon^4}\left\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z-\zeta)^2\right\}^2$$

eine Funktion dar, die stets positiv ausfällt und nur für $s = \sigma$, $t = \tau$ verschwindet. Da anderseits

$$\Psi(st, \sigma\tau)$$
$$= \sqrt{eg-f^2}\left\{c(\sigma\tau)(s-\sigma)^2 - 2b(\sigma\tau)(s-\sigma)(t-\tau) + a(\sigma\tau)(t-\tau)^2\right\}\left\{1+(s-\sigma, t-\tau)_1\right\}$$

wird, wo $(s-\sigma, t-\tau)_1$ einen für $s = \sigma$, $t = \tau$ mindestens von der ersten Ordnung in $s-\sigma$, $t-\tau$ verschwindenden Ausdruck bedeutet und, wie man sofort sieht, $\Psi(\sigma\tau, st)$ sich in die gleiche Gestalt bringen läßt, so besitzt der Ausdruck

$$p(st, \sigma\tau) = \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\log \Psi(st, \sigma\tau)}{\sqrt{a(\sigma\tau)c(\sigma\tau) - (b(\sigma\tau))^2}} + \frac{\log \Psi(\sigma\tau, st)}{\sqrt{a(st)c(st) - (b(st))^2}}\right\}$$

die für die Parametrix geforderten Eigenschaften; die Existenz einer Parametrix ist damit bewiesen.

Aus der oben aufgestellten Definition der Parametrix folgern wir eine Reihe von Formeln — analog wie dies in der bekannten Theorie des logarithmischen Potentials geschieht.

Erstens: der Ausdruck

$$M(p(st, \sigma\tau))$$

stellt eine Funktion dar, die für $s = \sigma$, $t = \tau$ höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird. Wenn man nämlich alle diejenigen Glieder, die allein von der zweiten Ordnung unendlich werden, ausrechnet, so erkennt man, daß sie sich gegenseitig zerstören.

Zweitens: Wenn $z(st)$ irgend eine überall stetig differenzierbare Funktion auf der Kugel bedeutet, so ist stets

$$\int\left\{pL(z) - zM(p)\right\} dk = -z(\sigma\tau), \tag{20}$$

wo das Integral über die Vollkugel zu erstrecken ist.

Zum Beweise dieser Formel beschreiben wir um den Punkt

Digitized by Google

σ, τ auf der Kugel einen Kreis k_r mit dem kleinen Radius r und zerlegen dadurch die Oberfläche der Vollkugel in das kreisförmig begrenzte Gebiet k_r und das außerhalb k_r gelegene Gebiet K_r; dann wenden wir die Integralformel (14), indem wir $w(st) = p(st, \sigma\tau)$ nehmen, auf das Gebiet K_r an und führen den Grenzübergang $r = 0$ aus.

Drittens: wenn wir unter $z(st)$, wie soeben, eine Funktion auf der Kugel verstehen und ferner mit $\underline{\mathsf{M}}$ denjenigen Differentialausdruck bezeichnen, der aus M hervorgeht, wenn wir darin die Variabeln s, t durch die Parameter σ, τ ersetzen, so gilt die Formel

$$\mathsf{M}\{\int z p\, dk\} = \int z \mathsf{M}(p)\, dk - z(\sigma\tau), \tag{21}$$

wo die Integrale wiederum über die Vollkugel zu erstrecken sind.

Zum Beweise haben wir die in dem Ausdruck M linker Hand geforderten Differentiationen erster und zweiter Ordnung auszuführen. Da die Parametrix $p(st, \sigma\tau)$ für $s = \sigma$, $t = \tau$ nur logarithmisch unendlich wird, so sind die einmaligen Differentiationen nach σ, τ linker Hand ohne weiteres durch Differentiationen unter dem Integralzeichen ausführbar. Aus der ersten Eigenschaft der Parametrix entnehmen wir nun die Gültigkeit von Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} p_\sigma &= -p_s + S, \\ p_\tau &= -p_t - T, \end{aligned} \tag{22}$$

wo S, T solche Funktionen von s, t; σ, τ sind, deren erste Ableitungen für $s = \sigma$, $t = \tau$ höchstens von erster Ordnung unendlich werden. Zerlegen wir jetzt wiederum die Oberfläche der Vollkugel in die zwei Teile K_r und k_r und setzen dann in dem über k_r zu erstreckenden Integral die letzteren Ausdrücke für p_σ, p_τ aus (22) ein, so entstehen bei geeigneter Anwendung der Produktintegration (partiellen Integration) Integralausdrücke, bei denen eine nochmalige Differentiation nach σ, τ unmittelbar durch Differentiation unter dem Integralzeichen möglich ist. Der Grenzübergang zu $r = 0$ führt schließlich zu der angegebenen Formel.

Nunmehr sind wir im Stande, das oben bezeichnete Integrationsproblem zu lösen, indem wir den folgenden Satz aufstellen und beweisen.

Wenn die homogene Differentialgleichung

$$L(z) = 0 \tag{23}$$

keine von Null verschiedene, auf der ganzen Kugel stetige Lösung

Digitized by Google

besitzt, so hat die Differentialgleichung

$$L(z) = f, \tag{24}$$

wo f irgend eine gegebene Funktion auf der Kugel bedeutet, stets eine stetige Lösung; die adjungierte Differentialgleichung

$$M(z) = 0, \tag{25}$$

läßt in diesem Falle gewiß keine Lösung zu.

Besitzt dagegen die homogene Differentialgleichung (23) *Lösungen, so lassen sich aus diesen stets eine gewisse endliche Anzahl n linear von einander unabhängiger Lösungen auswählen, so daß jede Lösung von* (23) *eine lineare Kombination derselben wird; die adjungierte Differentialgleichung* (25) *besitzt in diesem Falle auch genau n linear unabhängige Lösungen und die Differentialgleichung* (24) *ist dann und nur dann lösbar, wenn die gegebene Funktion f die n Integralbedingungen*

$$\int f\psi_h dk = 0, \qquad (h = 1, 2, 3 \ldots n) \tag{26}$$

erfüllt, wo $\psi_1, \ldots \psi_n$ jene linear von einander unabhängige Lösungen von (25) *bedeuten.*

Zum Beweise setzen wir zunächst voraus, daß die Differentialgleichung (23) keine Lösung besitzt. Eine Lösung z der Differerentialgleichung (24) muß wegen (20) die Integralgleichung

$$\int \{pf - zM(p)\}\, dk = -z(\sigma\tau)$$

oder

$$\int zM(p)\, dk - z(\sigma\tau) = \int pf dk \tag{27}$$

befriedigen; der Kern dieser Integralgleichung $M(p)$ ist einer früheren Bemerkung zufolge (S. 369) eine solche Funktion von s, t, σ, τ, die für $s = \sigma$, $t = \tau$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Die Gesetze über die Auflösung von Integralgleichungen sind, wie bereits Fredholm gezeigt hat, in diesem Falle in gleicher Weise gültig, wie wenn der Kern eine durchweg stetige Funktion wäre. Andrerseits läßt sich auch ähnlich wie dies auf S. 360—361 geschehen ist, zeigen, daß eine Lösung der Integralgleichung (27) beliebig oft stetig differenzierbar ist, falls diese Annahme für f zutrifft.

Nach der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen hängt die Lösbarkeit der Integralgleichung (27) von der Beschaffenheit der entsprechenden homogenen Integralgleichung

$$\int zM(p)\, dk - z(\sigma\tau) = 0 \tag{28}$$

Digitized by Google

ab. Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen dieser homogenen Integralgleichung sei N und die Lösungen seien $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$. Wegen (20) haben wir dann

$$\int pL(\Phi_h)\,dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, N)$$

oder wenn

$$\mathsf{X}_h = L(\Phi_h), \qquad (h = 1, \ldots, N) \tag{29}$$

gesetzt wird

$$\int p\mathsf{X}_h\,dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots N) \tag{30}$$

d. h. die N Funktionen $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N$ genügen, für z eingesetzt, der Gleichung

$$\int pz\,dk = 0, \tag{31}$$

und wegen (21) sind sie demnach auch Lösungen der homogenen Integralgleichung

$$\int z\mathsf{M}(p)\,dk - z(\sigma\tau) = 0. \tag{32}$$

Diese homogene Integralgleichung ist aber diejenige, die aus der homogenen Integralgleichung (28) entsteht, wenn man in deren Kern die Argumente s, t mit den Parametern σ, τ vertauscht. Nun sind die N Funktionen X_h von einander linear unabhängig, da ja sonst wegen (29) eine von Null verschiedene Lösung der Differentialgleichung (23) existieren müßte. Nach den allgemeinen Sätzen über Integralgleichungen besitzt die Integralgleichung mit dem transponierten Kern $\mathsf{M}(p)$ genau ebensoviele linear unabhängige Lösungen wie die ursprüngliche; es ist mithin jede Funktion z, die der Gleichung (31) genügt, da sie dann auch (32) erfüllt, notwendig in der Gestalt

$$z = C_1\mathsf{X}_1 + \cdots + C_N\mathsf{X}_N$$

darstellbar, wo $C_1, \ldots, C_N$ geeignete Konstante bedeuten.

Da hiernach die N Funktionen X_h die sämtlichen Lösungen der homogenen Integralgleichung (32) ausmachen, so sind nach der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit der inhomogenen Integralgleichung (27) die folgenden

$$\iint \mathsf{X}_h(\sigma\tau)pf(st)\,dk\,d\varkappa = 0, \qquad (h = 1, \ldots, N)$$

wo die Vollkugel sowohl bei der Integration nach dem Argumentpunkt s, t, als auch bei der Integration nach dem Parameterpunkt

Digitized by Google

σ, τ als Integrationsgebiet zu nehmen ist. Da aber wegen (30) diese Bedingungen stets erfüllt sind, so besitzt (27) stets eine Lösung; es sei φ^* diese Lösung, so daß

$$\int \varphi^* M(p)\,dk - \varphi^*(\sigma\tau) = \int pf\,dk \tag{33}$$

wird. Setzen wir dann andererseits in (20) $z = \varphi^*$ ein und addieren die so entstehende Gleichung zu (33), so ergibt sich

$$\int p\{L(\varphi^*) - f\}\,dk = 0.$$

Wegen der vorhin gefundenen Tatsache folgt hieraus

$$L(\varphi^*) - f = C_1 \mathsf{X}_1 + \cdots + C_N \mathsf{X}_N,$$

wo $C_1, \ldots, C_N$ geeignete Konstanten sind. Wegen (29) ist demnach

$$\varphi = \varphi^* - C_1 \Phi_1 - \cdots - C_N \Phi_N$$

eine Lösung der Differentialgleichung (24).

Wir erkennen nunmehr auch leicht, daß (25) keine von Null verschiedene Lösung besitzt. Wäre nämlich ψ eine solche Lösung und bestimmen wir dann — was nach dem eben Bewiesenen stets möglich ist — eine Funktion φ derart, daß

$$L(\varphi) = \psi$$

ist, so wird aus (15) für $w = \psi$, $z = \varphi$ die Gleichung

$$\int \psi^2\,dk = 0,$$

die nicht statthaben kann, da ja ψ nicht identisch verschwinden sollte. Damit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes bezeichnen wir mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein vollständiges System von n linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (23). Sodann betrachten wir wiederum die inhomogene Integralgleichung (27) und die zu ihr zugehörige homogene Integralgleichung (28). Die letztere läßt, wie aus (20) sofort folgt, die Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ zu. Außer diesen n Lösungen und deren linearen Kombinationen kann die Integralgleichung (28) noch weitere Lösungen besitzen; unter diesen wählen wir ein System untereinander und von den Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linear unabhängiger Lösungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ derart aus, daß alle Lösungen von (28) durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_N$ linear darstellbar sind. Wir bilden nun, wie vorhin beim Beweise des ersten Teils unseres Satzes, die N Funktionen

$$\mathsf{X}_h = L(\Phi_h), \qquad (h = 1, \ldots, N); \tag{34}$$

Digitized by Google

dieselben genügen, wie aus (20) folgt, den Gleichungen

$$\int p \mathsf{X}_h \, dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, N) \tag{35}$$

und sind demnach für z eingesetzt wegen (21) auch Lösungen der homogenen Integralgleichung (32). Die N Funktionen $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N$ sind von einander linear unabhängig, da sonst entgegen unserer Annahme aus (34) sofort das Bestehen einer linearen Relation zwischen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_N$ folgen würde.

Da die homogene Integralgleichung (28) genau $n+N$ linear unabhängige Lösungen besitzt, so muß nach der allgemeinen Theorie die Integralgleichung (32) mit dem transponierten Kern ebenfalls genau $n+N$ linear unabhängige Lösungen besitzen, d: h. außer den Funktionen $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N$ gibt es noch genau n Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_n$, die ebenfalls der Integralgleichung (32) genügen und mit $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_N$ zusammen ein volles System von $n+N$ Lösungen der Integralgleichung (32) bilden.

Die n Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_n$ denken wir uns nun durch geeignete lineare Kombinationen ihrer selbst derart ersetzt, daß gerade für die ν Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_\nu$ $(0 \leqq \nu \leqq n$ die Gleichungen

$$\int p \chi_h \, dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, \nu) \tag{36}$$

statt haben und überdies, falls wir aus den übrigen $n-\nu$ Funktionen $\chi_{\nu+1}, \ldots, \chi_n$ die $n-\nu$ Funktionen

$$\psi_h = \int p \chi_h \, dk, \qquad (h = \nu+1, \ldots, n)$$

bilden, diese $n-\nu$ Funktionen $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_n$ noch linear von einander unabhängig ausfallen. Wegen (21) sind $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_n$ Lösungen der Differentialgleichung (25).

Nunmehr nehmen wir an, daß der zu beweisende Satz für alle Fälle, in denen die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung kleiner als n ausfällt, bereits als richtig erkannt sei: dann folgt, daß die Differentialgleichung (25) mindestens n linear unabhängige Lösungen besitzen muß; denn wäre ihre Anzahl kleiner als n, so würde unser Satz, auf (25) angewandt, aussagen, daß die zu (25) adjungierte Differentialgleichung (23) nur ebensoviel, gewiß also nicht n linear unabhängige Lösungen besitzen könnte, wie wir doch gegenwärtig vorausgesetzt haben. Es ist hiernach gewiß möglich zu den $n-\nu$ Funktionen $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_n$ noch ν weitere Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_\nu$ hinzuzufügen, derart, daß die Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ein System von n linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (25) bilden.

Aus (15) folgt sofort, daß, wenn die Differentialgleichung (24) lösbar sein soll, notwendig die Integralbedingungen (26) erfüllt sein

Digitized by Google

müssen. Andererseits besitzt die inhomogene Integralgleichung (27) der allgemeinen Theorie zufolge gewiß eine Lösung, wenn die $n+N$ Bedingungen

$$\iint \mathsf{X}_h(\sigma\tau)\, pf(st)\, dk\, d\varkappa = 0, \qquad (h = 1, \ldots, N) \tag{37}$$

$$\iint \chi_h(\sigma\tau)\, pf(st)\, dk\, d\varkappa = 0, \qquad (h = 1, \ldots, \nu) \tag{38}$$

$$\iint \chi_h(\sigma\tau)\, pf(st)\, dk\, d\varkappa = 0, \qquad (h = \nu+1, \ldots, n) \tag{39}$$

bestehen. Nun sind aber wegen (35), (36) die Gleichungen (37), (38) für jede Funktion f erfüllt und die Gleichungen (39) erhalten die Gestalt

$$\int f\psi_h\, dk = 0, \qquad (h = \nu+1, \ldots, n) \tag{40}$$

Bedeutet also f eine diesen $n-\nu$ Bedingungen (40) genügende Funktion, so gibt es gewiß eine Funktion $z = \varphi^*$, die der Integralgleichung (27) genügt. Addieren wir diese Gleichung zu derjenigen, die aus (20) für $z = \varphi^*$ entsteht, so erhalten wir

$$\int p\{L(\varphi^*) - f\}\, dk = 0, \tag{41}$$

und hieraus entnehmen wir wie vorhin

$$L(\varphi^*) - f = c_1\chi_1 + \cdots + c_n\chi_n + C_1 X_1 + \cdots + C_N X_N,$$

wo $c_1, \ldots, c_n, C_1, \ldots, C_N$ geeignete Konstante bedeuten. Setzen wir aber diesen Ausdruck für $L(\varphi^*) - f$ in (41) ein, so folgt sofort mit Rücksicht auf (35), (36) wegen der linearen Unabhängigkeit der $n-\nu$-Funktionen ψ_h, daß

$$c_{\nu+1} = 0, \ldots, c_n = 0$$

sein muß. Wegen (34) befriedigt mithin

$$\varphi = \varphi^* - C_1\Phi_1 - \cdots - C_N\Phi_N$$

die Differentialgleichung

$$L(\varphi) = f + c_1\chi_1 + \cdots + c_\nu\chi_\nu. \tag{42}$$

Ich will nun zeigen, daß die weiteren der Funktion f aufzuerlegenden ν Bedingungen

$$\int f\psi_h\, dk = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \nu) \tag{43}$$

notwendig

$$c_1 = 0, \ldots, c_\nu = 0 \tag{44}$$

Digitized by Google

zur Folge haben. Zu dem Zwecke setzen wir in (15) $w = \chi_h$, $(h = 1, \ldots, \nu)$ und $z = \varphi$; dann erhalten wir wegen (42)

$$\int \psi_h f\,dk + c_1 \int \psi_h \chi_1\,dk + \cdots + c_\nu \int \psi_h \chi_\nu\,dk = 0, \quad (h = 1, \ldots, \nu)$$

oder

$$a_{h1} c_1 + \cdots + a_{h\nu} c_\nu = A_h, \qquad (h = 1, \ldots, \nu), \tag{45}$$

wenn zur Abkürzung

$$\int \psi_h f\,dk = -A_h, \qquad (h = 1, \ldots, \nu)$$
$$\int \psi_h \chi_l\,dk = a_{hl}, \qquad (h, l = 1, \ldots, \nu)$$

gesetzt ist. Da wir nun offenbar durch geeignete Wahl der Funktion f unter Wahrung der Bedingungen (40) den Größen A_h beliebige Werte erteilen können und nach dem eben Bewiesenen die Gleichungen (45) für alle solchen A_h Lösungen $c_1, \ldots, c_\nu$ haben, so muß die Determinante der Größen a_{hk} notwendig von Null verschieden sein. Legen wir daher der Funktion f noch die weiteren ν Bedingungen (43) auf d. h. nehmen wir

$$A_1 = 0, \ldots, A_\nu = 0$$

so folgt aus (45) notwendig (44), d. h. wegen (42) ist φ eine Lösung der Differentialgleichung (24).

Um den Beweis unseres Satzes zu vollenden, bleibt nur noch übrig zu bemerken, daß die Gleichung (25) auch nicht mehr als n linear unabhängige Lösungen haben kann. In der Tat, gäbe es noch eine von $\psi_1, \ldots, \psi_n$ linear unabhängige Lösung von (25), etwa ψ_{n+1}, so würde, wie aus (15) sofort folgt, die Gleichung

$$\int f \psi_{n+1}\,dk = 0$$

noch eine weitere notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (24) darstellen, was dem eben Bewiesenen widerspricht.

Für die weitere Entwickelung unserer Theorie ist eine Bemerkung über die Beschaffenheit der Funktion f wichtig. Wenn nämlich f in (24) eine nicht durchweg stetige Funktion ist, so bleiben dennoch alle bisher angestellten Ueberlegungen gültig: es sei nunmehr f eine solche Funktion des Argumentpunktes s, t auf der Kugel, die überall stetig ist mit Ausnahme der Stelle $s = \sigma$, $t = \tau$, wo sie von der ersten Ordnung unendlich wird. Um bei dieser Annahme den Charakter der Lösung z der Integralgleichung (24) an der Stelle σ, τ festzustellen, bedenken wir, — wie dies aus der Fredholmschen Methode der inhomogenen Integralgleichung

Digitized by Google

ersichtlich ist — daß für die Beurteilung des Verhaltens jener Lösung z von (24) das Verhalten der rechten Seite der Integralgleichung (27) den Ausschlag geben muß. Nun ist diese rechte Seite, wie man durch eine leichte Untersuchung feststellen kann, bei der über f gemachten Annahme eine solche Funktion des Argumentpunktes s, t, die an der Stelle σ, τ stetig ist und deren zweite Ableitungen daselbst von der ersten Ordnung unendlich werden; den gleichen Charakter an der Stelle σ, τ zeigt also in diesem Falle die Lösung der Differentialgleichung (24).

Wir wollen dieses Ergebnis zur Konstruktion der Greenschen Funktion des Differentialausdruckes $L(z)$ anwenden; dabei sei der Kürze halber $L(z)$ als ein sich selbst adjungierter Differentialausdruck vorausgesetzt.

Es sind wie im obigen Satze (S. 370—371) die zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem die Differentialgleichung (23) stetige Lösungen besitzt oder nicht. In letzterem Falle ist jederzeit eine geeignet gewählte Lösung der Integralgleichung (27), wenn wir darin $f = L(p)$ nehmen, zugleich die Lösung der Differentialgleichung

$$L(z) = L(p).$$

Bezeichnen wir diese Lösung mit φ, so befriedigt offenbar die Funktion

$$G(st, \sigma\tau) = p - \varphi$$

die Differentialgleichung (23); G heiße *die Greensche Funktion des Differentialausdruckes* $L(z)$. Aus den obigen Darlegungen über das Verhalten der Lösung φ an der Stelle σ, τ erkennen wir, daß die Greensche Funktion G an der Stelle σ, τ gerade die logarithmische Unstetigkeit besitzt, wie sie für die Parametrix verlangt worden ist; sie ist durch diese Eigenschaft, sowie durch die Forderung, der Differentialgleichung (23) zu genügen, völlig eindeutig bestimmt.

Die Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion

$$G(st, \sigma\tau) = G(\sigma\tau, st)$$

folgt in der üblichen Weise[1]) mit Benutzung des Umstandes, daß der Differentialausdruck $M(z)$ nach Voraussetzung mit $L(z)$ identisch ausfällt.

Nunmehr nehmen wir im Gegenteil an, die Differentialgleichung (23) besitze genau n von einander linear unabhängige Lösungen

1) Vgl. den Beweis dieses Symmetriegesetzes im Falle einer Variabeln in der ersten Mitteiluug (diese Nachr. 1904) S. 220.

Digitized by Google

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$; wir denken uns dieselben derart normiert, daß die Orthogonalitätsrelationen

$$\int \varphi_h \varphi_l \, dk = 0, \qquad (h, l = 1, \ldots, n, \; h \neq l)$$
$$\int \varphi_h^2 \, dk = 1, \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

gelten. Nehmen wir dann

$$f(st) = L(p) - \varphi_1(\sigma\tau)\,\varphi_1(st) - \cdots - \varphi_n(\sigma\tau)\,\varphi_n(st),$$

so erfüllt f, wie aus (20) sofort zu ersehen ist, die n Bedingungen

$$\int f \varphi_h \, dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

und nach dem Früheren besitzt mithin die Differentialgleichung (24) eine Lösung $z = \varphi$, die an der Stelle σ, τ stetig ausfällt und deren zweite Ableitungen daselbst von der ersten Ordnung unendlich werden. Wir setzen nunmehr

$$G(st, \sigma\tau) = p - \varphi - \int (p - \varphi)\,\varphi_1 \, dk \,.\, \varphi_1 - \cdots - \int (p - \varphi)\,\varphi_n \, dk \,.\, \varphi_n;$$

dann erfüllt G die n Integralbedingungen

$$\int G(st, \sigma\tau)\,\varphi_h(st)\, dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, n) \tag{46}$$

und genügt überdies der Differentialgleichung

$$L(G) = \varphi_1(\sigma\tau)\,\varphi_1(st) + \cdots - \varphi_n(\sigma\tau)\,\varphi_n(st). \tag{47}$$

G heiße die Greensche Funktion (im erweiterten Sinne) *des Differentialausdruckes $L(z)$.* Die Greensche Funktion G besitzt an der Stelle σ, τ gerade die logarithmische Unstetigkeitsstelle, wie sie für die Parametrix verlangt worden ist; sie ist durch diese Eigenschaft, sowie durch die Forderung, der Differentialgleichung (47) und den Integralbedingungen (46) zu genügen, völlig eindeutig bestimmt. Auch gilt für sie das Symmetriegesetz

$$G(st, \sigma\tau) = G(\sigma\tau, st).$$

Endlich zeigt man in üblicher Weise, daß stets vermittelst der Greenschen Funktion die Lösung der Differentialgleichung (24) durch die Formel

$$z = -\int G f(\sigma\tau)\, d\varkappa \tag{48}$$

geliefert wird und zwar in dem zuletzt erörterten Falle diejenige Lösung, die die n Orthogonalitätsrelationen

$$\int z \varphi_h \, dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, n) \tag{49}$$

erfüllt.

Digitized by Google

Nachdem im Vorstehenden die Theorie der Integration der linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus auf der Kugel erledigt worden ist, soll nunmehr meine Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern[1]) und zwar die der orthogonalen Integralgleichungen auf die lineare Differentialgleichung

$$L(z) + \lambda z = 0$$

angewandt werden, wo $L(z)$ einen sich selbst adjungierten elliptischen Differentialausdruck auf der Kugel bedeutet. Die Greensche Funktion $G(st, \sigma\tau)$ dieses Differentialausdrucks $L(z)$ wird nach dem Obigen symmetrisch in Bezug auf den Argumentpunkt s, t und den Parameterpunkt σ, τ der Kugel. Meine Theorie liefert nun, wenn wir $G(st, \sigma\tau)$ als Kern einer orthogonalen Integralgleichung auf der Kugel nehmen, folgende Sätze:

Es gibt gewiß einen oder beliebigviele Werte $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots$ und zugehörige Funktionen $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ auf der Kugel, sodaß

$$\psi^{m}(st) = \lambda^{(m)} \int G(st, \sigma\tau)\, \psi^{(m)}(\sigma\tau)\, d\varkappa \tag{50}$$

wird: die sogenannten Eigenwerte und Eigenfunktionen des Kerns G; die letzteren besitzen die Orthogonalitätseigenschaft.

Jede Funktion, die sich bei geeigneter Wahl der Funktion $g(\sigma\tau)$ in der Gestalt

$$f(st) = \int G(st, \sigma\tau)\, g(\sigma\tau)\, d\varkappa \tag{51}$$

darstellen läßt, ist in eine auf Fouriersche Weise gebildete Reihe nach den Eigenfunktionen $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ entwickelbar:

$$f = c_1 \psi^{(1)} + c_2 \psi^{(2)} + \cdots, \tag{52}$$

wo $c_1, c_2, \ldots$ die Fourier-Koeffizienten von f in Bezug auf das Orthogonalsystem $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots$ bedeuten.

Wir stellen nunmehr die Bedeutung der Bedingung (51) fest. Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die n zu einander orthogonalen Integrale der Gleichung

$$L(z) = 0,$$

dann muß wegen (46) jede in der Gestalt (51) darstellbare Funktion f die n Bedingungen

$$\int \varphi_h(st)\, f(st)\, dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, n) \tag{53}$$

1) Erste Mitteilung; diese Nachr. 1904 sowie fünfte Mitteilung; diese Nachr. 1906, S. 452—462.

Digitized by Google

erfüllen. Umgekehrt ist jede diesen n Bedingungen genügende (mindestens zweimal stetig differenzierbare) Funktion f in der Gestalt (51) darstellbar. Setzen wir nämlich $g = -L(f)$, so genügt, wie aus (15) folgt, die Funktion g den n Bedingungen

$$\int \varphi_h g dk = 0, \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

und daher wird nach (48)

$$f^* = \int G(st, \sigma\tau)\, g(\sigma\tau)\, d\sigma$$

eine den Bedingungen (49) genügende Lösung der Differentialgleichung

$$L(z) = g(st).$$

Da aber diese Gleichung nur eine diesen n Bedingungen genügende Lösung besitzen kann, so ist genau $f^* = f$ und mithin f in der Gestalt (51) darstellbar. Aus (50) und (46) schließen wir leicht, daß

$$\int \varphi_h \psi^{(l)} dk = 0$$

ausfällt; mithin bilden die Funktionen

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots \tag{54}$$

ein System von Orthogonalfunktionen auf der Kugel.

Wir setzen

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0, \lambda_{n+1} = \lambda^{(1)}, \lambda_{n+2} = \lambda^{(2)}, \ldots$$
$$\varphi_{n+1} = \psi^{(1)}, \varphi_{n+2} = \psi^{(2)}, \ldots;$$

und bezeichnen *die Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ als die Eigenwerte und die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ als die zugehörigen Eigenfunktionen der Differentialgleichung*

$$L(z) + \lambda z = 0, \tag{55}$$

da sie das volle System stetiger Lösungen dieser Differentialgleichung bilden. Nach dem Obigen ergibt sich sofort:

Jede (mindestens zweimal stetig differenzierbare) Funktion auf der Kugel läßt sich in der Fourierschen Weise in eine nach den Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ fortschreitende Reihe entwickeln; die Anzahl der Eigenwerte und der Eigenfunktionen der Differentialgleichung (55) *ist mithin unendlich.*

Wir gehen nun dazu über, das zur Differentialgleichung (55) gehörige Dirichletsche Variationsproblem aufzustellen und zu unter-

Digitized by Google

suchen[1]). Da der Differentialausdruck

$$\mathfrak{L}(z) = az_{ss} + 2bz_{st} + cz_{tt} + lz_s + mz_t + nz$$

als sich selbst adjungiert angenommen worden ist, so haben wir

$$a_s + b_t = l,$$
$$b_s + c_t = m,$$

und es gilt die Identität

$$z\mathfrak{L}(z) + \mathfrak{A}(z) = \mathfrak{P}_s + \mathfrak{Q}_t, \tag{56}$$

wo

$$\mathfrak{A}(z) \equiv az_s^2 + 2bz_s z_t + cz_t^2 - nz^2$$

der zu $\mathfrak{L}(z)$ gehörige quadratische Differentialausdruck und

$$\mathfrak{P} \equiv z(az_s + bz_t),$$
$$\mathfrak{Q} \equiv z(bz_s + cz_t)$$

die zu $\mathfrak{L}(z)$ gehörigen Nebenausdrücke heißen mögen. Führen wir in $\mathfrak{A}(z)$ an Stelle von s, t neue Variable s', t' ein, so heiße der durch Multiplikation mit der Funktionaldeterminante

$$s_{s'}\, t_{t'} - s_{t'}\, t_{s'}$$

entstehende Ausdruck $\mathfrak{A}'(z)$ der transformierte Ausdruck von $\mathfrak{A}(z)$; ferner mögen die Ausdrücke

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}t_{t'} - \mathfrak{Q}s_{t'},$$
$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{P}t_{s'} + \mathfrak{Q}s_{s'},$$

wenn man rechter Hand in $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ die neuen Variabeln s', t' an Stelle von s, t einführt, die transformierten Ausdrücke von $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ heißen. Es besteht dann die Tatsache:

Der transformierte Ausdruck $\mathfrak{A}'(z)$ ist genau der zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörige quadratische Differentialausdruck, und die transformierten Ausdrücke $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'$ sind genau die zu $\mathfrak{L}'(z)$ gehörigen Nebenausdrücke.

Aus der Differentialformel (56) ergibt sich durch Integration über ein Gebiet G mit der Randkurve R die Integralformel

$$\iint_{(G)} \{z\mathfrak{L}z + \mathfrak{A}(z)\}\, ds\, dt = \int_{(R)} (\mathfrak{P}dt - \mathfrak{Q}ds),$$

1) Vgl. die den Fall einer Variabeln betreffenden analogen Entwickelungen in meiner zweiten Mitteilung (1904), S. 232—234.

Digitized by Google

und indem wir diese — entsprechend wie wir oben auf S. 366—367 beim Beweise der Formel (15) verfahren — auf die zwei Hälften der Vollkugel anwenden, gelangen wir auf Grund der eben gewonnenen Tatsache zu der Formel

$$\iint \{z\mathfrak{L}(z) + \mathfrak{A}(z)\}\, ds\, dt = 0,$$

wo das Doppelintegral über beide Kugelhälften zu erstrecken ist. Setzen wir nun — entsprechend wie oben S. 365—366 bei der Definition des Ausdruckes $L(z)$ —

$$A(z) = \frac{\mathfrak{A}(z)}{\sqrt{eg - f^2}} = \frac{\mathfrak{A}'(z)}{\sqrt{e'g' - f'^2}}$$

so ist, — ebenso wie oben der Ausdruck $L(z)$ —, der quadratische Differentialausdruck $A(z)$ eindeutig und widerspruchslos überall auf der Kugel definiert und, wenn z eine Funktion der Stelle auf der Kugel bedeutet, so stellt $A(z)$ einen von der Wahl der krummlinigen Koordinaten s, t unabhängigen Wert dar. Durch Einführung von $L(z)$ und $A(z)$ nimmt die obige Integralformel die Gestalt an

$$\int \{zL(z) + A(z)\}\, dk = 0,$$

wo das Integral über die Vollkugel zu erstrecken ist. Das Integral

$$D(z) = \int A(z)\, dk = -\int zL(z)\, dk \tag{57}$$

heiße das zu $L(z)$ gehörige Dirichletsche Integral. Durch Variation von (57) erhalten wir leicht mit Rücksicht auf (15)

$$\delta D(z) = -2\int L(z)\, \delta z\, dk.$$

Wegen (16) ist, wenn wir noch $a > 0$ annehmen, gewiß stets

$$az_s^2 + 2bz_s z_t + cz_t^2 \geqq 0.$$

Bestimmen wir sodann eine solche Konstante C, die überall auf der Kugel die Werte der Funktion

$$\frac{n}{\sqrt{eg - f^2}} = \frac{n'}{\sqrt{e'g' - f'^2}}$$

übertrifft, so ist gewiß für alle Funktionen z

$$A(z) + Cz^2 \geqq 0$$

und folglich auch

$$\int \{A(z) + Cz^2\}\, dk = \int \{-zL(z) + Cz^2\}\, dk \geqq 0.$$

Digitized by Google

Insbesondere ergibt sich hieraus für $z = \varphi_h$ mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$L(\varphi_h) = -\lambda_h \varphi_h,$$
$$\int \varphi_h^2 dk = 1$$

die Ungleichung

$$\lambda_h + C \geqq 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_h \geqq -C,$$

d. h. *es gibt zur Differentialgleichung* (55) *nur eine endliche Anzahl negativer Eigenwerte.*

Wir denken uns die Eigenwerte von (55) der Größe nach geordnet, so daß λ_1 der kleinste wird und allgemein

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \dots$$

ist.

Das zur Differentialgleichung (55) gehörige Variationsproblem lautet nun: man soll eine Funktion z auf der Kugel derart bestimmen, daß $D(z)$ zum Minimum wird, während die Nebenbedingung

$$\int z^2 dk = 1 \tag{58}$$

erfüllt ist. Zur Lösung dieses Problems setzen wir an

$$z = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots$$

Wegen

$$D(z) = -\int z L(z) dk$$

wird

$$D(z) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \cdots,$$

während die Nebenbedingung (58) die Gestalt

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots = 1$$

erhält. Daraus entnehmen wir sofort den Satz.

Das Minimum des Dirichletschen Integrals $D(z)$ bei der Nebenbedingung (58) *ist gleich dem kleinsten Eigenwert λ_1 der Differentialgleichung* (55) *und wird für $z = \varphi_1$ angenommen, wo φ_1 die zu λ_1 gehörige Eigenfunktion von* (55) *bedeutet. Werden zu der Nebenbedingung* (55) *noch die weiteren $h-1$ Nebenbedingungen*

$$\int \varphi_1 z dk = 0, \quad \dots, \quad \int \varphi_{h-1} z dk = 0$$

hinzugefügt, so ist λ_h der Minimalwert von $D(z)$; derselbe wird für $z = \varphi_h$ angenommen.

Digitized by Google

Als einfachstes Beispiel für die vorstehende Theorie diene die bereits in meiner zweiten Mitteilung[1]) behandelte Kugelfunktion.

Zum Schluß dieses Abschnittes beweisen wir noch folgenden Satz, welcher besonders für die Anwendungen dieser Theorie von Wichtigkeit ist.

Wenn die Koeffizienten des linearen Differentialausdruckes $L(z)$ für alle innerhalb und auf die Grenzen des Intervalles

$$\mu_1 \leqq \mu \leqq \mu_2$$

fallenden Werte von μ regulär analytische Funktionen eines Parameters μ sind, und wenn für eben diese Werte μ auch stets die Ungleichung (16) *gilt, so ist allemal der h^{te} Eigenwert λ_h eine stetige Funktion von μ.*

Da nach den oben bewiesenen Sätzen für jeden besonderen Wert $\mu = \mu_0$ stets λ_h eine endliche und eindeutig bestimmte Größe darstellt, so kommt es nur darauf an, zu zeigen, daß λ_h als Funktion von μ an der Stelle $\mu = \mu_0$ auch stetig ausfällt. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit $L_0(z)$ den Differentialausdruck $L(z)$ für $\mu = \mu_0$ und nehmen zunächst der Kürze halber an, daß die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$L_0(z) + \lambda z = 0 \tag{59}$$

sämtlich positiv auffallen, so daß die Differentialgleichung

$$L_0(z) = 0$$

gewiß keine stetige Lösung besitzt; es sei G_0 die zu $L_0(z)$ gehörige Greensche Funktion, ferner p die nach der Vorschrift auf S. 368—369 konstruierte von μ abhängige Parametrix für $L(z)$ und endlich bedeute p_0 den aus p für $\mu = \mu_0$ entstehenden Ausdruck, so daß p_0 zugleich die nach jener Vorschrift gebildete Parametrix für L_0 ist.

Um nun die Greensche Funktion für $L(z)$ zu bilden, wenden wir das oben S. 377 eingeschlagene Verfahren an, indem wir in (27) an Stelle der dort mit p bezeichneten Parametrix den Ausdruck

$$p^* = p + G_0 - p_0$$

nehmen, der ebenfalls die Eigenschaften einer Parametrix für $L(z)$ besitzt. Die so aus (27) entstehende Integralgleichung

$$\int z L(p^*)\, dk - z(\sigma\tau) = \int p^* f dk \tag{60}$$

besitzt den Kern

---

1) Vgl. diese Nachr. 1904, S. 241—242.

Digitized by Google

$$K(st,\ \sigma\tau) = L(p^*) = L(p) + L(G_0 - p_0)$$
$$= L(p) + L_0(G_0 - p_0) + (\mu - \mu_0)\overline{L}(G_0 - p_0), \tag{61}$$

wo $\overline{L}$ einen gewissen noch vom Parameter μ abhängigen Differentialausdruck zweiter Ordnung bedeutet. Da $G_0 - p_0$ eine Funktion von $s,\ t;\ \sigma,\ \tau$ ist, deren zweite Ableitungen für $s = \sigma,\ t = \tau$ höchstens von der ersten Ordnung unendlich werden, so stellt $\overline{L}(G_0 - p_0)$ eine Funktion dar, derart, daß ihr Produkt mit $\sqrt{(s-\tau)^2 + t - \tau)^2}$ gewiß absolut genommmen für alle $s, t;\ \sigma, \tau$ unterhalb einer von μ unabhängigen Schranke bleibt. Andererseits ist, wenn wir

$$L(p) + L_0(G_0 - p_0) = L(p) - L_0(p_0) = (\mu - \mu_0)\overline{\overline{L}},$$

setzen, $\overline{\overline{L}}$ ebenfalls eine Funktion, deren Produkt mit $\sqrt{(s-\tau)^2 + (t-\tau)^2}$ absolut genommen gewiß für alle $s,\ t;\ \sigma,\ \tau$ unterhalb einer von μ unabhängigen Schranke bleibt — da ja $L(p)$ für $s = \sigma,\ t = \tau$ nur höchstens von der ersten Ordnung unendlich wird und $L_0(p_0)$ den Wert von $L(p)$ für $\mu = \mu_0$ bedeutet. Wegen (61) ist demnach auch

$$K(st,\ \sigma\tau) = (\mu - \mu_0)\overline{K}(st,\ \sigma\tau),$$

wo $\overline{K}$ eine Funktion ist, deren Produkt mit $\sqrt{(s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2}$ absolut genommen für alle $s,\ t;\ \sigma,\ \tau$ unterhalb einer von μ unabhängigen Schranke bleibt. In Folge der letzteren Eigenschaft erkennt man, daß der aus $\overline{K}$ gebildete dreifach zusammengesetzte Kern $\overline{K}\overline{K}\overline{K}$ eine stetige Funktion von $s,\ t;\ \sigma,\ \tau$ wird, deren absoluten Werte für alle $s,\ t;\ \sigma,\ \tau$ unterhalb einer von μ abhängigen Schranke bleiben. Hieraus wiederum folgt, daß der aus K gebildete dreifach zusammengesetzte Kern KKK ebenfalls stetig ist und überdies für ihn eine positive Zahl ε gefunden werden kann derart, daß die absoluten Werte von KKK für alle $s,\ t;\ \sigma,\ \tau$ kleiner als $\frac{1}{2}$ bleiben, sobald nur μ innerhalb des durch die Ungleichung

$$|\mu - \mu_0| \leqq \varepsilon \tag{62}$$

bestimmten Intervalles bleibt. Die so gefundene Tatsache bedingt, daß unter dieser einschränkenden Bedingung (62) für μ die inhomogene Integralgleichung

$$\int \varepsilon K dk - \varepsilon(\sigma\tau) = F(\sigma\tau)$$

stets nach der Neumannschen Methode lösbar ist und daß die

Digitized by Google

Lösung z gleichmäßig für alle s, t; σ, τ in μ stetig wird, während die entsprechende homogene Integralgleichung

$$\int z K dk - z(\sigma\tau) = 0$$

keine Lösung besitzt. Wenden wir dieses Resultat auf die Integralgleichung (60) für $f = L(p^*)$ an, so erkennen wir, daß dieselbe, falls μ der Bedingung (62) genügt, gewiß eine und nur eine Lösung φ besitzt und daß diese Lösung für $\mu = \mu_0$ gleichmäßig für alle s, t; σ, τ gegen Null konvergiert — da ja p^* für $\mu = \mu_0$ in G_0 und demnach $L(p^*)$ für $s, t \neq \sigma, \tau$ in Null übergeht. Nach dem von uns befolgten Verfahren ist

$$G = p^* - \varphi$$

die Greensche Funktion von $L(z)$, falls μ der Bedingung (62) genügt. Hieraus folgt wegen der eben erkannten Beschaffenheit von φ, daß der aus G zweifach zusammengesetzte Kern GG gleichmäßig für alle s, t; σ, τ in μ stetig ausfällt. Bilden wir daher nach Fredholm den Nenner der lösenden Funktion für die Integralgleichung

$$\lambda \int z G G dk - z(\sigma\tau) = F(\sigma\tau),$$

so erkennen wir, daß diese beständig konvergente Potenzreihe in λ überdies gleichmäßig für alle der Bedingung (62) genügenden Werte von μ konvergiert. Da andererseits die Nullstellen dieser Potenzreihe sämtlich reell und zwar die Eigenwerte des Kerns GG sind, diese aber nichts anders als die Quadrate der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sind, so folgt, daß allgemein der h^{te} Eigenwert λ_h^2 sich stetig in μ ändert; das Gleiche gilt mithin auch von λ_h, solange μ auf das Intervall (62) beschränkt bleibt.

Trifft die zu Anfang dieser Beweisführung gemachte Annahme, wonach die Eigenwerte der Differentialgleichung (59) sämtlich positiv ausfallen, nicht zu, so bezeichnen wir mit λ_1^0 den kleinsten Eigenwert von $L_0(z)$; sodann setzen wir

$$L^*(z) = L(z) + (\lambda_1^0 - 1) z,$$
$$L_0^*(z) = L_0(z) + (\lambda_1^0 - 1) z.$$

Die Eigenwerte der Differentialgleichung

$$L^*(z) + \lambda z = 0$$

sind offenbar

$$\lambda_h - \lambda_1^0 + 1, \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

Digitized by Google

und diejenigen von

$$L_0^*(z) + \lambda z = 0$$

sind daher sämtlich $\geqq 1$; folglich läßt sich unsere bisherige Betrachtung auf den Differentialausdruck $L^*(z)$ anwenden und lehrt, daß allgemein $\lambda_h - \lambda_1^0 + 1$ und mithin auch λ_h sich in der Umgebung von μ_0 stetig mit μ ändert.

Da μ_0 willkürlich gewählt werden kann, so ist damit der Beweis des aufgestellten Satzes vollständig erbracht.

Endlich sei noch bemerkt, daß die eben entwickelte Theorie sich unmittelbar auf die Differentialgleichung

$$L(z) + \lambda q z = 0 \tag{63}$$

übertragen läßt, wenn q eine beliebige überall positive (oder negative) Funktion auf der Kugel bedeutet. Es ist nämlich leicht ersichtlich, daß der Differentialausdruck

$$L^*(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} L\left(\frac{z}{\sqrt{q}}\right)$$

wiederum sich selbst adjungiert ist, und durch Einführung dieses Differentialausdruckes erhält die Differentialgleichung (63) die vorhin der Untersuchung zu Grunde liegende Gestalt

$$L^*(z) + \lambda z = 0.$$

Wir führen die wesentlichen Sätze über die Differentialgleichung (63) hier kurz, wie folgt, an.

Die Differentialgleichung (63) *besitzt unendlichviele Eigenwerte* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, *von denen jedoch nur eine endliche Anzahl negativ ausfällt. Die zu diesen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen besitzen die Orthogonalitätseigenschaft*

$$\int q \varphi_h \varphi_l dk = 0, \qquad (h \neq l)$$
$$\int q \varphi_h^2 dk = 1.$$

Jede (mindestens zweimalstetig differenzierbare) Funktion f auf der Kugel läßt sich nach den zu jenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *auf Fouriersche Weise wie folgt*

$$f = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots, \qquad (c_h = \int q f \varphi_h dk)$$

entwickeln.

Das Minimum des Dirichletschen Integrals $D(z)$ *bei den Nebenbedingungen*

Digitized by Google

$$\int qz^2\,dk = 1,$$
$$\int q\varphi_1 z\,dk = 0, \quad \ldots, \quad \int q\varphi_{h-1} z\,dk = 0$$

ist λ_h; dasselbe wird für $z = \varphi_h$ angenommen.

Hängen die Koeffizienten in $L(z)$ von einem Parameter μ analytisch ab und denken wir uns für jeden Wert von μ die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ der Größe nach geordnet, so ist allgemein der h^{te} Eigenwert λ_h eine stetige Funktion von μ.

XIX.

Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche.

Der folgende Abschnitt enthält eine Neubegründung der Minkowskischen Theorie von Volumen und Oberfläche. Der Gedanke, die Kugel der gewöhnlichen Raumgeometrie als Ort der Punkte gleicher Entfernungen von einem festen Punkte durch eine beliebige konvexe Fläche, „die sogenannte Eichfläche", zu ersetzen, bildet die Grundlage der arithmetischen Untersuchungen Minkowkis [1]). Die mehr geometrische Verfolgung dieses Gedankens hat ihn zu dem fundamentalen Begriffe des gemischten Volumens V_{122} von drei Körpern geführt [2]), und den Kernpunkt seiner Theorie von Volumen und Oberfläche bildet dann die Entdeckung der Ungleichung

$$V_{112}^2 \geqq V_{111} V_{122},$$

einer Ungleichung, welche lediglich quadratischen Charakter besitzt, während der Beweis derselben von Minkowski auf Grund einer kubischen Ungleichung geführt wird. Die nachfolgende neue Begründung der Minkowskischen Theorie geschieht mittelst der im vorigen Abschnitt entwickelten Sätze über die lineare sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichung auf der Kugel, und insbesondere der Nachweis jener quadratischen Ungleichung gelingt hierbei direkt auf Grund der Minimaleigenschaft des Dirichletschen Integrals. Insofern gerade allein die quadratische Ungleichung es ist, die sich eines direkten Beweises mittelst der Theorie der linearen Differentialgleichungen fähig erweist — die kubische Ungleichung erscheint als leichte Folge der quadratischen —, scheint mir die Bedeutung der Minkowskischen

1) Vgl. meinen Vortrag auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900, No. 4. Diese Nachr. 1900.

2) Vgl. meine Gedächtnisrede auf Minkowski. Diese Nachr. 1909, S. 16—17.

Digitized by Google

Entdeckung durch den hier folgenden Beweis noch in helleres Licht gesetzt, und zugleich erblicke ich in dieser Begründung der Minkowskischen Theorie von Volumen und Oberfläche das glänzendste spezielle Beispiel für die Anwendung meiner Theorie der orthogonalen Integralgleichungen.

Im Folgenden wollen wir allgemein unter einer homogenen Funktion ν^{ten} Grades der Variabeln x, y, z eine solche Funktion $W(x, y, z)$ verstehen, die für alle positiven Werte von μ der Gleichung

$$W(\mu x, \mu y, \mu z) = \mu^{\nu} W(x, y, z)$$

genügt. Ist insbesondere W eine homogene Funktion ersten Grades, so gelten die Identitäten

$$x W_x + y W_y + z W_z = W, \tag{64}$$

$$\begin{cases} x W_{xx} + y W_{yx} + z W_{zx} = 0, \\ x W_{xy} + y W_{yy} + z W_{zy} = 0, \\ x W_{xz} + y W_{yz} + z W_{zz} = 0. \end{cases} \tag{65}$$

Aus den Identitäten (65) folgt leicht

$$\frac{W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2}{z^2} = \frac{W_{yy} W_{zz} - W_{yz}^2}{x^2},$$

und hieraus entnehmen wir, wenn V irgend eine andere homogene Funktion ersten Grades in x, y, z bedeutet, die weitere Identität

$$\frac{W_{xx} V_{yy} - 2 W_{xy} V_{xy} + W_{yy} V_{xx}}{z^2} = \frac{W_{yy} V_{zz} - 2 W_{yz} V_{yz} + W_{zz} V_{yy}}{x^2}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (W, V) &= \frac{W_{yy} V_{zz} - 2 W_{yz} V_{yz} + W_{zz} V_{yy}}{x^2} \\ &= \frac{W_{zz} V_{xx} - 2 W_{xz} V_{xz} + W_{xx} V_{zz}}{y^2} \\ &= \frac{W_{xx} V_{yy} - 2 W_{xy} V_{yy} + W_{yy} V_{xx}}{z^2}. \end{aligned} \tag{66}$$

Es sei nunmehr im XYZ-Raum ein konvexer Körper gegeben, der den Nullpunkt im Inneren enthält; wir bezeichnen die Entfernung des Nullpunktes von derjenigen Tangentialebene dieses Körpers, deren Normale die Richtungskosinusse α, β, γ besitzt, mit $\mathsf{H}(\alpha, \beta, \gamma)$ und denken uns die so bestimmte Funktion H auf der Kugel mit dem Radius 1 ausgebreitet. Die Gleichung jener Tan-

Digitized by Google

gentialebene ist

$$\alpha X+\beta Y+\gamma Z = \mathsf{H}$$

oder, wenn wir

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$H(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathsf{H}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

setzen,

$$xX+yY+zZ = H(x, y, z),$$

wo H eine homogene Funktion ersten Grades in x, y, z ist. Aus dieser Gleichung erhalten wir durch Differentiation nach x, y, z sofort die Koordinaten des Berührungspunktes der Tangentialebene als homogene Funktionen nullten Grades von x, y, z, wie folgt:

$$X = H_x,$$
$$Y = H_y,$$
$$Z = H_z;$$

diese Gleichungen liefern zugleich eine Parameterdarstellung der Oberfläche des Körpers.

Bezeichnen wir mit S ein ganz auf der oberen Hälfte $z > 0$ der Einheitskugel verlaufendes Gebiet und lassen wir in den Gleichungen

$$X = \mu H_x,$$
$$Y = \mu H_y,$$
$$Z = \mu H_z$$

den Faktor μ die Werte 0 bis 1 und x, y, z alle Punkte von S durchlaufen, so durchläuft der Punkt X, Y, Z denjenigen Raumteil Q, der durch einen gewissen Kegel mit der Spitze im Nullpunkte aus unserem konvexen Körper ausgeschnitten wird. Um das Volumen von Q zu berechnen, führen wir statt der Koordinaten X, Z, Y die Variabeln

$$\mu,\ s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

ein und erhalten dann

$$V_Q = \iiint_{(Q)} dX\,dY\,dZ = \iiint_{\substack{(S)\\(\mu=0,\ldots,1)}} \Delta\, d\mu\,ds\,dt,$$

wo die Funktionsdeterminante den Wert

Digitized by Google

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_x, & H_y, & H_z \\ \mu H_{xs}, & \mu H_{ys}, & \mu H_{zs} \\ \mu H_{yt}, & \mu H_{yt}, & \mu H_{zt} \end{vmatrix} = \mu^2 z^2 \begin{vmatrix} H_x, & H_y, & H_z \\ H_{xx}, & H_{yx}, & H_{zx} \\ H_{xy}, & H_{yy}, & H_{zy} \end{vmatrix}$$

besitzt. Multiplizieren wir nun in der letzten Determinante die Elemente der ersten Vertikalreihe mit $\frac{x}{z}$, die der zweiten mit $\frac{y}{z}$ und addieren sie dann zur dritten, so erhalten wir mit Rücksicht auf (64), (65), genommen für $W = H$,

$$\Delta = \mu^2 z H(H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2),$$

und demnach wird bei Ausführung der Integration nach μ

$$V_Q = \tfrac{1}{3} \iint_{(S)} H(H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2) z \, ds \, dt.$$

Wie eine leichte Rechnung zeigt, ist für die Kugel

$$\sqrt{eg - f^2} = z^3 \tag{67}$$

und demnach drückt sich das Oberflächenelement dk der Einheitskugel durch die Koordinaten s, t wie folgt aus

$$dk = z^3 \, ds \, dt;$$

wir erhalten daher schließlich

$$\begin{aligned} V_Q &= \tfrac{1}{3} \int_{(S)} H \frac{H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2}{z^2} \, dk \\ &= \tfrac{1}{6} \int_{(S)} H(H, H) \, dk. \end{aligned} \tag{68}$$

Da nun (H, H), wie aus der Definition (66) hervorgeht, überall auf der Kugel wohl definiert ist, so läßt sich in (68) jetzt das Integral über die ganze Oberfläche der Einheitskugel ausdehnen, und wir erhalten das Gesamtvolumen unseres konvexen Körpers in der Gestalt

$$V = \tfrac{1}{6} \int H(H, H) \, dk.$$

Ist Ω eine willkürliche Funktion auf der Einheitskugel, so stellt

$$W(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, \Omega(x, y, z)$$

eine willkürliche homogene Funktion ersten Grades von x, y, z

Digitized by Google

dar. Nach (66) ist

$$(W, H) = \frac{1}{x^2}(W_{yy}H_{zz} - 2W_{yz}H_{yz} + W_{zz}H_{yy}),$$
$$= \frac{1}{y^2}(W_{zz}H_{xx} - 2W_{zx}H_{zx} + W_{xx}H_{zz}),$$
$$= \frac{1}{z^2}(W_{xx}H_{yy} - 2W_{xy}H_{xy} + W_{yy}H_{xx}),$$

und da hier der erste Ausdruck rechter Hand überall auf der Kugel für $x \neq 0$, der zweite für $y \neq 0$, der dritte für $z \neq 0$ gültig ist, so erkennen wir, daß

$$L(\Omega) = (W, H)$$

im Sinne der Festsetzung zu Beginn des vorigen Abschnitts XVIII ein auf der Kugel regulärer linearer Differentialausdruck ist; derselbe ist durch die Funktion H eindeutig bestimmt.

Der lineare Differentialausdruck $L(\Omega)$ auf der Kugel ist sich selbst adjungiert und von elliptischem Typus.

Um die erstere Behauptung zu beweisen, denken wir uns wie vorhin auf einem Teilgebiet S der Kugel als krummlinige Koordinaten die Variabeln

$$s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

eingeführt und wollen dann den zu $L(\Omega)$ gehörigen Differentialausdruck $\mathfrak{L}(\Omega)$ in den Variabeln s, t aufstellen. Zu dem Zwecke bedenken wir, daß in unserem Ausdrucke (W, H) die Differentiationen nach x, y, z so zu verstehen sind, daß dabei x, y, z drei unabhängige Variabele sind. Nun gewinnen wir W, H aus den Ω, H, indem wir diese als Funktionen der krummlinigen Koordinaten s, t auf dem Teilgebiet S der Kugel auffassen, durch die Formeln

$$W(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\Omega$$
$$= z\sqrt{1+s^2+t^2}\,\Omega(s, t),$$
$$H(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathsf{H}$$
$$= z\sqrt{1+s^2+t^2}\,\mathsf{H}(s, t),$$

und da hiernach

$$W_{xx} = \frac{1}{z^2}(z\sqrt{1+s^2+t^2}\,\Omega(s, t))_{ss},$$

Digitized by Google

$$W_{xy} = \frac{1}{z^3}\left(z\sqrt{1+s^2+t^2}\,\Omega(s,\,t)\right)_{st},$$

$$W_{yy} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1+s^2+t^2}\,\Omega(s,\,t)\right)_{tt},$$

$$H_{xx} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1+s^2+t^2}\,\mathsf{H}(s,\,t)\right)_{ss},$$

$$H_{xy} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1+s^2+t^2}\,\mathsf{H}(s,\,t)\right)_{st},$$

$$H_{yy} = \frac{1}{z^2}\left(z\sqrt{1+s^2+t^2}\,\mathsf{H}(s,\,t)\right)_{tt}$$

wird, so gelangen wir schließlich mit Rücksicht auf (67) zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\Omega) &= \sqrt{eg-f^2}\,L(\Omega) = z^3(W,\,H)\\ &= \sqrt{1+s^2+t^2}\,\big\{(\sqrt{1+s^2+t^2}\,\Omega)_{ss}(\sqrt{1+s^2+t^2}\,\mathsf{H})_{tt}\\ &\qquad -2\,(\sqrt{1+s^2+t^2}\,\Omega)_{st}(\sqrt{1+s^2+t^2}\,\mathsf{H})_{st}\\ &\qquad +(\sqrt{1+s^2+t^2}\,\Omega)_{tt}(\sqrt{1+s^2+t^2}\,\mathsf{H})_{ss}\big\}.\end{aligned} \tag{69}$$

Nehmen wir in dem allgemeinsten linearen Differentialausdruck $\mathfrak{L}(z)$ (S. 363) — unter α irgend eine Funktion von s, t verstanden —

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{tt}, \quad b = -\alpha_{st}, \quad c = \alpha_{ss},\\ l &= 0, \quad m = 0, \quad n = 0,\end{aligned}$$

so sind die Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{L}(z)$ sich selbst adjungiert ist, nämlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} l &= a_s + b_t,\\ m &= b_s + c_t\end{aligned}$$

erfüllt; demnach ist der Ausdruck

$$\alpha_{tt}z_{ss} - 2\alpha_{st}z_{st} + \alpha_{ss}z_{tt}$$

und folglich mit Rücksicht auf eine S. 387 gemachte Bemerkung auch der Ausdruck (69) sich selbst adjungiert; das Gleiche gilt mithin nach unserer Festsetzung auch für den linearen Differentialausdruck $L(\Omega)$ auf der Kugel.

Um ferner den elliptischen Charakter des Differentialausdruckes $L(\Omega)$ zu erkennen, haben wir offenbar den Nachweis der Ungleichung

$$H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2 > 0 \tag{70}$$

Digitized by Google

nötig. Nach den Ueberlegungen, wie wir sie zu Anfang dieses Abschnittes XIX (S. 390) angestellt haben, wurden die Tangentialebenen unseres konvexen Körpers durch die Gleichung

$$xX + yY + zZ = H(x, y, z)$$

dargestellt. Dividieren wir diese Gleichung durch z und führen dann

$$s = \frac{x}{z}, \quad t = \frac{y}{z}$$

ein, so erhält jene Gleichung die Gestalt

$$sX + tY + Z = H(s, t, 1),$$

und folglich wird

$$\begin{aligned} X &= H_s, \\ Y &= H_t, \\ Z &= H - sH_s - tH_t. \end{aligned}$$

Wie wir hieraus ersehen, ist der Uebergang von der Darstellung der Oberfläche unseres Körpers durch Punktkoordinaten, wobei Z als Funktion der unabhängigen Variabeln X, Y betrachtet wird, zu der Darstellung durch Ebenenkoordinaten, wobei H als Funktion der unabhängigen Variabeln s, t wird, nichts anderes als die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen übliche Legendresche Transformation. Die Theorie der Legendreschen Transformation lehrt bekanntlich, daß zwischen den Ableitungen zweiter Ordnung die Gleichung

$$H_{ss} H_{tt} - H_{st}^2 = \frac{1}{Z_{XX} Z_{YY} - Z_{XY}^2}$$

gilt, und da wegen der Konvexität unserer Fläche der Nenner des Bruches rechter Hand positiv ausfällt, so folgt das Gleiche für die linke Seite, und mithin gilt auch die Ungleichung (70).

Wir sind nunmehr in der Lage, die allgemeine Theorie des vorigen Abschnittes XVIII auf den linearen Differentialausdruck $L(\Omega)$ anzuwenden. Was zunächst das Integrationsproblem betrifft (vgl. den allgemeinen S. 370–371 aufgestellten Satz), so bedarf es zu dessen Erledigung vor Allem der Kenntnis der folgenden wichtigen Tatsache.

Jede stetige Lösung der homogenen Differentialgleichung auf der Kugel

(71) $$L(\Omega) = 0$$

Digitized by Google

ist eine lineare Kombination der drei Lösungen

$$\Omega = x, \quad \Omega = y, \quad \Omega = z.$$

Zum Beweise nehmen wir an, es sei ω eine stetige Funktion auf der Kugel, die der Differentialgleichung (71) genügt. Setzen wir sodann

$$w(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\omega\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

so wird w eine homogene Funktion ersten Grades von x, y, z, die der Gleichung

$$(w, H) = 0$$

und daher wegen (66) auch als Funktion der drei unabhängigen Variabeln x, y, z den Gleichungen

$$(72) \qquad \begin{cases} w_{yy} H_{zz} - 2w_{yz} H_{yz} + w_{zz} H_{yy} = 0, \\ w_{zz} H_{xx} - 2w_{zx} H_{zx} + w_{xx} H_{zz} = 0, \\ w_{xx} H_{yy} - 2w_{xy} H_{xy} + w_{yy} H_{xx} = 0 \end{cases}$$

genügt. Es sei jetzt x_1, y_1, z_1 eine Stelle auf der Einheitskugel, an der die Funktion w_x den kleinsten Wert auf der Kugel annimmt. Da w_x homogen vom nullten Grade ist, so wird dieser kleinste Wert k zugleich auch das Minimum der Funktion w_x im Raume für die drei unabhängigen Variabeln x, y, z. Wir setzen

$$\begin{aligned} \xi &= x - x_1, \\ \eta &= y - y_1, \\ \zeta &= z - z_1 \end{aligned}$$

und entwickeln w_x in eine nach Potenzen von ξ, η, ζ fortschreitende Reihe wie folgt

$$(73) \qquad w_x = k + N(\xi, \eta, \zeta) + \cdots;$$

hier bezeichne N die in der Entwickelung vorkommenden Glieder niederster Dimension und n sei der Grad dieses homogenen Ausdrucks N in ξ, η, ζ; dabei ist die Annahme gemacht, daß w_x nicht konstant sei. Da w_x an der Stelle $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ ein Minimum haben soll, so ist N notwendig eine definite Form: es gilt für alle ξ, η, ζ die Ungleichung

$$N(\xi, \eta, \zeta) \geqq 0.$$

Andererseits entwickeln wir auch w in eine nach Potenzen von ξ, η, ζ fortschreitende Reihe, wie folgt

$$(74) \qquad w = c + l(\xi, \eta, \zeta) + M(\xi, \eta, \zeta) + \cdots;$$

Digitized by Google

dabei bezeichne c eine Konstante, l die homogenen linearen Glieder und endlich M die nächst den linearen in der Entwickelung vorkommenden Glieder niedrigster Dimension; m sei der Grad dieses homogenen Ausdruckes M in ξ, η, ζ.

Wir bezeichnen nun die Werte der Ausdrücke

$$H_{xx},\ H_{yy},\ H_{zz},\ H_{yz},\ H_{zx},\ H_{xy}$$

für $\xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 0$ d. h. $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$ bez. mit

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \lambda,\quad \mu,\quad \nu;$$

dann ergibt sich, indem wir (74) in die beiden letzten Gleichungen (72) einführen, durch Berücksichtigung der Glieder niedrigster Dimension

$$(75)\qquad \begin{cases} M_{\xi\zeta}\,\alpha - 2M_{\xi\xi}\,\mu + M_{\xi\xi}\,\gamma = 0, \\ M_{\xi\xi}\,\beta - 2M_{\xi\eta}\,\nu + M_{\eta\eta}\,\alpha = 0. \end{cases}$$

Es werde erstens angenommen, daß M ein Glied mit der Variabeln ξ enthält: alsdann lehrt der Vergleich von (73) mit (74), daß

$$N = M_\xi$$

wird, und daraus wiederum ersehen wir, indem wir (75) nach ξ differenzieren, daß auch N den beiden Gleichungen

$$(76)\qquad N_{\xi\zeta}\,\alpha - 2N_{\xi\xi}\,\mu + N_{\xi\xi}\,\gamma = 0,$$

$$(77)\qquad N_{\xi\xi}\,\beta - 2N_{\xi\eta}\,\nu + N_{\eta\eta}\,\alpha = 0$$

genügt. Wir setzen nun

$$(78)\qquad N = N_h\,\zeta^h + Z, \qquad (0 \leqq h \leqq n)$$

wo N_h eine nicht identisch verschwindende Funktion vom $n-h$-ten Grade in ξ, η und Z eine Funktion von ξ, η, ζ ist, die den Faktor ζ^{h+1} enthält. Indem wir diesen Ausdruck für N in (77) einführen, erkennen wir, daß auch N_h der Gleichung (77) genügen muß.

Wegen der Konvexität der durch H dargestellten Fläche gelten für die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ die Ungleichungen

$$\alpha\gamma - \mu^2 > 0,$$
$$\alpha\beta - \nu^2 > 0;$$

die letztere zeigt, daß jede nicht konstante Lösung der partiellen Differentialgleichung (77) notwendig eine indefinite Funktion d. h. eine solche Funktion von ξ, η ist, die sowohl positive, wie negative Werte annimmt. Wenn aber N_h indefinit wäre, so wäre wegen (78) auch N gewiß bei genügend kleinen Werten von ζ

Digitized by Google

sowohl positiver, wie negativer Werte fähig, was dem oben festgestellten definiten Charakter von N widerspricht. Demnach müßte N_h notwendig eine nicht verschwindende Konstante und zugleich

$$h = n, \quad N = N_n \zeta^n$$

sein. Die Einsetzung dieses Wertes für N in (76) lehrt, da $\alpha \neq 0$ ist, die Unmöglichkeit hiervon.

Es bleibt also noch die zweite Annahme zu untersuchen übrig, daß M nur von ξ, η abhängt. Die Einführung von $M_\xi = 0$ in (75) lehrt

$$M_{\xi\xi} = 0, \quad M_{\eta\eta} = 0$$

d. h.

$$M = C\eta\xi, \tag{79}$$

wo C eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Nun genügt w als homogene Funktion ersten Grades in x, y, z der Identität

$$xw_x + yw_y + zw_z = w$$

d. h.

$$(x_1 + \xi) w_\xi + (y_1 + \eta) w_\eta + (z_1 + \zeta) w_\zeta = w$$

oder unter Berücksichtigung von (73), (74), (79)

$$(x_1 + \xi)(k + N + \cdots) + (y_1 + \eta)(l_\eta + C\xi + \cdots) + (z_1 + \zeta)(l_\zeta + C\eta + \cdots) = c + l + C\eta\xi + \cdots. \tag{80}$$

Sammeln wir auf beiden Seiten dieser Identität die Glieder erster Ordnung in ξ, η, ζ, so ergibt sich

$$\xi k + y_1 C\xi + \eta l_\eta + z_1 C\eta + \zeta l_\zeta = l$$

und wegen

$$k = l_\xi, \quad \xi l_\xi + \eta l_\eta + \zeta l_\zeta = l$$

folgt

$$y_1 C\xi + z_1 C\eta = 0$$

d. h.

$$y_1 = 0, \quad z_1 = 0$$

und folglich

$$x_1 = \pm 1.$$

Durch Einführung dieser Werte verwandelt sich (80) in

$$(\pm 1 + \xi)(k + N + \cdots) + \eta(l_\eta + C\xi + \cdots) + \zeta(l_\zeta + C\eta + \cdots) = c + l + C\eta\xi + \cdots,$$

und wenn wir hierin die Glieder zweiten Grades auf beiden Seiten sammeln, so wird je nachdem der Grad n von N gleich 2 oder

Digitized by Google

größer als 2 ausfällt, die Gleichung

$$\pm N + C\eta\xi + C\eta\xi = C\eta\xi$$

oder die Gleichung

$$C\eta\xi + C\eta\xi = C\eta\xi$$

erfüllt sein müssen. Die letztere Gleichung ist unmöglich; die erstere ergibt

$$N = \mp C\eta\xi,$$

was dem definiten Charakter von N widerspricht.

Damit ist unsere ursprüngliche Annahme widerlegt: in der Entwickelung (73) darf ein Glied N nicht auftreten d. h. w_x ist eine Konstante. Da in gleicher Weise auch w_y und w_z Konstanten sein müssen, so folgt, daß w nichts anderes als eine lineare Kombination der drei Funktionen x, y, z ist.

Aus den eben Bewiesenen folgt auf Grund des in Abschnitt XVIII (S. 370—371) aufgestellten Satzes:

Die inhomogene Differentialgleichung auf der Kugel

$$L(\Omega) = f,$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn die gegebene Funktion f auf der Kugel die drei Integralbedingungen

$$\int f x\, dk = 0,$$
$$\int f y\, dk = 0,$$
$$\int f z\, dk = 0$$

erfüllt.

Nehmen wir in $L(\Omega)$ insbesondere

$$H = R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so wird

$$L(\Omega) = (W, R) = \frac{1}{z^2}\{(1-y^2)W_{xx} + 2xy\,W_{xy} + (1-x^2)W_{yy}\} \quad (z \neq 0)$$

und da, wie eine einfache Rechnung lehrt, der Ausdruck rechts hier nichts anderes als die Summe der bei den Hauptkrümmungsradien der durch W gegebenen Fläche darstellt, so geht in diesem Falle unser allgemeiner Satz in den von A. Hurwitz [1]) aufgestellten und mittelst der Theorie der Kugelfunktionen bewiesenen Satz über.

Dem obigen Ausdruck V (S. 391) für das Volumen eines konvexen Körpers stellt Minkowski einen allgemeineren für das gemischte Volumen von drei konvexen Körpern zur Seite: sind

1) Vgl. Ann. de l'école normale supérieure, t. XIX (1902), S. 404.

Digitized by Google

H_1, H_2, H_3 die diese Körper bestimmenden homogenen Funktionen ersten Grades, so definiert Minkowski das gemischte Volumen dreier Körper durch das über die ganze Einheitskugel zu erstreckende Integral

$$V(H_1, H_2, H_3) = V_{123} = \tfrac{1}{6}\int H_1(H_2, H_3)\, dk.$$

Setzen wir in Formel (15)

$$w = H_1, \quad z = H_2$$

und berücksichtigen, daß unser Differentialausdruck

$$L(\Omega) = (W, H_3)$$

sich selbst adjungiert ist, so zeigt dieselbe unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung

$$\int H_1(H_2, H_3)\, dk = \int H_2(H_1, H_3)\, dk$$

d. h. es ist

$$V_{123} = V_{213}$$

und da offenbar auch

$$V_{123} = V_{132}$$

wird, so findet sich damit der Minkowskische Satz bestätigt, *daß das gemische Volumen dreier Körper bei den Permutationen derselben seinen Wert beibehält.*

Da überall auf der Kugel

$$\mathsf{H} > 0, \quad (H, H) > 0$$

ausfällt, so ist auch $\frac{(H, H)}{\mathsf{H}}$ eine durchweg positive Funktion, und daher läßt sich unsere Theorie der partiellen Differentialgleichung, wie sie in dem zum Schlusse des Abschnittes XVIII S. 387—388 ausgesprochenen Satze gipfelt, auf die Differentialgleichung

$$L(\Omega) + \lambda \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} \Omega = 0 \tag{81}$$

anwenden. Aus jenem allgemeinen Satze entnehmen wir unmittelbar, daß diese Gleichung nur endlichviele negative, dagegen unendlichviele positive Eigenwerte hat. Nach dem vorhin Bewiesenen wissen wir ferner, daß $\lambda = 0$ ein dreifacher Eigenwert ist. Außerdem sehen wir, daß $\lambda = -1$ jedenfalls ein Eigenwert jener Differentialgleichung und $\Omega = \mathsf{H}$ eine zugehörige Eigenfunktion ist. Wir wollen nunmehr zeigen, daß $\lambda = -1$ nur ein einfacher Eigenwert ist und außer ihm keine weiteren negativen Eigenwerte mehr vor-

Digitized by Google

handen sind. Zu dem Zwecke führen wir in (81)

$$H = R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

ein; wegen

$$(R, R) = 2$$

erhalten wir so die speziellere Differentialgleichung

$$L_0(\Omega) + 2\lambda\Omega = 0, \tag{82}$$

wo

$$L_0(\Omega) = (W, R) = \frac{1}{\varepsilon^2}\{(1-y^2)W_{xx}+2xyW_{xy}+(1-x^2)W_{yy}\} \quad (\varepsilon \neq 0) \tag{83}$$

bedeutet.

Diese Differentialgleichung ist mit der Differentialgleichung der Kugelfunktionen identisch. Bezeichnet nämlich U eine homogene Funktion h-ten Grades, die der Potentialgleichung

$$V_{xx}+V_{yy}+V_{zz} = 0 \tag{84}$$

genügt, und setzen wir

$$V = R^{h-1}W,$$

so wird

$$V_{xx} = R^{h-1}W_{xx}+2(h-1)xR^{h-3}W_x + \{(h-1)R^{h-3}+(h-1)(h-3)x^2R^{h-5}\}W.$$

Addieren wir hierzu die entsprechenden Ausdrücke für V_{yy}, V_{zz} und berücksichtigen dann die Identitäten (64), (65) — entsprechend dem Umstande, daß W eine homogene Funktion ersten Grades ist —, so erhalten wir auf der Kugel wegen $R = 1$ die Gleichung

$$V_{xx}+V_{yy}+V_{zz} = W_{xx}+W_{yy}+W_{zz}+(h-1)(h+2)W.$$

Nun ist wegen (65) für $R = 1$

$$W_{xx}+W_{yy}+W_{zz} = \frac{1}{\varepsilon^2}\{(1-y^2)W_{xx}+2xyW_{xy}+(1-x^2)W_{yy}\},$$

und mithin geht wegen (83) die Potentialgleichung (84) über in die Differentialgleichung

$$(W, R)+(h-1)(h+2)W = 0,$$

oder wenn

$$W = R\Omega$$

gesetzt wird, in

$$L_0(\Omega)+(h-1)(h+2)\Omega = 0.$$

Die Theorie der Kugelfunktionen lehrt, daß diese Gleichung keine anderen auf der Kugel stetigen Funktionen zuläßt, als eben jene

Digitized by Google

aus den homogenen Potentialen von den Graden

$$h = 0, 1, 2, \ldots$$

entspringenden Funktionen Ω, und da die Potentialgleichung (84) genau $2h+1$ solche Lösungen h^{ten} Grades besitzt, so folgt, daß die Differentialgleichung (82) allgemein für $h = 0, 1, 2, \ldots$ die Größe

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(h-1)(h+2)$$

als $2h+1$ fachen Eigenwert besitzt. Für $h = 0$ erhalten wir $\lambda = -1$, für $h = 1$ ergibt sich $\lambda = 0$ als dreifacher Eigenwert, womit sich das vorhin für die allgemeine Differentialgleichung (81) gefundene Resultat bestätigt. Darüber hinaus aber erkennen wir die wichtige Tatsache, daß die spezielle Differentialgleichung (82) den Eigenwert $\lambda = -1$ als einfachen Eigenwert besitzt und daß von diesem Werte und $\lambda = 0$ abgesehen alle übrigen Eigenwerte positiv ausfallen, daß insbesondere der kleinste Eigenwert $\lambda = 2$ (für $h = 2$) wird.

Es ist nun leicht vermöge des Satzes über die stetige Aenderung der Eigenwerte bei stetiger Aenderung eines Parameters in der Differentialgleichung (S. 384, S. 388) die eben gefundene Tatsache auf die allgemeine Differentialgleichung (81) zu übertragen.

Wegen (70) hat die in t quadratische Gleichung

$$H_{xx}t^2 + 2H_{xy}t + H_{yy} = 0$$

keine reelle Wurzel, und da das Gleiche von der quadratischen Gleichung

$$R_{xx}t^2 + 2R_{xy}t + R_{yy} = 0$$

gilt, so besitzt auch die Gleichung

$$(\mu H_{xx} + (1-\mu)R_{xx})t^2 + 2(\mu H_{xy} + (1-\mu)R_{xy})t + \mu H_{yy} + (1-\mu)R_{yy} = 0,$$

wo μ einen reellen auf das Intervall

$$0 \leqq \mu \leqq 1 \tag{85}$$

beschränkten Parameter bedeutet, keine reelle Wurzel t und demnach ist

$$(\mu H_{xx} + (1-\mu)R_{xx})(\mu H_{yy} + (1-\mu)R_{yy}) - (\mu H_{xy} + (1-\mu)R_{xy})^2 > 0;$$

d. h. die sämtlichen durch die Funktionenschaar

$$H_\mu = \mu H + (1-\mu)R$$

dargestellten Flächen sind konvex; mithin gelten die vorhin

Digitized by Google

für $L(\Omega)$ entwickelten Tatsachen auch für den Differentialausdruck

$$L_\mu(\Omega) = (W, H_\mu)$$

und die Differentialgleichung

$$L_\mu(\Omega) + \lambda \frac{(H_u, H_u)}{H_\mu} \Omega = 0. \tag{86}$$

Die Differentialgleichung (86) geht für $\mu = 0$ in (82), für $\mu = 1$ in (81) über. Die Differentialgleichung (82) besitzt, wie wir sahen, vom kleinsten an der Größe nach geordnet, die folgenden Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = 2.$$

Die Heranziehung des vorhin genannten Satzes über die stetige Aenderung der Eigenwerte (S. 384; S. 388) und die Berücksichtigung des Umstandes, daß $\lambda = 0$ für alle Werte des Parameters μ genau ein dreifacher Eigenwert sein muß, zeigt, daß, während μ das Intervall (85) durchläuft, der fünfte Eigenwert stets positiv bleiben muß: insbesondere auch für $\mu = 1$. Wir fassen die gefundenen Resultate, wie folgt, zusammen.

Die partielle Differentialgleichung (81) *auf der Kugel besitzt* $\lambda = -1$ *als einfachen Eigenwert: die zugehörige Eigenfunktion ist* $\Omega = \mathsf{H}$; *ferner ist für sie* $\lambda = 0$ *ein dreifacher Eigenwert: die zugehörigen Eigenfunktionen auf der Kugel sind* x, y, z; *die übrigen Eigenwerte sind positive. Das System der Eigenfunktionen von* (81)

$$\Omega_1 = \mathsf{H}, \quad \Omega_2 = x, \quad \Omega_3 = y, \quad \Omega_4 = z, \quad \Omega_5, \quad \Omega_6, \quad \ldots$$

bildet ein System von Funktionen, welches für $\mathsf{H} = 1$ *in das System der Kugelfunktionen übergeht und als die Verallgemeinerung der letzteren anzusehen ist, wenn man im Sinne der Minkowskischen Geometrie die Kugel durch eine beliebige konvexe Fläche ersetzt. Denkt man* $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$, *wie üblich, orthogonal normiert, so ist jede willkürliche (mindestens zweimalstetig differenzierbare) Funktion* f *auf der Kugel nach jenen Eigenfunktionen auf Fouriersche Weise entwickelbar wie folgt*

$$f = c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2 + c_3 \Omega_3 + \cdots, \quad c_k = \int \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} f \Omega_k \, dk.$$

Nunmehr sind wir im Stande, diejenige fundamentale quadratische Ungleichung zwischen den gemischten Volumina zweier Körper abzuleiten, die bereits in der Einleitung zu diesem Abschnitte erwähnt worden ist; dieselbe wird uns als Ausfluß der Tatsache erscheinen, daß der fünfte Eigenwert λ_5 der Differentialgleichung (81) (S. 399) positiv ausfällt. In der Tat, zufolge

Digitized by Google

des am Schlusse des Abschnittes XVIII aufgestellten allgemeinen Satzes ist λ_s das Minimum des Dirichletschen Integrales

$$D(\Omega) = -\int H(W, W)\, dk$$

bei den Nebenbedingungen

$$\int \frac{(H,H)}{\mathsf{H}}\, \Omega^2\, dk = 1, \tag{87}$$

$$\int (H,H)\, \Omega\, dk = 0, \tag{88}$$

$$\begin{cases} \int \frac{(H,H)}{\mathsf{H}}\, x\Omega\, dk = 0, \\ \int \frac{(H,H)}{\mathsf{H}}\, y\Omega\, dk = 0, \\ \int \frac{(H,H)}{\mathsf{H}}\, z\Omega\, dk = 0. \end{cases} \tag{89}$$

Es sei nun G eine beliebige homogene Funktion ersten Grades, die auf der Kugel, für Ω eingesetzt, der Bedingung (88) genügt. Die durch G bestimmte Funktion auf der Kugel bezeichnen wir mit Γ. Wir wählen dann die drei Konstanten a, b, c derart, daß die Funktion

$$\Omega = \Gamma + ax + by + cz \tag{90}$$

auf der Kugel die drei Bedingungen (89) erfüllt. Dies ist gewiß möglich, da im entgegengesetzten Falle solche Konstante a, b, c, die nicht sämtlich Null sind, existieren müßten, daß die lineare Verbindung $ax + by + cz$ für Ω eingesetzt die drei Bedingungen (89) erfüllt; dann aber wäre als Folge davon, wie man sofort sieht, auch

$$\int \frac{(H,H)}{\mathsf{H}}\, (ax + by + cz)^2\, dk = 0;$$

und dies ist nicht der Fall, da der Integrand positiv ausfällt.

Wegen

$$\int (H,H)(ax + by + cz)\, dk = \int H(H, ax + by + cz)\, dk = 0$$

erfüllt die in (90) dargestellte Funktion Ω auch die Bedingung (88). Ist nun die Funktion Ω nicht identisch für alle Punkte der Kugel Null, — was nur möglich ist, wenn G einer linearen Kombination von x, y, z gleich wird — so können wir dieselbe mit einer Konstanten derart multipliziert denken, daß auch die Bedingung (87) erfüllt wird. Wegen $\lambda_s > 0$ folgt alsdann $D(\Omega) > 0$.

Digitized by Google

Da aber

$$D(\mathfrak{Q}) = -\int H(G+ax+by+cz,\ G+ax+by+cz)\,dk$$
$$= -\int H(G, G)\,dk$$

wird, so gelangen wir zu dem Ergebnis: es gilt stets die Ungleichung

$$\int H(G, G)\,dk \leqq 0, \tag{91}$$

wenn G eine beliebige homogene Funktion ersten Grades bedeutet, für die

$$\int G(H, H)\,dk = 0$$

ausfällt und dabei gilt in jener Ungleichung (91) das Gleichheitszeichen nur, wenn G eine lineare Verbindung der drei Funktionen x, y, z ist.

Aus dieser Tatsache entnehmen wir, indem wir $G = H - F$ setzen, unmittelbar das weitere Ergebnis: es gilt stets die Ungleichung

$$\int H(H, H)\,dk \geqq \int H(F, F)\,dk, \tag{92}$$

wenn F eine beliebige homogene Funktion ersten Grades bedeutet, für die

$$\int H(H, H)\,dk = \int F(H, H)\,dk$$

ausfällt, und dabei gilt in jener Ungleichung (92), das Gleichheitszeichen nur, wenn drei Konstanten a, b, c existieren, derart daß

$$F = H + ax + by + cz \tag{93}$$

wird.

Die Formeln für die Punktkoordinaten X, Y, Z der Fläche, wie sie zu Anfang dieses Abschnittes S. 390 aufgestellt worden sind, lehren, daß, wenn zwei zu konvexen Körpern gehörige Funktionen F, H durch eine Relation der Gestalt (93) mit einander verbunden sind, der eine Körper durch eine bloße Parallelverschiebung aus dem anderen Körper hervorgegangen ist. Verstehen wir daher unter F eine zu einem konvexen Körper gehörige homogene Funktion ersten Grades, wie es H ist, so spricht sich das vorhin gefundene Resultat auch wie folgt aus: Wenn für zwei konvexe Körper, die durch H, F bestimmt sind,

$$V(H, H, H) = V(H, H, F) \tag{94}$$

ist, so gilt stets die Ungleichung

$$V(H, H, H) \geqq V(H, F, F); \tag{95}$$

Digitized by Google

und hier hat das Gleichheitszeichen nur statt, wenn der eine Körper durch eine bloße Parallelverschiebung aus dem anderen Körper hervorgegangen ist.

Nunmehr seien irgend zwei konvexe Körper vorgelegt und die zu denselben gehörigen Funktionen seien H, G. Wegen $G > 0$ ist die Konstante

$$V(H, H, G) = \tfrac{1}{3}\int G(H, H)\, dk$$

positiv und folglich auch die Funktion

$$F = \frac{V(H, H, H)}{V(H, H, G)}\, G.$$

Der durch F definierte Körper geht aus dem durch G definierten Körper, wie man sieht, durch eine Aehnlichkeitstransformation hervor. Da außerdem F offenbar die Bedingung (94) erfüllt, so folgt aus dem Vorigen die Gültigkeit der Ungleichung (95), d. h. es ist

$$V(H, H, H) \geqq \left(\frac{V(H, H, H)}{V(H, H, G)}\right)^2 V(H, G, G)$$

oder

$$V(H, H, G)^2 \geqq V(H, H, H)\, V(H, G, G). \tag{96}$$

Es gilt mithin der folgende Satz, der den Kernpunkt der Minkowskischen Theorie von Volumen und Oberfläche ausmacht.

Für zwei konvexe Körper besteht stets die quadratische Ungleichung (96), *wobei das Gleichheitszeichen nur dann statt hat, wenn der eine Körper aus dem anderen durch Parallelverschiebung und Aehnlichkeitstransformation hervorgeht.*

Durch Vertauschung der beiden Körper folgt aus (96) die Ungleichung

$$V(H, G, G)^2 \geqq V(G, G, G)\, V(H, H, G). \tag{97}$$

Durch Quadrieren von (96) und Multiplikation mit (97) folgt nach Forthebung des positiven Faktors $V(H, G, G)^2\, V(H, H, G)$ die Ungleichung

$$V(H, H, G)^3 \geqq V(H, H, H)^2\, V(G, G, G); \tag{98}$$

d. h. es gilt der Satz:

Für zwei konvexe Körper besteht stets die kubische Ungleichung (98), *wobei das Gleichheitszeichen nur dann statt hat, wenn der eine Körper aus dem anderen durch Parallelverschiebung und Aehnlichkeitstransformation hervorgeht.*

Ist wie früher

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

Digitized by Google

so stellt $H+\varepsilon R$ eine Parallelfläche zu dem durch H definierten Körper im Abstande ε dar. Da nun offenbar die Oberfläche O des durch H definierten Körpers

$$O = \underset{\varepsilon=0}{L} \frac{V(H+\varepsilon R, H+\varepsilon R, H+\varepsilon R) - V(H, H, H)}{\varepsilon}$$

wird, so erhalten wir

$$O = 3V(H, H, R) = \tfrac{1}{2}\int (H, H)\, dk.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} V(H, R, R) &= \tfrac{1}{3}\int H\, dk \\ &= \tfrac{1}{6}\int (R, H)\, dk \\ &= \tfrac{1}{6}\int (\varrho_1 + \varrho_2)\, dk \\ &= \tfrac{1}{6}\int \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) d\omega, \end{aligned}$$

wenn ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungen der durch H definierten Fläche und $d\omega$ deren Oberflächenelement bedeutet; wir setzen

$$M = \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) d\omega$$

und bezeichnen dieses Integral als das Integral der mittleren Krümmung des konvexen Körpers.

Nehmen wir in den Ungleichungen (96), (97), (98) $G = R$ und nennen V das Volumen des Körpers, so erhalten wir

$$\text{(99)} \qquad \begin{cases} O^2 \geqq 3VM, \\ M^2 \geqq 4\pi O, \end{cases}$$

$$\text{(100)} \qquad O^3 \geqq 36\pi V^2$$

und in diesen Ungleichungen gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn der konvexe Körper aus der Einheitskugel durch Parallelverschiebung und Aehnlichkeitstransformation hervorgegangen ist d. h. wenn er selbst eine Kugel ist. Hiernach drücken die Ungleichungen (99), (100) gewisse leicht zu formulierende charakteristische Minimaleigenschaften der Kugel aus. Die Minkowskischen Ungleichungen (96), (98) sind hiernach Verallgemeinerungen solcher Eigenschaften, wie sie in einer Minkowskischen Geometrie gelten, wo statt der Kugel eine beliebige konvexe Fläche als Eichfläche genommen ist.

Digitized by Google

XX.

Anwendung auf ein Problem der Theorie der automorphen Funktionen.

In diesem Abschnitte will ich kurz an einem speziellen Beispiele zeigen, wie die orthogonalen Integralgleichungen auch in der Theorie der automorphen Funktionen erfolgreiche Anwendung finden können.

Die nächstliegende Verallgemeinerung der elliptischen Modulfunktion ist die einfachste automorphe Funktion mit reellen Substitutionen, die vier gegebene reelle Werte ∞, a, b, c ausläßt. Die Aufgabe, diese zu konstruieren, führt zu der allgemeineren, in der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den vier singulären Stellen ∞, a, b, c

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+(x+\lambda)y = 0, \quad \left\{\begin{matrix} p = (x-a)(x-b)(x-c) \\ a<b<c \end{matrix}\right\} \tag{101}$$

den Parameter λ so zu bestimmen, daß der Quotient zweier partikulärer Lösungen bei den Umläufen der komplexen Variabeln x um die singulären Punkte stets Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt.

Wir konstruieren nun diejenigen Potenzreihen, die bez. nach Potenzen von $x-a$, $x-b$, $x-c$ fortschreiten, bez. für $x=a$, $x=b$, $x=c$ den Wert 1 annehmen und bez. in der Umgebung dieser Stellen reguläre analytische Lösungen der Differentialgleichung (101) darstellen. Diese Potenzreihen sind, wie die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung lehrt, durch jene Forderungen eindeutig bestimmt; sie mögen bez. mit y_a, y_b, y_c bezeichnet werden. Die anderen Lösungen der Differentialgleichungen sind dann in der Umgebung jener Stellen $x=a$, $x=b$, $x=c$ bez. in der Gestalt

$$\begin{aligned} &Ay_a\log(x-a)+\mathfrak{P}_a(x-a), \\ &By_b\log(x-b)+\mathfrak{P}_b(x-b), \\ &Cy_c\log(x-c)+\mathfrak{P}_c(x-c) \end{aligned}$$

darstellbar, wo A, B, C Konstante sind und $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_b$, $\mathfrak{P}_c$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten bedeuten. Hieraus folgt, daß insbesondere die Lösung y_a, wenn wir x von a bis b zunehmen lassen, in der Nähe von b für $x<b$ die Darstellung

$$y_a = \beta y_b\log(b-x)+\mathfrak{Q}(x-b) \tag{102}$$

Digitized by Google

gestattet, wo β eine bestimmte Konstante, $\mathfrak{Q}$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten bedeutet und der Logarithmus reell zu nehmen ist. Nunmehr setzen wir die Lösung y_a reell über den Punkt b hinaus in der Weise fort, daß wir für $x > b$ unter y_a diejenige Lösung verstehen, die in der Nähe des Punktes b durch die Formel

$$y_a = \beta y_b \log(x-b) + \mathfrak{Q}(x-b)$$

gegeben ist. Sodann stellen wir die Frage, ob der Parameter λ in der Differentialgleichung (101) sich so bestimmen läßt, daß für denselben die in Rede stehende Lösung y_a, wenn x von b aus in den Punkt c hineinwandert, dort endlich bleibt d. h. bis auf einen konstanten Faktor mit y_c übereinstimmt.

Ehe wir diese Frage untersuchen, wollen wir ihre Bedeutung für das vorhin gestellte die reellen Substitutionen betreffende Problem feststellen. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei $\lambda = \lambda_1$ ein Parameterwert, für den die Lösung y_a die oben genannte Eigenschaft besitzt; diese Lösung y_a, die wir nunmehr kurz mit y bezeichnen wollen, hat dann die folgenden Eigenschaften: sie ist eine reelle stetige Funktion innerhalb des Intervalles

$$a \leqq x \leqq c$$

einschließlich der Grenzen, mit Ausnahme des Punktes $x = b$, in dessen Nähe sie sich in der Gestalt

$$y = \beta y_b \log|x-b| + \mathfrak{Q}_b(x-b) \tag{103}$$

darstellen läßt. Hierbei ist die Konstante β gewiß nicht Null. Denn in diesem Falle wäre y als Funktion der komplexen Variabeln x in den Punkten a, b, c regulär analytisch und könnte daher auch nicht im Unendlichfernen logarithmisch singulär sein; mit Rücksicht hierauf ergibt sich aber aus der Differentialgleichung, daß für y im Unendlichfernen die Entwicklung

$$y = \frac{C}{x} + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (C \neq 0)$$

gilt, d. h. y hätte den unendlichfernen Punkt zur Nullstelle und wäre demnach überall gleich der Konstanten Null, was nicht angeht.

Neben der Lösung y betrachten wir nun die bei $x = b$ reguläre Lösung y_b, die nach dem eben Bewiesenen gewiß von Cy, wo C eine Konstante ist, verschieden ausfällt; lassen wir einmal x von b nach a wandern, so wird in der Umgebung von $x = a$

$$y_b = \alpha y \, l(x-a) + \mathfrak{Q}_a(x-a), \qquad (x > a) \tag{104}$$

Digitized by Google

wenn andererseits x auf den Punkt c zu geht, haben wir

$$y_b = \gamma^* y_c l(c-x) + \mathfrak{Q}_c(x-c), \qquad (x < c)$$

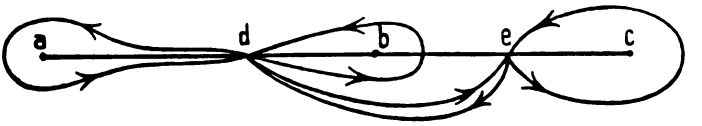
oder da y_c bis auf eine Konstante mit y übereinstimmen muß,

$$y_b = \gamma y l(c-x) + \mathfrak{Q}_c(x-c).$$

Nunmehr untersuchen wir den Quotienten

$$\eta(x) = \frac{y}{iy_b}$$

an einer zwischen a und b gelegenen Stelle d als Funktion der



komplexen Variabeln x: es zeigt sich dann, daß die analytische Funktion $\eta(x)$ beim Umlauf der Variabeln x um eine jede der Stellen a, b, c stets eine lineare Substitution mit reellen Koeffizienten erfährt. In der Tat, bezeichnen wir mit S_a das Ergebnis des Umlaufes um den Punkt a, so wird

$$S_a y = y;$$

überdies ist wegen (104)

$$S_a y_b = y_b + 2i\pi\alpha y$$

und folglich

$$S_a \eta = \frac{\eta}{1 - 2\pi\alpha\eta}.$$

Bezeichnet ferner S_b das Ergebnis des Umlaufes um den Punkt b, so wird wegen (102)

$$S_b y = y + 2i\pi\beta y_b;$$

überdies ist

$$S_b y_b = y_b$$

und folglich

$$S_b \eta = \eta + 2\pi\beta.$$

Nun lassen wir y von d aus einen Halbumlauf in positivem Sinne um b machen bis zu einem zwischen b und c gelegenen Punkte e, dann einen vollen Umlauf in positivem Sinne um c und alsdann einen Halbumlauf in negativem Sinne um b zum Punkte d zurück: dabei verwandelt sich der Reihe nach y in

Digitized by Google

$$y + i\pi\beta y_b,$$
$$y + i\pi\beta(y_b + 2i\pi\gamma y) = (1 - 2\pi^2\beta\gamma)\, y + i\pi\beta y_b,$$
$$(1 - 2\pi^2\beta\gamma)(y - i\pi\beta y_b) + i\pi\beta y_b,$$
$$= (1 - 2\pi_4^2\beta\gamma)\, y + 2i\pi^3\beta^2\gamma y_b.$$

Bei derselben Wanderung der Variabeln x wird aus y_b der Reihe nach

$$y_b,$$
$$y_b + 2i\pi\gamma y,$$
$$y_b + 2i\pi\gamma(y - i\pi\beta y_b) = 2i\pi\gamma y + (1 + 2\pi^2\beta\gamma)\, y_b$$

und folglich wird, wenn wir mit S_c das Ergebnis des Umlaufes um c bezeichnen:

$$S_c\eta = \frac{(1 - 2\pi^2\beta\gamma)\,\eta + 2\pi^2\beta^2\gamma}{-2\pi\gamma\eta + (1 + 2\pi^2\beta\gamma)}.$$

Wie wir sehen, haben die sämtlichen drei Substitutionen S_a, S_b, S_c reelle Koeffizienten und wir können auch leicht schließen, daß umgekehrt dieser Umstand, wonach der Quotient zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung (101) beim Umlauf der Variabeln um die singulären Stellen Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt, nur dann eintritt, wenn eine Lösung von den Eigenschaften wie y — Endlichkeit in a, c und logarithmisches Verhalten gemäß (103) in b — vorhanden ist.

Um die letztere Frage nach der Existenz der Funktion y in Angriff zu nehmen, beweisen wir zunächst, daß es gewisse Werte von λ gibt, für die die Lösung y_a der Differentialgleichung (101) nach ihrer reellen Fortsetzung gemäß (103) über b hinaus im Punkte c endlich bleibt. Wir beweisen zunächst, daß dieses Verhalten gewiß nicht für jeden Wert von λ stattfindet. In der Tat, nehmen wir dies an und bestimmen wir alsdann einen Wert von λ, für den y_a im Punkte b endlich bleibt — nach den Darlegungen meiner zweiten Mitteilung (diese Nachr. 1904, S. 231—232) am Beispiel der Kugelfunktion gibt es solcher Werte λ notwendig unendlich viele — so würde für einen solchen Wert von λ die Lösung y_a in allen drei Punkten a, b, c endlich sein, was nach dem vorhin Bewiesenen nicht zutreffen kann.

Es sei $\lambda = \varkappa\ (> -c)$ ein Wert von der Art, daß y_a, über b hinaus gemäß (103) fortgesetzt, in c nicht endlich bleibt: dann bleibt auch y_c, über b hinaus gemäß (103) fortgesetzt, nicht endlich. Aus dem Umstande, daß y_a, y_c Lösungen der Differentialgleichung

Digitized by Google

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + (x+\varkappa)y = 0$$

sind, folgt leicht die Konstanz des Ausdruckes

$$N = p\left(y_a \frac{dy_c}{dx} - y_c \frac{dy_a}{dx}\right)$$

im ganzen Intervall a bis c. Da aber als Folge unserer Annahme über $\varkappa$ der Quotient $\frac{y_a}{y_c}$ nicht konstant ist, so fällt die Konstante N von Null verschieden aus. Setzen wir nun

$$G(x, \xi) = \frac{1}{N} y_a(x) y_c(\xi), \qquad (x \leqq \xi)$$

$$= \frac{1}{N} y_a(\xi) y_c(x), \qquad (x \geqq \xi)$$

so wird

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi+\varepsilon} - \underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{dG}{dx}\right]_{x=\xi-\varepsilon} = \frac{-1}{p(\xi)}$$

und folglich ist $G(x, \xi)$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(y)$, wenn man als Randbedingungen das Endlichbleiben in a und c und reelle Fortsetzung über b hinweg gemäß (103) verlangt.

Nehmen wir $G(x, \xi)$ als Kern einer Integralgleichung zweiter Art, so führt die Anwendung meiner Theorie der orthogonalen Integralgleichungen zu den Sätzen:

Es gibt unendlich viele Werte λ (die Eigenwerte des Problems), so daß die Differentialgleichung (101) *eine Lösung (die zugehörige Eigenfunktion) besitzt, die bei reeller Fortsetzung über den Punkt b hinweg in den Punkten a und c endlich bleibt; für eben diese Werte λ ist der Quotient zweier Lösungen der Differentialgleichung eine analytische Funktion, die beim Umlauf der Variabeln x um die singulären Stellen der Differentialgleichung Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt.*

Die Kennzeichnung der unendlichvielen Eigenfunktionen durch Oszillationseigenschaften, sowie den Zusammenhang mit dem Problem der konformen Abbildung der nullwinkligen Kreisbogenvierecke mit Orthogonalkreis hat F. Klein[1]) untersucht.

1) Math. Ann. Bd. 64 (1907), S. 175.

Digitized by Google

XXI.

Eine zweiparametrige Randwertaufgabe (Kleins Oszillationstheorem).

Bei allen bisherigen Anwendungen meiner Theorie der orthogonalen und polaren Integralgleichungen handelte es sich um Randwertaufgaben für gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen, wobei jedesmal ein Parameter λ, sei es in der Differentialgleichung selbst, sei es in der Randbedingung als zu bestimmende Größe auftrat[1]). Im folgenden möchte ich an einem Beispiel zeigen, wie auch im Falle zweier zu bestimmender Parameter λ, μ die Theorie sich als anwendbar erweist.

Es seien zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorgelegt für y als Funktion von x und für η als Funktion von ξ von der Gestalt

$$\frac{d\left(p\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + (\lambda a + \mu b)y = 0, \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2) \tag{105}$$

$$\frac{d\left(\pi\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi} - (\lambda\alpha + \mu\beta)\eta = 0, \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2) \tag{106}$$

worin p, a, b Funktionen der unabhängigen Variabeln x und π, α, β Funktionen der unabhängigen Variabeln ξ bedeuten; diese Funktionen mögen sämtlich der Kürze halber als regulär analytisch angenommen werden und die Funktionen p, a; π, α mögen überdies die Bedingungen erfüllen:

$$p(x) > 0, \quad a(x) > 0, \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2) \tag{107}$$

$$\pi(\xi) > 0, \quad \alpha(\xi) > 0, \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2). \tag{108}$$

Alsdann multiplizieren wir die Differentialgleichung (105) mit $\alpha\eta$ und (106) mit ay; durch Addition erhalten wir für die Funktion

$$z(x, \xi) = y(x)\eta(\xi)$$

die partielle Differentialgleichung

$$\alpha(pz_x)_x + a(\pi z_\xi)_\xi + \mu(\alpha b - a\beta)z = 0; \tag{109}$$

1) Vgl. die zweite Mitteilung, diese Nachr. 1904, S. 222—259; die fünfte Mitteilung 1906, S. 473—480 und die sechste Mitteilung 1910, S. 355—419.

Digitized by Google

dieselbe ist wegen (107), (108) von elliptischem Typus und überdies, wie man leicht erkennt, sich selbst adjungiert. Da das zu dem Differentialausdruck

$$\alpha(pz_x)_x + \alpha(\pi z_\xi)_\xi \tag{110}$$

gehörige Dirichletsche Integral

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{\xi_1}^{\xi_2}(\alpha p z_x^2 + \alpha\pi z_\xi^2)\,dx\,d\xi$$

nur positiver Werte fähig ist, so besitzt auch die Greensche Funktion zu (110) definiten Charakter. Endlich ist

$$\alpha b - a\beta = 0$$

nur für eine endliche Anzahl analytischer Kurven erfüllt — es sei denn, daß

$$b(x) = Ca(x), \quad \beta(\xi) = C\alpha(\xi) \tag{111}$$

ausfällt, wo C eine geeignete Konstante bedeutet; dieser Fall (111) ist aber auszuschließen, da ja alsdann die beiden ursprünglichen Differentialgleichungen (105), (106) nur die e i n e Verbindung $\lambda + C\mu$ der beiden Parameter enthielten.

Wie diese Ueberlegungen zeigen, erfüllt die partielle Differentialgleichung (109), in der der lineare Parameter μ auftritt, alle Voraussetzungen für die Gültigkeit desjenigen Satzes, den ich in der fünften Mitteilung[1]) aufgestellt und mittelst meiner Theorie der polaren Integralgleichungen bewiesen habe. Diesem Satze zufolge besitzt die partielle Differentialgleichung (109) für unendlich viele Werte des Parameters μ, die Eigenwerte, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Lösungen, die zugehörigen Eigenfunktionen $z_1, z_2, \ldots$, deren jede innerhalb des durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &\leqq x \leqq x_2, \\ \xi_1 &\leqq \xi \leqq \xi_2 \end{aligned} \tag{112}$$

bestimmten Rechteckes stetig ist und auf den Seiten dieses Rechteckes verschwindet; nach diesen Eigenfunktionen ist die Entwicklung einer willkürlichen (gewissen Voraussetzungen unterworfenen) Funktion im Rechteck auf die Fouriersche Weise möglich.

Ich betrachte nun die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d\left(p\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \mu_k by + \lambda ay = 0, \tag{113}$$

1) Diese Nachrichten 1906, S. 474.

Digitized by Google

die aus (105) entsteht, wenn darin für μ der besondere Eigenwert μ_h von (109) eingesetzt wird. Da hierin $p(x)$ und $a(x)$ nach der Voraussetzung (107) positive Funktionen sind, so folgt auf Grund meiner Theorie der orthogonalen Integralgleichungen, daß (113) unendlich viele positive Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1^h, \quad \lambda_2^h, \dots \\ y(x) &= y_1^{(h)}(x), \quad y_2^{(h)}, \dots \end{aligned} \tag{114}$$

besitzt, wenn wir als Randbedingung das Verschwinden für $x = x_1$ und $x = x_2$ nehmen. Entwickeln wir insbesondere die zu μ_h gehörige Eigenfunktion z_h der partiellen Differentialgleichung (109), indem wir sie als Funktion von x betrachten, auf Fouriersche Weise nach den Funktionen $y_1^{(h)}$, $y_2^{(h)}$, ..., so ergibt sich

$$z_h(x, \xi) = \eta_1^{(h)}(\xi) y_1^{(h)}(x) + \eta_2^{(h)}(\xi) y_2^{(h)}(x) + \cdots, \tag{115}$$

wo allgemein

$$\eta_m^{(h)}(\xi) = \int_{x_2}^{x_1} a(x) z_h(x, \xi) y_m^{(h)}(x)\, dx \tag{116}$$

ist.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$L^{(h)}(y) \equiv \frac{d\left(p \frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \mu_h b y,$$

$$A^{(h)}(\eta) \equiv \frac{d\left(\pi \frac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi} - \mu_h \beta \eta;$$

dann ist die linke Seite der partiellen Differentialgleichung (109), genommen für $\mu = \mu_h$ identisch mit dem Ausdrucke

$$\alpha L^{(h)}(z) + a A^{(h)}(z);$$

da z_h eine Lösung von (109) ist, so haben wir

$$\alpha L^{(h)}(z_h) + a A^{(h)}(z_h) = 0$$

und, wenn wir mit $y_m^{(h)}$ multiplizieren und zwischen den Grenzen x_1 und x_2 nach x integrieren

$$\int_{x_1}^{x_2} \alpha L^{(h)}(z_h) y_m^{(h)}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} a A^{(h)}(z_h) y_m^{(h)}\, dx = 0.$$

Wenden wir hier auf das erste Integral die Greensche Formel an und führen wir sodann mittelst (116) die Funktion $\eta_m^{(h)}$ der Va-

Digitized by Google

riabeln ξ ein, so erhalten wir

$$\alpha \int_{x_1}^{x_2} L^{(h)}(y_m^{(h)})\, z_h\, dx + A^{(h)}\left(\int_{x_1}^{x_2} a z_h y_m^{(h)}\, dx \right) = 0$$

oder, indem wir berücksichtigten, daß

$$L^{(h)}(y_m^h) + \lambda_m a y_m^{(h)} = 0 \tag{117}$$

wird und alsdann vermittelst (116) die Funktion $\eta_m^{(h)}$ der Variabeln ξ einführen

$$A^{(h)}(\eta_m^{(h)}) - \alpha \lambda_m \eta_m^{(h)} = 0. \tag{118}$$

Da wegen (116) $\eta_m^{(h)}(\xi)$ eine für $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ verschwindende Funktion ist, so wird das Produkt

$$\eta_m^{(h)}(\xi)\, y_m^{(h)}(x)$$

eine auf den Kanten unseres Rechteckes (112) in der $x - \xi$-Ebene verschwindende Funktion; dieselbe genügt, wie aus (117), (118) unmittelbar folgt, der partiellen Differentialgleichung (109) für $\mu = \mu_h$. Andererseits besitzt diese Differentialgleichung gewiß nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen, nämlich die zu μ_h gehörigen Eigenfunktionen; mithin dürfen unter den Funktionen zweier Variabeln x, ξ

$$\eta_1^{(h)} y_1^{(h)},\ \eta_2^{(h)} y_2^{(h)}, \ldots$$

gewiß nur eine endliche Anzahl linear von einander unabhängiger Funktionen vorkommen. Da aber unter den Funktionen der Variabeln x

$$y_1^{(h)},\ y_2^{(h)}, \ldots$$

gewiß keine lineare Abhängigkeit statt hat, so folgt, daß nur eine endliche Anzahl von Funktionen der Variabeln ξ in der Reihe

$$\eta_1^{(h)},\ \eta_2^{(h)}, \ldots$$

von Null verschieden ist, und die Gleichung (115) zeigt mithin, daß eine jede zu λ_h gehörige Eigenfunktion z_h der partiellen Differentialgleichung (109) sich durch eine endliche Summe von Produkten der Gestalt

$$\eta^{(h)}(\xi)\, y^{(h)}(x)$$

darstellen läßt, wo jedes einzelne Produkt ebenfalls eine zu μ_h gehörige Eigenfunktion jener partiellen Differentialgleichung (113) ist. Wir denken uns nun in solcher Weise alle zu μ gehörigen Eigenfunktionen von (109) durch Produkte dargestellt und alsdann

Digitized by Google

aus den sämtlichen auftretenden Produkten solche ausgewählt, die von einander linear unabhängig sind und durch die die übrigen Produkte sich linear ausdrücken lassen; die so ausgewählten Produkte bilden nach dem eben Bewiesenen offenbar ein volles System von Eigenfunktionen der partiellen Differentialgleichung (109) für den Eigenwert μ_h.

Die wesentlichsten der bisher gefundenen Resultate fassen wir wie folgt zusammen.

Ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Gestalt (105), (106) *vorgelegt, für die die Bedingungen* (107), (108) *erfüllt sind und treten in denselben die zwei Parameter* λ, μ *nicht bloß in der Verbindung* $\lambda + C\mu$ *auf — unter* C *eine Konstante verstanden, — so existieren unendlichviele Paare von Werten* λ, μ, *für welche die Differentialgleichungen solche simultanen Lösungen* $y_h(x)$, $\eta_h(\xi)$ *haben, daß* $y_h(x)$ *an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles* $x_1 x_2$ *und ebenso* $\eta_h(\xi)$ *an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles* $\xi_1 \xi_2$ *verschwindet. Eine willkürliche (gewissen Voraussetzungen unterworfene) Funktion der Variabeln* x, ξ *ist in Fourierscher Weise in eine nach den Produkten* $y_h(x)\,\eta_h(\xi)$ *fortschreitende Reihe entwickelbar.*

Ist noch die Bedingung erfüllt, daß die Funktion $ab - a\beta$ innerhalb und auf dem Rande des Rechteckes nirgends verschwindet, so bedarf es zur Behandlung der partiellen Differentialgleichung (109) nur der Theorie der orthogonalen Integralgleichungen und es ergibt sich dann, daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion der Variabeln x, ξ in Fourierscher Weise nach den Produkten der Lösungen der simultanen Differentialgleichungen (105), (106) entwickelbar ist.

Wir betrachten zum Schluß als Beispiel die Lamésche Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{t-e_1} + \frac{1}{t-e_2} + \frac{1}{t-e_3}\right)\frac{dy}{dt} - \frac{At+B}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}\,y = 0.$$

Wie die Anwendung unseres Theorems zeigt, lassen sich hierin die Parameter A, B auf unendlichviele Weisen so bestimmen, daß die Differentialgleichung eine Lösung y besitzt, die an den Endpunkten eines gegebenen Intervalles $t_1 t_2$ verschwindet und zugleich eine solche, die an den Endpunkten eines anderen Intervalles $\tau_1 \tau_2$ verschwindet — ein Resultat, welches, wie wir sehen, im engsten Zusammenhange mit der Aussage des Kleinschen Oszillationstheorems steht. — Dabei sind die Intervalle $t_1 t_2$ und $\tau_1 \tau_2$ nur der Einschränkung unterworfen, daß sie einander ausschließen und

Digitized by Google

keinen der Punkte e_1, e_2, e_3 enthalten; dagegen ist es für die Gültigkeit meines Theorems nicht nötig anzunehmen, daß die Intervalle durch einen der Punkte e_1, e_2, e_3 getrennt sind. Um dies einzusehen, nehmen wir etwa

$$e_1 < e_2 < e_3 < t_1 < t_2 < \tau_1 < \tau_2$$

an, wählen dann einen zwischen t_2 und τ_1 gelegenen Punkt a und setzen einmal

$$t = a - x \qquad (x_1 = a - t_2, \quad x_2 = a - t_1)$$

und andererseits

$$t = a + \xi. \qquad (\xi_1 = \tau_1 - a, \quad \xi_2 = \tau_2 - a).$$

Nehmen wir endlich

$$\lambda = A, \quad \mu = aA + B$$

so entstehen aus der Laméschen Gleichung die folgenden:

$$\frac{d\left(p\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \frac{\lambda x - \mu}{4p} y = 0, \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2)$$

$$\frac{dp\frac{d\eta}{d\xi}}{d\xi} - \frac{\lambda\xi + \mu}{4\pi}\eta = 0, \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2)$$

wo

$$p = \sqrt{(a-x-e_1)(a-x-e_2)(a-x-e_3)},$$
$$\pi = \sqrt{(a+\xi-e_1)(a+\xi-e_2)(a+\xi-e_3)}$$

gesetzt ist. Da x und ξ in ihren Intervallen $x_1 x_2$ bez. $\xi_1 \xi_2$ stets positiv bleiben, so sind die Bedingungen unseres Theorems erfüllt und damit die Existenz unendlich vieler Parameterpaare A, B von der verlangten Beschaffenheit erwiesen.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Erste Mitteilung. 1904. S. 49—91.

Seite

I. Lösung des albgebraischen Problems 52
II. Lösung des transcendenten Problems 57
III. Das transcendente Problem, welches der orthogonalen Transformation der quadratischen Form in eine Quadratsumme entspricht . . . 62
IV. Entwickelung einer willkürlichen Funktion nach Eigenfunktionen . 71
V. Das Variationsproblem, das der algebraischen Frage nach den Minima und Maxima einer quadratischen Form entspricht . . . 78
VI. Ergänzung und Erweiterung der Theorie 81

Zweite Mitteilung. 1904. S. 213—259.

VII. Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung 214
VIII. Sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus 234
IX. Auftreten eines Parameters in der Randbedingung bei partiellen Differentialgleichungen 293

Dritte Mitteilung. 1905. S. 1—32.

X. Riemanns Problem in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen 1

Vierte Mitteilung. 1906. S. 157—227.

XI. Theorie der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form mit unendlich vielen Variabeln 158
XII. Simultanes System quadratischer Formen, die Hermitesche Form, die schiefsymmetrische Form und die Bilinearform mit unendlich vielen Variabeln 209

Fünfte Mitteilung. 1906. S. 439—480.

XIII. Die Integralgleichung mit unsymmetrischem Kern 439
XIV. Die Theorie der orthogonalen Integralgleichung 452
XV. Die Theorie der polaren Integralgleichung 462
XVI. Anwendung der Theorie der polaren Integralgleichungen auf Differentialgleichungen und auf Systeme von simultanen Differentialgleichungen 473

Digitized by Google

Sechste Mitteilung. 1910. S. 355—419.

		Seite
XVII.	Die Randwertaufgabe für ein System simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus . . .	356
XVIII.	Eine neue Methode der Zurückführung von Differentialgleichungen auf Integralgleichungen. Begriff der Parametrix	362
XIX.	Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche.	388
XX.	Anwendung auf ein Problem der Theorie der automorphen Funktionen.	407
XXI.	Eine zweiparametrige Randwertaufgabe (Kleins Oszillationstheorem)	412

Digitized by Google

Ueber nicht-reguläre Primzahlen und den Fermatschen Satz.

Von

E. Hecke in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 23. Juli 1910.

Es soll im Folgenden ein Satz bewiesen werden, der die Teilbarkeit der Klassenzahl des Körpers der l-ten Einheitswurzeln durch l betrifft; unter l ist dabei eine ungrade Primzahl zu verstehen. Diese Note entstand aus dem Bestreben, die Kummerschen Sätze über diesen Gegenstand auf rein arithmetischen Wege ohne Hinzuziehung von Reihenentwickelungen und Bernoullischen Zahlen zu beweisen. Es ergab sich dabei gleichzeitig die Möglichkeit, den ersten Teil des Fermatschen Satzes für eine neue Klasse von Exponenten l zu beweisen, die den Kummerschen Bedingungen nicht genügen. Ob es überhaupt Primzahlen mit diesen Eigenschaften gibt, darüber gibt allerdings die Methode keinen Aufschluß.

§ 1.

Die Klassenzahl H des Körpers K der l-ten Einheitswurzeln ist von Kummer in der Form

$$H = h_1 h$$

dargestellt worden, wobei h die Klassenzahl des reellen Unterkörpers k vom Grade $\frac{l-1}{2}$ bedeutet. h_1 ist eine ganze Zahl, die kurz als die Relativklassenanzahl von K in Bezug auf k bezeichnet sei. Ist l^a die höchste in h, l^{a_1} die höchste in h_1 aufgehende Potenz von l, so setzen wir

$$h = l^a q, \quad h_1 = l^{a_1} q_1.$$

Digitized by Google

Die Gruppe der q-ten Potenzen aller Idealklassen in k denken wir uns durch eine Basis dargestellt, so daß für jede Klasse c in k eine Aequivalenz

$$c^q \sim c_1^{x_1} c_2^{x_2} \dots c_e^{x_e} \quad (x_i = 0, 1, \dots l^{b_i} - 1)$$

gilt. Ist nun G die Gruppe derjenigen Idealklassen in K, deren Relativnorm in Bezug auf k hier der Hauptklasse angehört, so hat G den Grad h_1 und es ist jede q_1-te Potenz einer Klasse C aus G in der Form

$$C^{q_1} \sim C_1^{y_1} C_2^{y_2} \dots C_{e_1}^{y_{e_1}} \quad (y_i = 0, 1, \dots l^{b_i'} - 1)$$

darstellbar, wenn es e_1 Basisklassen gibt. Diese Gruppe sei G_1.

Der Satz, den ich beweisen werde, lautet dann:

Es ist stets

$$e_1 \geqq e.$$

Ist $e_1 = 0$, so folgt daraus auch $e = 0$, d. h. es kann h nur dann durch l teilbar sein, wenn auch h_1 durch l teilbar ist, was Kummer mit Hilfe seiner Methoden auf anderem Wege bewiesen hatte.

Beweis: Es ist zunächst das System der $q_1 q = q_2$-ten Potenzen aller Klassen in K darstellbar in der Form

$$C . c_1^{x_1} c_2^{x_2} \dots c_e^{x_e},$$

wobei C eine Klasse aus G_1 bedeutet[1]). Ist nun $e > 0$, so muß es einen in bezug auf k relativzyklischen Oberkörper vom Relativgrad l geben, der unverzweigt ist. Um ihn zu konstruieren, verfährt man nach Furtwängler[1]) folgendermaßen: Man adjungiert zu k die l-te Einheitswurzel $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$, d. h. in unserem Falle: Man geht in den zu k relativquadratischen Körper K über. Zu jeder Untergruppe der Klassengruppe von k, welche durch eine Kongruenz $x_i \equiv 0 \ (l)$ bestimmt ist, gehört dann im Sinne der Ausführungen von Furtwängler genau eine primäre Zahl ω_i in K von folgenden Eigenschaften:

1) Der Körper $K_i = (K, \sqrt[l]{\omega_i})$ ist relativ unverzweigt in bezug auf K.

2) Ist s die Relativsubstitution von K bezüglich k, d. h. $s = (\zeta : \zeta^{-1})$, so besteht eine Gleichung

$$s\omega_i = \omega_i^{-1} \beta^l,$$

wobei β eine gewisse Zahl aus K ist.

1) Furtwängler, Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper. Math. Ann., Bd. 63, p. 21—22.

Digitized by Google

3) Die e Körper K_i sind von einander unabhängig.

Daraus folgt zunächst, daß keines der ω_i eine Einheit ist. Wäre etwa ω_1 eine solche, so könnte man $\omega_1 = \zeta^u \varepsilon$ setzen, wo ε eine Einheit in k ist und aus der zweiten Eigenschaft der ω würde folgen

$$\zeta^{-u}\varepsilon = \zeta^{-u}\varepsilon^{-1}\beta^l$$
$$\varepsilon^2 = \beta^l$$

also wäre ε die l-te Potenz einer Einheit, dann aber würde der Relativkörper $K(\sqrt[l]{\zeta^u \varepsilon}) = K(\sqrt[l]{\zeta^u})$ nicht unverzweigt sein.

Ich setze also

$$\omega_i = \mathfrak{A}_i^l, \qquad (i = 1, 2, \ldots e)$$

wo die $\mathfrak{A}_i$ gewisse Ideale in K sind. Ich zeige nun, daß keines der $\mathfrak{A}_i$ einem Ideal in k äquivalent ist. Wäre etwa

$$\mathfrak{A}_i \sim \mathfrak{a} \quad (\mathfrak{a} \text{ in } k),$$

so könnte man setzen

$$\omega_i = \zeta^u \eta^l . \alpha,$$

wobei $\alpha = \mathfrak{a}^l$ eine Zahl in k ist, während η eine Zahl in K ist. Daraus schließt man ebenso wie oben, daß dann ω_i nicht die Eigenschaft 2) haben kann.

Man sieht ebenso, daß auch keine Aequivalenz

$$\mathfrak{A}_1^{m_1}\mathfrak{A}_2^{m_2}\ldots\mathfrak{A}_e^{m_e} \sim \mathfrak{a}$$

stattfinden kann, wo $\mathfrak{a}$ in k liegt und die Exponenten m_i nicht alle durch l teilbar sind. Denn dann würden die Körper $K(\sqrt[l]{\omega_i})$ nicht unabhängig sein.

Damit ist also gezeigt:

Es gibt mindestens e unabhängige Klassen

$$A_1, A_2, \ldots A_e$$

von der Art, daß ihre l-te Potenz und ihre Relativnorm in Bezug auf k in die Hauptklasse fällt und daß keine Aequivalenz

$$A_1^{m_1} . A_2^{m_2} \ldots A_e^{m_e} \sim c$$

bestehen kann, wo c eine Klasse von k und die m_i nicht alle durch l teilbar sind.

Nun ist die Gruppe G_1 mit den e_1 Basisklassen $C_1, C_2, \ldots C_{e_1}$ die größte Gruppe, welche diese Eigenschaften haben kann, und daraus ergibt sich sofort, daß $e_1 \geqq e$, w. z. b. w.

Digitized by Google

§ 2.

Anwendung auf den Fermatschen Satz.

Mit Hilfe des obigen Satzes werde ich nun die Richtigkeit folgender Behauptung nachweisen:

Es sei l eine solche ungrade Primzahl, daß für den Körper $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l}}\right)$ für die oben definierten Zahlen die Beziehung

$$e_1 = e$$

gilt. Dann gibt es in K keine drei ganze zu l prime Zahlen x, y, z, welche die Gleichung

$$x^l + y^l + z^l = 0$$

befriedigen.

Ist im besonderen $e_1 = 1$, so kann e nur 1 oder 0 sein.

Mit Rücksicht auf das zweite Resultat von Kummer[1]) und Hilbert gilt daher insbesondere der Satz:

Die Fermatsche Gleichung ist in ganzen zu l primen Zahlen des Körpers $K\left(e^{\frac{2\pi i}{l}}\right)$ sicher dann unlösbar, wenn der erste Faktor der Klassenzahl genau durch die erste Potenz von l teilbar ist.

Beweis: Wennn $e_1 = e$ ist, so besagt offenbar der Satz des vorigen Paragraphen, daß jede Klasse C von der Art, daß $C^l \sim 1$ und $C.sC \sim 1$ ist, sich durch die Klassen A_i darstellen läßt. Ist also $\mathfrak{A}$ ein Ideal aus einer solchen Klasse, so gilt für die Zahl $\mu = \mathfrak{A}^l$ immer eine Gleichung

$$\mu = \zeta^u \varepsilon \omega \eta^l,$$

wo ε eine reelle Einheit ist und ω ein Produkt von Potenzen der e Größen ω_i ist. Nun sei $\mathfrak{J}$ ein beliebiges Ideal in K, dessen l-te Potenz in die Hauptklasse fällt. Dann ist zunächst evident, daß für $\mathfrak{J}$ eine Aequivalenz gilt

$$\mathfrak{J} \sim Cc$$

wobei C eine Klasse der Gruppe G und c eine Klasse aus k mit der Eigenschaft $c^l \sim 1$ ist. Es ist also auch $C^l \sim 1$ und daher ist

$$\mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{J} = \alpha.\mathfrak{A}\mathfrak{a}.$$

Dabei ist $\mathfrak{A}$ ein Ideal mit den oben angegebenen Eigenschaften und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in k. Setzt man also $\mathfrak{J}^l$ gleich einer Zahl μ, so

1) Monatsberichte der Kgl. Preuß. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1857, p. 276.

Digitized by Google

folgt

$$\mu = \zeta^u \varepsilon \alpha^l \omega \varrho.$$

ϱ ist eine reelle Zahl nämlich $= \alpha^l$. Da nun ω eine primäre Zahl ist, so ist sie nach λ^l einer rationalen Zahl kongruent, wenn $\lambda = 1 - \zeta$ gesetzt wird. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Unter der Voraussetzung $e_1 = e$ gilt für jede zu l teilerfremde Zahl μ in K, welche die l-te Potenz eines Ideals ist, eine Kongruenz

$$\mu \equiv \zeta^u \varrho \pmod{\lambda^l},$$

wo ϱ eine Zahl des reellen Körpers k ist.

Damit ist aber alles Wesentliche geleistet. Ueberlegt man sich nämlich, welche Eigenschaften des Kreiskörpers beim Beweise des ersten Kummerschen Satzes bezüglich der Unlösbarkeit der Fermatschen Gleichung in ganzen zu l primen Zahlen gebraucht[1]) werden, so sieht man, daß es zur Durchführung des Beweises nur der Giltigkeit des eben formulierten Satzes bedarf und man unter dieser Voraussetzung den vollständigen Beweis dafür genau nach der Hilbertschen Methode liefern kann.

Ich möchte noch bemerken, daß der in § 1 bewiesene Satz über die Klassenzahl ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes ist, dessen Beweis ich in einer anderen Mitteilung geben werde.

---

1) Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, p. 519—521 von Gleichung 189 ab.

Digitized by Google

Die Fortpflanzung von Strömen in Kabeln mit unvollkommenem Dielektrikum.

Von

Karl Willy Wagner.

(Mitteilung aus dem Kaiserl. Telegraphen-Versuchsamt.)

Vorgelegt in der Sitzung der Gesellschaft vom 9. Juli 1910 von Eduard Riecke.

1. Bisherige Untersuchungen.

In der ersten, von W. Thomson ausgeführten Untersuchung über den Verlauf von Kabelströmen[1]) wird das Kabel als gestreckter Leiter mit dem über die Länge gleichmäßig verteilten Ohmschen Widerstande R und ebenso verteilter Kapazität C angesehen. Der Einfluß der Selbstinduktivität L wird vernachlässigt; desgleichen auch der Einfluß der Ableitung A, das heißt, der durch das Isoliermaterial fließenden Leitungsströme. Untersuchungen, bei denen alle 4 Leitungskonstanten berücksichtigt werden, hat dann O. Heaviside angestellt[2]); wir verdanken ihm zahlreiche sehr schöne Resultate; im allgemeinen Falle liefert indes seine eigenartige symbolische Methode nur überaus komplizierte und unübersichtliche Reihenentwicklungen, mit denen praktisch wenig anzufangen ist. Einen weiteren Fortschritt brachten die Untersuchungen von Poincaré, die freilich nur den Fall eines verlustlosen Dielektrikums ($A = 0$) betreffen[3]). Aus ihnen kann der Schluß gezogen werden[4]), daß die Thomsonsche Theorie die Vorgänge in solchen Punkten richtig wiedergibt, die von der Störungsstelle (Kabelanfang) weit entfernt sind, also insbesondere am

1) Lond. Roy. Soc. Proc. 1855, Math. and phys. papers II, S. 61.

2) Electromagnetic Theory Bd. II, London 1899.

3) L'Éclairage électr. Bd. **40**, S. 121, 161, 201, 241; 1904. Vergl. auch Compt. rend. **117**, S. 1027; 1893.

4) K. W. Wagner, Elektrot. Zeitschr. 1910, Heft 7, 8.

Digitized by Google

fernen Kabelende, was ja auch durch die Erfahrung bestätigt wird[1]). In der Nähe des Kabelanfangs und auf kurzen Kabeln überhaupt gilt dagegen die Näherungstheorie, die wohl die Dämpfung, nicht aber die Verzerrung der Wellen berücksichtigt[2]). Die aus der Poincaréschen Theorie zu ziehenden Schlüsse sind von großer Tragweite für die Schnelltelegraphie und Telephonie über lange Kabel, und es hat darum besonders vom praktischen Standpunkt die Frage Interesse, wieweit die Poincarésche Theorie auf wirkliche Kabel anwendbar ist, in denen die Ableitung A nicht null ist. Man darf nicht vergessen, daß für die Telephonie nicht der aus den Gleichstrommessungen folgende sehr kleine Wert von A maßgebend ist. Bei den hier auftretenden raschen Stromwechseln überwiegen die durch dielektrische Hysteresis entstehenden Verluste im Isoliermaterial weitaus die dort durch Leitungsströme hervorgebrachte Joulesche Wärme[3]); man hat dann in den Gleichungen einen entsprechend größeren Wert von A einzusetzen, dessen Einfluß auf die Dämpfung besonders bei Kabeln mit erhöhter Selbstinduktivität (nach Pupins Vorschlag oder durch eine Bewicklung der Kupferseele mit Eisendraht) sehr fühlbar ist[4]). Die Frage nach dem Einfluß von A auf den Verlauf der Ströme hat darum auch praktisch Bedeutung. Nun ist es gewiß nicht genau richtig, in den Gleichungen einfach einen konstanten Wert A einzuführen, da doch die dielektrischen Verluste von der Frequenz abhängen. Es ist aber der einzig gangbare Weg, diese Verluste überhaupt zu berücksichtigen, und man wird sich, wie in allen ähnlich liegenden Fällen, von der Wahrheit nicht sehr weit entfernen, wenn man den Wert A einführt, der der mittleren Frequenz des Vorgangs entspricht. In der erwähnten Abhandlung macht Poincaré einige Andeutungen, wie sich wohl das allgemeine Problem in Angriff nehmen lasse. Man wird aus dem folgenden ersehen, daß sich in der Tat bei der Lösung des allgemeinen Falles manche der Poincaréschen Betrachtungen nutzbringend verwerten lassen; die größere Allgemeinheit bringt es freilich mit sich, daß stellenweise umfangreichere mathematische Hilfsmittel erforderlich werden.

---

1) { Devaux-Charbonnel, L'Éclairage électrique **31**, S. 124, 171; 1902.
K. W. Wagner, Phys. Zeitschr. **10**, S. 865; 1909.

2) K. W. Wagner, „Elektromagn. Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln", Leipzig 1908.

3) Bela Gati, „Elektrot. u. Maschinenbau", Wien 1908, Heft 13.

4) F. Breisig, Elektrot. Zeitschr. 1901, S. 1029; 1908, S. 586. F. Lüschen, Elektrot. Zeitschr. 1908, S. 1105.

Digitized by Google

2. Die allgemeinen Gleichungen.

Sind R, L, A, C die Werte der schon genannten Leitungskonstanten der Längeneinheit, v die Spannung zwischen Hin- und Rückleitung, i der Strom, x der Ort, t die Zeit, so gilt

$$Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

$$Av + C\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} \tag{2}$$

Man ersieht z. B. aus (2), daß sich v und i aus einer einzigen Funktion φ ableiten lassen, wenn man setzt

$$-i = A\varphi + C\frac{\partial \varphi}{\partial t}; \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{3}$$

Damit dann auch (1) erfüllt sei, muß φ der Differentialgleichung genügen

$$RA\varphi + (RC + LA)\frac{\partial \varphi}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{4}$$

Es ist stets möglich, aus dieser Gleichung eine andere mit lauter positiven Koeffizienten und fehlendem ersten Gliede abzuleiten, die also die Form der Telegraphengleichung[1]) im engeren Sinne hat. Man setze nämlich

$$\text{a) für } RC > AL \quad \varphi = e^{-\frac{A}{C}t}\psi \tag{5}$$

$$\text{b) für } RC < AL \quad \varphi = e^{-\frac{R}{L}t}\psi$$

Dann ergibt sich im Fall (a), den wir im folgenden voraussetzen, weil er die größere praktische Bedeutung hat,

$$(RC - LA)\frac{\partial \psi}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

wofür wir mit

$$R' = R - A\frac{L}{C} \tag{6}$$

auch schreiben können

$$R'C\frac{\partial \psi}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{7}$$

---

1) Vergl. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen II, § 128, S. 319. Braunschweig 1901.

Digitized by Google

Diese Gleichung geht durch die Substitution

$$\Psi = \frac{R'^2}{4}\frac{C}{L}\psi; \quad X = \frac{R'}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}x; \quad T = \frac{R'}{2L}t \tag{8}$$

über in

$$2\frac{\partial \Psi}{\partial T} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \tag{9}$$

Durch diese Transformation ist also die Zurückführung aller Leitungen mit beliebigen R', C, L auf eine einzige mit passend gewählter Längeneinheit und Zeiteinheit geleistet.

Mit Hilfe von (3), (5) und (8) ergibt sich nun

$$v = e^{-\frac{A}{C}t}\frac{2}{R'}\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\partial \Psi}{\partial X}; \quad i = -\frac{2}{R'}e^{-\frac{A}{C}t}\frac{\partial \Psi}{\partial T}$$

Es empfiehlt sich, durch die Substitution

$$V = \frac{R'}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}v, \quad J = \frac{R'}{2}i \tag{8a}$$

diesen Gleichungen die einfache Form zu geben

$$V = e^{-\gamma T}\frac{\partial \Psi}{\partial X} \tag{10}$$

$$J = -e^{-\gamma T}\frac{\partial \Psi}{\partial T} \tag{11}$$

mit

$$\gamma = \frac{2AL}{RC - AL} \tag{12}$$

Die transformierten Variabeln sind also durch die einfacheren Gleichungen (9), (10), (11) verknüpft, in denen nur die eine, von der Leitung abhängige Konstante γ vorkommt.

3. Problemstellung; allgemeiner Fall.

Es soll der Stromverlauf berechnet werden, der sich ergibt, wenn eine sehr lange (wir sagen „unendlich lange“) Leitung, die bis zum Augenblick $T = 0$ strom- und spannungslos war, in diesem Augenblick an ihrem Anfang $X = 0$ der Wirkung einer elektromotorischen Kraft $f(T)$ ausgesetzt wird. Wir werden uns später auf den Fall beschränken $f(T) = 1$, der die Grundlage zur Behandlung des allgemeinen Falles liefert, weil sich aus ihm schon

Digitized by Google

alles praktisch wichtige ablesen läßt. Zunächst jedoch schreiben wir allgemein vor

$$V = f(T) \quad \text{für } X = 0, \tag{13}$$

wo $f(T)$ irgendeine Funktion sein kann.

Die Lösung beruht auf der Superposition von einfach harmonischen Lösungen. Sei

$$f(T) = e^{jqT} \qquad (j = \sqrt{-1},\ q \text{ reell}) \tag{14}$$

und ist der Zustand überall rein periodisch geworden, so kann man wegen (9) den Ansatz machen

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{jp} e^{\gamma T + j(qT + pX)} \tag{15}$$

(13) ist dann von selbst erfüllt. Aus (9) ergibt sich mit (15) für p die Gleichung

$$2(\gamma + jq) + (\gamma + jq)^2 = -p^2 \tag{16}$$

Von den hierdurch bestimmten beiden Werten von p bezeichnen wir von nun an denjenigen kurz mit p, dessen reeller Anteil für positives q negativ ist.

$$\mathfrak{Re}(p) < 0 \tag{16a}$$

Er allein ergibt eine von der Störungsstelle $X = 0$ ausgehende Welle, wie sie im vorliegenden physikalischen Problem nur auftreten kann.

Aus (16) folgt noch in Verbindung mit (16a)

$$p = -q, \text{ wenn } |q| \text{ sehr groß} \tag{16b}$$

Diese Beziehung ist für das spätere von Bedeutung.

Ist $f(T)$ eine beliebige Funktion, so spielt sich, wie Fourier gelehrt hat, der Vorgang ebenso ab wie ein periodischer Vorgang, der einer periodischen Funktion $f(T)$ mit unendlich großer Periodendauer entspricht. Faßt man $f(T)$ in dieser Weise auf, so ist

$$\left\{\begin{aligned} f(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(q)\, dq\, e^{jqT} \\ \text{mit} \quad \Theta(q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-jq\tau}\, d\tau \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Digitized by Google

Der Teilschwingung $\Theta(q)\,dq\,e^{jqT}$ entspricht nach (15) das Funktionselement

$$d\Psi = \frac{\Theta(q)\,dq}{jp} e^{\gamma T + j(qT + pX)}$$

Daher

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi jp} e^{\gamma T + j(qT + pX)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-jq\tau}\, d\tau$$

oder durch Umkehrung der Integrationsfolge

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{\gamma\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi jp} e^{j[q(T-\tau) - j\gamma(T-\tau) + pX]} \tag{18}$$

Wir wollen nun das zweite Integral bestimmen, für das wir mit der Bezeichnung

$$T - \tau = T' \tag{18a}$$

auch schreiben können

$$F(T', X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi jp} e^{j[(q - j\gamma)T' + pX]} \tag{18b}$$

Die Betrachtungen sind denen ganz ähnlich, durch die Poincaré zur Berechnung des entsprechenden Integrals im Falle $A = 0$ gelangt ist. Im Integral (18b) soll sich q längs der Axe der reellen Zahlen von $-\infty$ nach $+\infty$ bewegen. Wir betrachten nun q als komplexe Variable und definieren p nach wie vor durch (16), kümmern uns aber nur um den durch (16b) bestimmten Zweig von p, um mit dem früheren in Übereinstimmung zu bleiben. In Abb. 1 sei O der Nullpunkt der Ebene der komplexen Variabeln q, $\overline{AB}$ die Axe der reellen Zahlen, $ACBD$ ein Kreis um O als Mittelpunkt mit sehr großem Radius. Dann ist nach (18b) F der Grenzwert, den das längs der Axe der reellen Zahlen genommene

$$\int_{AOB}$$

annimmt, wenn der Kreis größer und größer wird. Der Integrand ist in der ganzen q-Ebene regulär, außer in den Nullstellen von p, d. h. nach (16) in den Punkten

$$q_1 = j\gamma; \quad q_2 = j(2 + \gamma) \tag{19}$$

Digitized by Google

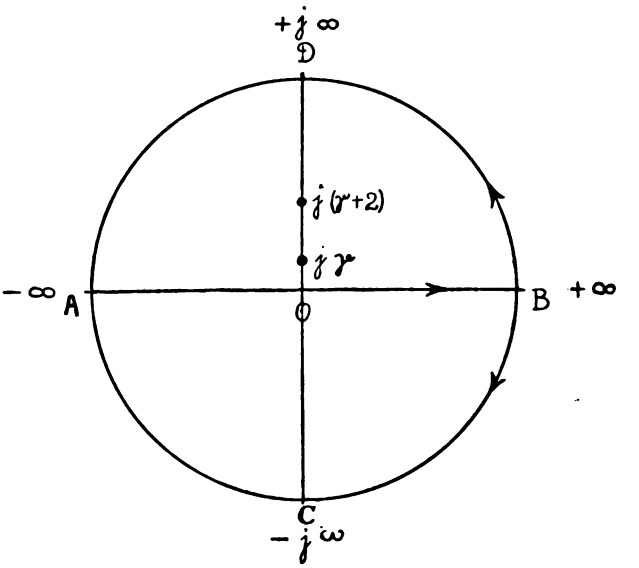


Abb. 1.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Es sei $X > T'$. Da der Integrand in (18b) für große $|q|$ nach (16b) die einfache Form

$$-\frac{dq}{2\pi jq} e^{jq(T'-X)} \tag{18c}$$

annimmt, so verschwindet wegen der Exponentialfunktion er selbst und sein längs des Halbkreises BCA genommenes Integral, wenn der Kreis größer und größer wird. Es ist darum

$$\int_{AOB} = \int_{AOB} + \int_{BCA} = \int_{AOBCA} = 0,$$

weil der geschlossene Weg $AOBCA$ ein Gebiet umschließt, in dem der Integrand überall eine reguläre analytische Funktion ist. Es ist also

$$F(T', X) \equiv 0 \text{ für } X > T' \tag{20}$$

b) Es sei $T' > X$. Dann verschwindet der Ausdruck (18c) in der Grenze auf dem Halbkreis BDA, ebenso sein längs dieses Weges genommenes Integral. Daher ist

$$\int_{AOB} = \int_{AOB} + \int_{BDA} = \int_{AOBDA}$$

Dieses Integral verschwindet nicht identisch, da der Integrations-

Digitized by Google

weg die beiden singulären Punkte q_1, q_2 umschließt; es behält aber seinen Wert bei, wenn der Integrationsweg irgendwie abgeändert wird, sofern nur der alte Weg in den neuen ohne Überschreitung der singulären Punkte stetig übergeführt werden kann. Es ist darum auch

$$\int_{AOB} = \int_{ACBDA}$$

Hier ist der Integrationsweg ein Kreis von sehr großem Radius. Zur Berechnung dieses Integrals führen wir anstelle der beiden Variabeln q, p neue Variabeln ϱ, μ durch die Definition ein

$$(21) \qquad \begin{cases} [q - j(\gamma+1)]\,T' + pX = \varrho\sqrt{X^2 - T'^2} \\ pT' + [q - j(\gamma+1)]\,X = \mu\sqrt{X^2 - T'^2} \end{cases}$$

Die zwischen q und p bestehende Beziehung (16) geht für die neuen Größen über in

$$(21a) \qquad \varrho^2 - \mu^2 = 1$$

Da wir es mit demjenigen Zweig von p zu tun haben, der für große $|q|$ der Bedingung (16b) genügt, so folgt aus (21), daß wir

$$(21b) \qquad \mu = -\sqrt{\varrho^2 - 1}$$

zu setzen haben, wenn der Quadratwurzel an sich das positive Vorzeichen zugeordnet sein soll. Aus (16), (21), (21a) folgt noch

$$(21c) \qquad \frac{d\varrho}{\mu} = \frac{dq}{p} = \frac{dp}{q - j(\gamma+1)}$$

Hiermit wird aus dem Integral (18b)

$$F(T'X) = -\int \frac{d\varrho}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}}\, e^{j\varrho\sqrt{X^2 - T'^2} - T'}$$

Der Integrationsweg war in der q-Ebene der große Kreis $ACBDA$ (Abb. 1); nach (21) ist für große $|q|$ einfach $\varrho = q \cdot \text{const.}$, daher ist auch in der ϱ-Ebene der Integrationsweg ein Kreis um den Nullpunkt von großem Radius (Abb. 2). Er umschließt die beiden einzigen singulären Punkte des Integranden, $\varrho = 1$ und $\varrho = -1$. Jeder andere Weg, der diese Punkte ebenfalls einfach umschließt, liefert das gleiche Integrationsergebnis, z. B. der in der Abb. 2 gezeichnete Weg 2. Läßt man die Kreise um die beiden singulären Punkte kleiner und kleiner werden, so strebt das Integral dem Werte zu

Digitized by Google

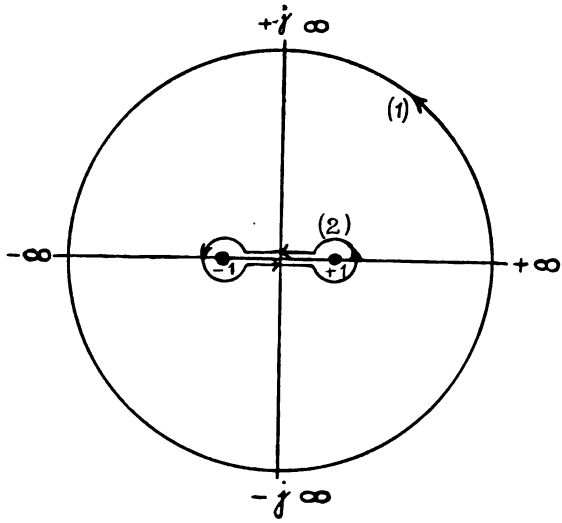


Abb. 2.

$$F(T', X) = -e^{-T'} \int_{-1}^{+1} \frac{d\varrho}{\pi\sqrt{1-\varrho^2}} e^{j\varrho\sqrt{X^2-T'^2}},$$

wobei die Axe der reellen Zahlen als Integrationsweg gedacht ist. Nun ist

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} e^{j\varrho z} = J_0(z),$$

$$\text{wo} \quad J_0(z) = 1 - \frac{(\frac{1}{2}z)^2}{1!^2} + \frac{(\frac{1}{2}z)^4}{2!^2} - \frac{(\frac{1}{2}z)^6}{3!^2} \cdots$$

die bekannte Besselsche Funktion von der Ordnung null bedeutet. Folglich ist

$$(22) \qquad F(T', X) = -e^{-T'} J_0\sqrt{X^2-T'^2} \quad \text{für} \quad T' > X$$

Da $T' > X$ nach (18a) nichts anderes bedeutet als

$$\tau < T - X,$$

so ergibt sich mit (20) und (22) aus (18):

$$(23) \qquad \Psi = -\int_{-\infty}^{T-X} f(\tau)\, e^{\gamma\tau}\, d\tau \;\; e^{-(T-\tau)} J_0\sqrt{X^2-(T-\tau)^2}$$

Digitized by Google

Der Spezialfall $f(\tau)e^{\gamma\tau} = 1$ ist besonders interessant. Für diesen ergibt sich nämlich nach (23), (10) und (11) ein von der speziellen Wahl der Leitungskonstanten ganz unabhängiger Strom- und Spannungsverlauf, wenn man von der veränderten Dämpfung absieht, und wenn man nach (8) und (8a) passende Einheiten für Länge, Zeit, Strom und Spannung einführt. Dieser Verlauf ist, wie man sieht, wenn man $\gamma = 0$ setzt, derjenige, der sich für das Kabel ohne Ableitung ergibt, wenn dieses an eine konstante Spannung angelegt wird ($f(\tau) = 1$). Im allgemeinen Fall soll die Spannung

$$f(\tau) = e^{-\gamma\tau}$$

sein. Zu diesem Ergebnis ist auf anderm Wege bereits O Heaviside[1]) gelangt.

4. Diskussion der Lösung.

Die Bedeutung der Lösung (23) erkennt man am leichtesten, wenn man die Ausbreitung eines einfachen Stromstoßes betrachtet. Dieser soll dadurch hervorgebracht werden, daß am Kabelanfang im Moment $T = 0$ während sehr kurzer Zeit (2ε) eine sehr große Spannung wirkt. Es verschwindet also $f(\tau)$ identisch, außer bei $\tau = 0$, wo $f(\tau)$ sehr groß ist, jedoch so, daß

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\tau)\,d\tau = 1$$

ist. Hiermit ergibt sich aus (23)

$$\begin{aligned} &\Psi \equiv 0 \quad \text{für } T < X \\ &\Psi = -e^{-T} J_0 \sqrt{X^2 - T^2} \quad \text{für } T > X. \end{aligned} \tag{24}$$

Das heißt, am Punkt X geschieht bis zum Moment $T = X$ überhaupt nichts; in diesem Augenblick hat die Störung den Punkt X erreicht und verläuft von da ab nach der zweiten Gl. 24.

$T = X$ heißt nach (8)

$$x = \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

1) Electromagnetic Theory, Bd. II, § 367, S. 306.

Digitized by Google

hängt somit weder vom Leitungswiderstande R, noch von der Ableitung A ab, sondern hat genau denselben Wert, wie auf einer vollkommen verlustlosen Leitung.

In Gl. (24) kommen die Leitungskonstanten nicht explizite vor; das heißt, der Verlauf eines Stromstoßes auf einem Kabel mit Ableitung kann aus demjenigen für ein Kabel ohne Ableitung einfach dadurch entwickelt werden, daß man durch den Exponentialfaktor $e^{-\gamma T}$ (Gl. 10, 11) die vermehrte Dämpfung berücksichtigt und dann die Einheiten für Länge, Zeit, Strom und Spannung der Transformation (8), (8a) entsprechend abändert. Das ist ein sehr merkwürdiges und wichtiges Ergebnis.

Hier hat auch die Bemerkung Interesse, daß die durch einen scharfbegrenzten Impuls hervorgebrachte Welle wohl eine scharfbegrenzte Vorderfront besitzt (und nur dieser Umstand gibt uns überhaupt die Möglichkeit, von einer endlichen, wohlbestimmten Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu reden), aber keine begrenzte Rückfront; denn für $T > X$ hat Ψ nach der zweiten Gl. (24) für jedes T einen von null verschiedenen, endlichen Wert. In dieser Hinsicht steht der allgemeine Fall in der Mitte der beiden Grenzfälle des verlustlosen ($A = 0$, $R = 0$) oder verzerrungsfreien ($A/C = R/L$) und des induktionslosen ($L = 0$) Kabels. Im verlustlosen und verzerrungsfreien Kabel hat die Welle auch eine scharfbegrenzte Rückfront; im induktionslosen Kabel ist keine der Fronten scharf, die Störung verbreitet sich ebenso wie eine Wärmewelle, bei der man auch nicht sagen kann, daß sich die Störung in einem bestimmten Abstand von der Störungsquelle erst nach Ablauf einer gewissen Zeit bemerkbar mache. Aus unsern Formeln kommt das so heraus, daß im Falle 1 $\gamma = \infty$ wird, und der Punkt $X = 0$, $T = 0$ allein alle Werte für die elektrischen Größen liefert; im zweiten Falle wird $v = \infty$. Der wirkliche Verlauf der Störung ergibt sich aber in diesen Grenzfällen auf dem unmittelbaren Wege über die entsprechend vereinfachten Differentialgleichungen weit einfacher als durch Spezialisierung[1]) der allgemeinen Lösung.

5. Der Stromverlauf beim Anlegen einer konstanten Spannung.

Wenn im Moment $T = 0$ eine konstante Spannung, sagen wir $V = 1$, an den Kabelanfang $X = 0$ angelegt wird, so gilt

1) Diese ist für den Fall $A = 0$, $L = 0$ z. B, durchgeführt in der Elektrot. Zeitschr. 1910, S. 192, § 4 und 5; denn kleines L heißt nach (8) großes X, wie es dort vorausgesetzt ist.

Digitized by Google

$$\begin{aligned} f(\tau) &= 0 \text{ von } \tau = -\infty \text{ bis } \tau = 0 \\ f(\tau) &= 1 \text{ von } \tau = 0 \text{ bis } \tau = +\infty \end{aligned} \tag{26}$$

Setzen wir dies in (23) ein, so ergibt sich

$$\Psi = -e^{+\gamma T}\int_0^{T-X} d\tau\, e^{-(1+\gamma)(T-\tau)}\, J_0\sqrt{X^2-(T-\tau)^2} \tag{27a}$$

$$\text{für } T > X;$$

während nach der ersten Gl. (26) für

$$T < X \quad \Psi \equiv 0$$

wird, da wegen der oberen Grenze in diesem Falle nur über negative τ integriert wird, für welche $f(\tau)$ identisch verschwindet. Nach Gl. (11) bestimmt sich die Stromstärke zu

$$J = -e^{-\gamma T}\frac{\partial \Psi}{\partial T}.$$

Schreibt man

$$\Psi = -e^{+\gamma T} H$$

mit

$$H = \int_0^{T-X} d\tau\, e^{-(1+\gamma)(T-\tau)} J_0\sqrt{X^2-(T-\tau)^2}, \tag{28}$$

so ergibt sich

$$J = \gamma \cdot H + \frac{\partial H}{\partial T}. \tag{29}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} &= e^{-(1+\gamma)X} + \int_0^{T-X} d\tau \frac{\partial}{\partial T}\left\{e^{-(1+\gamma)(T-\tau)} J_0\sqrt{X^2-(T-\tau)^2}\right. \\ &= e^{-(1+\gamma)X} - \int_0^{T-X} d\tau \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{e^{-(1+\gamma)(T-\tau)} J_0\sqrt{X^2-(T-\tau)^2}\right. \\ &= e^{-(1+\gamma)T} J_0\sqrt{X^2-T^2} \end{aligned}$$

Daher

$$J = \gamma \cdot H + e^{-(1+\gamma)T} J_0\sqrt{X^2-T^2} \tag{30}$$

$$\text{für } T > X.$$

Digitized by Google

Für $T < X$ verschwindet dagegen J identisch; die Störung hat eben dann den Punkt X noch nicht erreicht. Mit $A = 0$ wird $\gamma = 0$, und es bleibt für den Strom nur der Ausdruck

$$J = e^{-T} J_0 \sqrt{X^2 - T^2}, \tag{30a}$$

der von früher her bekannt ist.

Wir haben nun noch das Integral H (Gl. 28) zu berechnen. Dieses Integral scheint sich nicht in geschlossener Form durch elementare und Besselsche Funktionen ausdrücken zu lassen. Es gibt aber verschiedene Wege, es durch unendliche Reihen auszudrücken, die nach Besselschen Funktionen erster Art von steigender Ordnungszahl fortschreiten. Eine sehr elegante Entwicklung, die noch dazu den Vorzug hat, für alle X und T konvergent zu sein, verdanke ich Herrn Schafheitlin. Wenn man der Kürze wegen

$$T - \tau = u \tag{31}$$

setzt, so wird

$$H = \int_X^T du\, e^{-(1+\gamma)u} J_0 \sqrt{X^2 - u^2}.$$

Nun ist aber

$$J_0 \sqrt{X^2 - u^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^{2p}}{2^p \Pi(p)} \frac{J_p(X)}{X^p}.$$

Π ist die bekannte Gaußsche Funktion (Gammafunktion); hier, wo p ganzzahlig ist, ist einfach

$$\Pi(p) = p!$$

Somit ergibt sich

$$H = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2X)^p \Pi(p)} J_p(X) \int_X^T u^{2p} e^{-(1+\gamma)u} du,$$

wofür man mit

$$(1+\gamma)u = v$$

auch schreiben kann

$$H = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_p(X)}{(2X)^p \Pi(p) (1+\gamma)^{2p+1}} \int_{(1+\gamma)X}^{(1+\gamma)T} v^{2p} e^{-v} dv. \tag{32}$$

Bevor wir weitergehen, soll die Konvergenz dieser Reihe bewiesen werden. Das Integral in (32) ist sicher kleiner als

Digitized by Google

$$\int_0^\infty v^{2p} e^{-v}\, dv = \Pi(2p)$$

Da X und γ wesentlich positive Größen sind, so ist, wenn wir das p-te Glied der Reihe mit a_p bezeichnen,

$$a_p < \frac{\Pi(2p)}{\Pi(p)} \frac{|J_p(X)|}{(2X)^p (1+\gamma)^{2p+1}}$$

Nun gilt

$$|J_p(X)| < \frac{1}{\Pi(p)} \left(\frac{X}{2}\right)^p \text{ und } \Pi(2p) = \frac{2^{2p}\, \Pi(p)\, \Pi(p-\tfrac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}.$$

Daher

$$a_p < \frac{\Pi(p-\tfrac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\, \Pi(p) (1+\gamma)^{2p+1}}.$$

Da nun weiter

$$\frac{\Pi(p-\tfrac{1}{2})}{\Pi(p)} < \frac{1}{\sqrt{p}}$$

ist, so wird

$$a_p < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{p}\, (1+\gamma)^{2p+1}}.$$

γ ist positiv; die Reihe konvergiert also, weil alle ihre Glieder von $p = 2$ ab kleiner sind, als die der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\gamma)^{2p+1}}.$$

Nur für $\gamma = 0$ versagt der Konvergenzbeweis; er ist aber in diesem Falle auch überflüssig, da das Glied γH in (30) ganz fortfällt.

Die weitere Berechnung von (32) gestaltet sich recht einfach. Weil p ganzzahlig ist, so findet man durch wiederholte partielle Integration

$$\int_{(1+\gamma)X}^{(1+\gamma)T} v^{2p} e^{-v}\, dv = e^{-(1+\gamma)X} \sum_{\lambda=0}^{2p} \frac{\Pi(2p)}{\Pi(\lambda)} (1+\gamma)^\lambda X^\lambda - e^{-(1+\gamma)T} \sum_{\lambda=0}^{2p} \frac{\Pi(2p)}{\Pi(\lambda)} (1+\gamma)^\lambda T^\lambda$$

Die Summen sind nichts anderes als die mit dem $2p$-ten Gliede

Digitized by Google

abbrechenden Potenzreihen für $e^{(1+\gamma)X}$, bezw. $e^{(1+\gamma)T}$, multipliziert mit $\Pi(2p) = (2p)!$. Bezeichnen wir sie der Kürze wegen mit $G_p[(1+\gamma)X]$ bezw. $G_p[(1+\gamma)T]$, also

$$G_p[(1+\gamma)X] = \sum_{\lambda=0}^{2p} \frac{(1+\gamma)^\lambda X^\lambda}{\Pi(\lambda)} = 1 + \frac{(1+\gamma)X}{1} + \frac{(1+\gamma)^2 X^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{(1+\gamma)^{2p} X^{2p}}{1\cdot 2\cdots 2p} \tag{33}$$

so ergibt sich

$$H = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_p(X)}{(2X)^p} \cdot \frac{\Pi(2p)}{\Pi(p)(1+\gamma)^{2p+1}} \Big[e^{-(1+\gamma)X} G_p[(1+\gamma)X] - e^{-(1+\gamma)T} G_p[(1+\gamma)T] \Big]. \tag{34}$$

Hiermit ist das Problem gelöst; unter Zuhilfenahme von Tafeln für die Besselschen Funktionen[1]) kann die Stromstärke für jedes X und T berechnet werden (Gl. 30, 33, 34). Dabei kommen nur solche T in Frage, die der Bedingung $T > X$ genügen; für kleinere T ist der Strom null.

Für $T = \infty$ verschwindet das zweite Glied in (30) wie

$$\frac{e^{-\gamma T}}{\sqrt{2\pi T}};$$

aus dem ersten Glied ergibt sich nach (34)

$$J_\infty = \gamma e^{-(1+\gamma)X} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_p(X)}{(2X)^p} \frac{\Pi(2p)}{\Pi(p)(1+\gamma)^{2p+1}} G_p[(1+\gamma)X].$$

Einen weit einfacheren Ausdruck erhält man für diesen stationären Endstrom, wenn man in die Differentialgleichungen (1), (2) von vornherein $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ einführt, nämlich

$$J_\infty = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\, e^{-\sqrt{\gamma(\gamma+2)}X} \tag{35}$$

Dabei ist wiederum angenommen, daß bei $X = 0$ die Spannung $V = 1$ sei. Die beiden Ausdrücke für J_∞ sind natürlich identisch, wovon man sich z. B. durch Entwicklung dieser Ausdrücke nach steigenden Potenzen von X und $\frac{1}{1+\gamma}$ überzeugen kann. Für $X = 0$ ergibt sich insbesondere die bemerkenswerte Identität

1) Z. B. die „Funktionentafeln" von Jahnke-Emde, Leipzig 1909.

Digitized by Google

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Pi(2p)}{[\Pi(p)]^2 2^{2p}} \frac{\gamma}{(1+\gamma)^{2p+1}}.$$

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Durch eine passende Wahl der Einheiten für Länge, Zeit, Strom und Spannung ist es möglich, alle denkbaren Leitungen mit beliebigen Werten der Leitungskonstanten R, A, L, C auf eine einfach unendliche Zahl zurückzuführen (Gl. 8, 8a).

2. Durch diese Transformation wird außerdem erreicht, daß sich Spannung und Strom von einer einzigen Stammfunktion Ψ ableiten, die der (reduzierten) Telegraphengleichung des ableitungsfreien Kabels genügt (Gl. 9).

3. Die einzige noch in den Gleichungen verbleibende Leitungskonstante

$$\gamma = \frac{2AL}{RC - AL}$$

tritt bei der Berechnung des Stromes und der Spannung aus der Funktion Ψ nur als (dämpfender) Exponentialfaktor $e^{-\gamma T}$ auf (Gl. 10, 11).

4. Eine an einer Stelle der Leitung wirkende Störung ruft eine Welle hervor, die sich mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(derselben, wie bei der verlustfreien Leitung) ausbreitet.

5. War die Störung zeitlich scharf begrenzt, so bleibt die steile Vorderfront der Welle erhalten, wie weit auch immer die Welle bereits gelaufen sein mag. Die Höhe der Wellenfront nimmt nach dem Exponentialgesetze

$$e^{-(1+\gamma)T} = e^{-\left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C}\right)t}$$

ab. Eine scharfbegrenzte Rückfront besitzt die Welle dagegen nicht; sie läuft auf dieser Seite mehr und mehr auseinander, je weiter sie sich ausbreitet.

6. Für einen einfachen Stromstoß von sehr kurzer Dauer ist die zugehörige Stammfunktion Ψ, abgesehen von der veränderten Wahl der Einheiten, dieselbe, wie beim Kabel ohne Ableitung (Gl. 24).

7. Es wird eine Formel zur Berechnung des Stromverlaufs

Digitized by Google

nach dem Anlegen einer konstanten Spannung an den Kabelanfang abgeleitet (Gl. 30). Die Wirkung der Ableitung A äußert sich in einem Zusatzgliede (34) zu dem Ausdruck, der den Stromverlauf auf einem ableitungsfreien Kabel angibt. Nach genügend langer Zeit wird dieses Zusatzglied von der Zeit unabhängig und stellt dann den stationären Stromverlauf (Isolationsstrom) dar (35).

Digitized by Google

Ueber gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen.

(2. Note.)

Von

Hermann Weyl, Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 23. Juli 1910.

In zwei Aufsätzen, in den Göttinger Nachrichten und den Mathematischen Annalen[1]), habe ich allgemein die aus einer linearen Schar von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung entspringenden Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen behandelt — für den Fall, daß nur das eine Ende des betrachteten Intervalls für die Gleichungsschar eine singuläre Stelle (übrigens völlig beliebiger Art) ist. Hier möchte ich kurz diejenigen Ergänzungen erläutern, welche

1) Diese Nachrichten 1909, S. 37—64; Mathematische Annalen, Bd. 68 (1910), S. 220—269 (Habilitationsschrift). Ich zitiere diese zweite Arbeit im folgenden mit „H". — Für zwei besondere Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen hat bereits Herr Hilb (Mathematische Annalen, Bd. 66 (1908), S. 1 ff.) nach einer andern Methode (die sich auch auf manche weitere Fälle ausdehnen ließe) das in Rede stehende Problem behandelt. — Als Grundlage der Theorie dienen die tiefgehenden Untersuchungen Hilberts (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung, diese Nachrichten 1906, S. 157 ff.) und Hellingers (Inauguraldissertation, Göttingen 1907; Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Crelles Journal Bd. 136 (1909) S. 210 ff.) Vergl. auch F. Riesz, diese Nachrichten, 11. Juni 1910. Weitere Literatur: Plancherel, Note sur les équations intégrales singulières (Rivista di Fisica, Matematica e Science Naturali, X (1909), S. 37—53); ders., Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen (Mathematische Annalen, Bd. 67 (1909) S. 519); ders., Contribution à l'étude . . . (Rend. d. Circ. Mat. di Palermo, t. XXX; 1910). Weyl, Inauguraldissertation, Göttingen 1908; ders., Singuläre Integralgleichungen (Mathematische Annalen Bd. 66 (1908), S. 273).

Digitized by Google

den in der Annalenarbeit angestellten Ueberlegungen hinzuzufügen sind, um auch den Fall *zweier singulärer Enden* vollständig zu erledigen [1]). Ferner sollen die im „*polaren*" *Fall* gültigen Entwicklungssätze formuliert und bewiesen werden.

§ 1.

Wir betrachten die lineare Schar von Differentialgleichungen

$$(1) \qquad L(u)+\lambda k(s)u \equiv \frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{du}{ds}\right)-q(s)u+\lambda k(s)u = 0;$$

darin sind $p(s)$, $q(s)$, $k(s)$ für $-\infty < s < +\infty$ [2]) definierte stetige Funktionen und außerdem $p(s) > 0$, $k(s) > 0$; λ bedeutet einen Parameter. Diese Schar kann für $s = +\infty$ und ebenso für $s = -\infty$ entweder vom *Grenzkreis-* oder vom *Grenzpunkt-Typus* sein [3]), sodaß vier verschiedene Fälle zu unterscheiden sind. Diejenigen Fälle jedoch, in denen die Schar an einem der beiden Enden, etwa für $s = -\infty$, vom Grenzkreistypus ist, gestatten eine völlig analoge Behandlung wie Gleichungen mit nur *einem* singulären Ende. Verstehen wir nämlich in jenen Fällen unter $\varphi(s;\lambda)$ eine mit Bezug auf λ stetig differenzierbare Funktion, welche (1) und der für $s = -\infty$ vorgeschriebenen Randbedingung genügt, außerdem aber für keinen Wert von λ identisch in s verschwindet, so können wir dieses $\varphi(s;\lambda)$ in genau derselben Weise allen Betrachtungen zu Grunde legen, wie es mit der gleichbezeichneten Funktion in **H** (namentlich S. 239—251) geschehen ist. Es hat keine Schwierigkeit, ein allgemeines Verfahren anzugeben, mittels dessen man sich eine derartige Funktion φ verschaffen kann.

Wir nehmen daher nunmehr die Schar (1) sowohl für $s = +\infty$ als für $s = -\infty$ vom *Grenzpunkttypus* an und bezeichnen mit

$$\varphi_1(s;\lambda), \qquad \varphi_2(s;\lambda)$$

Funktionen, die für jeden Wert von λ zwei *unabhängige* Lösungen der Gleichung (1) darstellen und mit Bezug auf λ stetig differenzierbar sind; z. B. können wir sie den folgenden Bedin-

---

1) Singularitäten im Innern des Intervalls, freilich nicht solche von beliebiger Beschaffenheit, könnten neben den Singularitäten an den Enden zugelassen werden; der Einfachheit halber sehen wir jedoch davon ab.

2) Daß ich die singulären Stellen ins Unendliche lege, ist natürlich ganz unwesentlich.

3) **H**, Kap. 1; vergl. auch die Schlußbemerkung **H**, S. 269.

Digitized by Google

gungen gemäß wählen:

$$(\varphi_1)_{s=0} = 0, \left(p(s)\frac{d\varphi_1}{ds}\right)_{s=0} = 1;$$

$$(\varphi_2)_{s=0} = 1, \left(p(s)\frac{d\varphi_2}{ds}\right)_{s=0} = 0.$$

Auch jetzt übertragen sich noch alle Schlüsse der Annalenarbeit sofort mit Ausnahme der in den Absätzen 12—15 daselbst zum Beweise des Satzes 6 angestellten Betrachtungen. An Stelle des Satzes 6 (**H**, S. 239) treten die folgenden Behauptungen:

Liegt eine in beiden Argumenten stetige Funktion $\Xi(s;\lambda)$ vor, welche der Identität

$$L(\Xi(s;\lambda)) + k(s)\int_0^\lambda \mu\, d_\mu \Xi(s;\mu) = 0 \tag{2}$$

genügt und für die außerdem $\Xi(s;0) = 0$ ist und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k\Xi^2 ds = \operatorname{sgn}\lambda \cdot \omega(\lambda) \tag{3}$$

als stetige Funktion von λ existiert — ich nenne eine solche Funktion wiederum eine „zulässige Lösung" von (2) —, so hat Ξ notwendig die Form

$$\Xi(s;\lambda) = \int_0^\lambda \varphi_1(s;\mu)\, d\xi_1(\mu) + \int_0^\lambda \varphi_2(s;\mu)\, d\xi_2(\mu), \tag{4}$$

wo ξ_1, ξ_2 stetige Funktionen von μ bezeichnen. *Es gibt insbesondere zwei solche zulässige Lösungen*

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_1 &= \int_0^\lambda \varphi_1\, d\varrho_{11} + \int_0^\lambda \varphi_2\, d\varrho_{12}, \\ \mathsf{P}_2 &= \int_0^\lambda \varphi_1\, d\varrho_{21} + \int_0^\lambda \varphi_2\, d\varrho_{22}, \end{aligned} \tag{5}$$

welche (nach vorheriger Wahl von φ_1, φ_2) *in eindeutiger Weise dadurch charakterisiert sind, daß für jede zulässige Lösung* (4) *und jedes Intervall* Δ *der Spektrumsvariablen* λ *die Gleichungen statthaben:*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} k\Delta\Xi\Delta\mathsf{P}_1 ds &= \Delta\xi_1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} k\Delta\Xi\Delta\mathsf{P}_2 ds &= \Delta\xi_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Digitized by Google

Beweis: Aus (2) und (3) folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(\Delta\Xi)^2\,ds = \Delta\omega.$$

Ferner bleibt für alle möglichen Ξ der Quotient $\frac{(\Delta\xi_1)^2}{\Delta\omega}$ unterhalb einer festen, nur von Δ abhängigen Grenze. Die präzise obere Grenze dieses Quotienten werde mit $E_{11} = E_{11}(\Delta)$ bezeichnet. Entsprechendes gilt für $\frac{(\Delta\xi_2)^2}{\Delta\omega}$, dessen präzise obere Grenze $E_{22} = E_{22}(\Delta)$ heiße. Ich behaupte ferner die Existenz einer bestimmten Größe $E_{12}(\Delta)$ von der Beschaffenheit, daß $\frac{\Delta\xi_1\,\Delta\xi_2}{\Delta\omega}$ allemal dann gegen E_{12} konvergiert, falls (4) eine solche Folge zulässiger Lösungen durchläuft, für welche der Quotient $\frac{(\Delta\xi_1)^2}{\Delta\omega}$ gegen seine obere Grenze E_{11} konvergiert.

Sind nämlich

$$\Xi' = \int_0^\lambda \varphi_1\,d\xi_1' + \int_0^\lambda \varphi_2\,d\xi_2', \quad \Xi'' = \int_0^\lambda \varphi_1\,d\xi_1'' + \int_0^\lambda \varphi_2\,d\xi_2''$$

irgend zwei zulässige Lösungen von (2), so ist auch jede Linearkombination

$$\Xi = \varkappa'\Xi' + \varkappa''\Xi'' \quad (\varkappa', \varkappa'' \text{ konstant})$$

eine solche, und man findet

$$\Delta\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\Delta\Xi)^2\,ds = \varkappa'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} k(\Delta\Xi')^2\,ds + 2\varkappa'\varkappa'' \int_{-\infty}^{+\infty} k\,\Delta\Xi'\,\Delta\Xi''\,ds + \varkappa''^2 \int_{-\infty}^{+\infty} k(\Delta\Xi'')^2\,ds$$

$$= \varkappa'^2 . \Delta\omega' + 2\varkappa'\varkappa'' . \Delta\omega'^{,''} + \varkappa''^2 . \Delta\omega''.$$

Bringen wir die Ungleichung

$$(\Delta\xi_1)^2 \leqq \Delta\omega . E_{11},$$

auf Ξ zur Anwendung, so folgt identisch in $\varkappa', \varkappa''$

$$(\varkappa'\Delta\xi_1' + \varkappa''\Delta\xi_1'')^2 \leqq \Delta\omega . E_{11},$$

d. h. die quadratische Form der Variablen $\varkappa', \varkappa''$

$$\varkappa'^2[E_{11}\Delta\omega' - (\Delta\xi_1')^2] + 2\varkappa'\varkappa''[E_{11}\Delta\omega'^{,''} - \Delta\xi_1'\Delta\xi_1''] + \varkappa''^2[E_{11}\Delta\omega'' - (\Delta\xi_1'')^2]$$

Digitized by Google

ist für kein einziges Wertsystem negativ, mithin

$$(7) \qquad [E_{11}\Delta\omega'\Delta\omega'' - \Delta\xi_1'\Delta\xi_1'']^2 \leqq [E_{11}\Delta\omega' - (\Delta\xi_1')^2][E_{11}\Delta\omega'' - (\Delta\xi_1'')^2].$$

Hieraus folgt nun unmittelbar: Durchlaufen Ξ', Ξ'' unabhängig voneinander zwei solche Folgen zulässiger Lösungen, für welche

$$\frac{(\Delta\xi_1')^2}{\Delta\omega'} \text{ und } \frac{(\Delta\xi_1'')^2}{\Delta\omega''}$$

gegen E_{11} konvergieren, so konvergiert

$$\frac{\Delta\omega'\Delta\omega''}{\sqrt{\Delta\omega'\Delta\omega''}}$$

gegen 1, also

$$\Delta\omega^* = \int_{-\infty}^{+\infty} k\left(\Delta\Xi'\frac{\Delta\xi_1'}{\Delta\omega'} - \Delta\Xi''\frac{\Delta\xi_1''}{\Delta\omega''}\right)^2 ds$$

$$= \frac{(\Delta\xi_1')^2}{\Delta\omega'} + \frac{(\Delta\xi_1'')^2}{\Delta\omega''} - 2\frac{\Delta\xi_1'\Delta\xi_1''}{\sqrt{\Delta\omega'\Delta\omega''}}\frac{\Delta\omega'\Delta\omega''}{\sqrt{\Delta\omega'\Delta\omega''}}$$

gegen $E_{11} + E_{11} - 2E_{11} = 0$, und schließlich, da

$$(\Delta\xi_2)^2 \leqq \Delta\omega \,.\, E_{22}$$

auf

$$\Xi^* = \Xi'\frac{\Delta\xi_1'}{\Delta\omega'} - \Xi''\frac{\Delta\xi_1''}{\Delta\omega''}$$

angewendet,

$$\left(\frac{\Delta\xi_1'\Delta\xi_2'}{\Delta\omega'} - \frac{\Delta\xi_1''\Delta\xi_2''}{\Delta\omega''}\right)^2 \leqq E_{22}\,\Delta\omega^*$$

ergibt,

$$\lim\left(\frac{\Delta\xi_1'\Delta\xi_2'}{\Delta\omega'} - \frac{\Delta\xi_1''\Delta\xi_2''}{\Delta\omega''}\right) = 0.$$

Daraus folgt die oben behauptete Existenz der Zahl E_{12}.

Analog ist zu zeigen, daß $\frac{\Delta\xi_1\Delta\xi_2}{\Delta\omega}$ stets gegen eine und dieselbe Grenze $E_{21} = E_{21}(\Delta)$ konvergiert, falls Ξ eine solche Folge durchläuft, für die $\lim\frac{(\Delta\xi_2)^2}{\Delta\omega} = E_{22}$ ist. Offenbar gelten die Ungleichungen

$$E_{12}^2 \leqq E_{11}E_{22}, \quad E_{21}^2 \leqq E_{11}E_{22}.$$

Die Ueberlegungen in **II**, Abs. 15 zeigen dann ferner, daß Funktionen

$$\varrho_{11}, \varrho_{12}; \quad \varrho_{21}, \varrho_{22}$$

Digitized by Google

von λ existieren, sodaß für jedes Intervall Δ

$$\Delta\varrho_{hi} = E_{hi}(\Delta) \qquad (h, i = 1 \text{ oder } 2)$$

wird. Wir können noch annehmen, daß $\varrho_{hi}(0) = 0$ ist. ϱ_{11}, ϱ_{22} ergeben sich als *stetige* Funktionen; wegen

$$(\Delta\varrho_{12})^2 \leqq \Delta\varrho_{11}\,\Delta\varrho_{22}, \quad (\Delta\varrho_{21})^2 \leqq \Delta\varrho_{11}\,\Delta\varrho_{22}$$

sind also auch ϱ_{12}, ϱ_{21} stetig. Für

$$\mathsf{P}_1(s;\lambda) = \int_0^\lambda \varphi_1(s;\mu)\,d\varrho_{11}(\mu) + \int_0^\lambda \varphi_2(s;\mu)\,d\varrho_{12}(\mu)$$

gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k\,(\Delta\mathsf{P}_1)^2\,ds = \Delta\varrho_{11},$$

und jede mittels einer stetigen Funktion ξ_1 von λ, für welche $\frac{(d\xi_1)^2}{d\varrho_{11}}$ integrierbar ist[1]), gebildete Funktion

$$\Xi_1 = \int_0^\lambda \frac{d\mathsf{P}_1\,d\xi_1}{d\varrho_{11}}$$

ist eine zulässige Lösung von (2); denn sie genügt der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(\Delta\Xi_1)^2\,ds = \int_\Delta \frac{(d\xi_1)^2}{d\varrho_{11}}.$$

Entsprechendes ist über

$$\mathsf{P}_2(s;\lambda) = \int_0^\lambda \varphi_1(s;\mu)\,d\varrho_{21}(\mu) + \int_0^\lambda \varphi_2(s;\mu)\,d\varrho_{22}(\mu)$$

zu sagen.

Setzen wir jetzt in der Ungleichung (7) für Ξ' irgend eine zulässige Lösung Ξ und $\Xi'' = \mathsf{P}_1$, also

$$\Delta\xi_1' = \Delta\xi_1, \qquad \Delta\omega' = \Delta\omega,$$

$$\Delta\omega'^{,''} = \int_{-\infty}^{+\infty} k\,\Delta\Xi\,\Delta\mathsf{P}_1\,ds,$$

$$\Delta\xi_1'' = {}_{11} = \Delta\varrho_{11}, \quad \Delta\omega'' = \Delta\varrho_{11},$$

---

1) Der Hellingersche Integralbegriff, welcher hier hineinspielt, ist ein außerordentlich wichtiges Hülfsmittel der Theorie. Vgl. Hellinger, Dissertation, S. 28; Crelles Journal, Bd. 136, S. 237.

Digitized by Google

so kommt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k\,\Delta\Xi\,\Delta P_1\,ds = \Delta\xi_1.$$

Ebenso folgt die andere der beiden Gleichungen (6). Wir erkennen daraus noch die Beziehung

$$\Delta\varrho_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} k\,\Delta P_1\,\Delta P_2\,ds = \Delta\varrho_{21};\quad \varrho_{12} = \varrho_{21}.$$

Es ist besonders zu beachten, daß die Differentiale $\sqrt{k}\,.\,d_\lambda P_1$, $\sqrt{k}\,.\,d_\lambda P_2$ *nicht zueinander orthogonal* sind.

Vorübergehend führen wir (in unsymmetrischer Weise) statt P_1, P_2 die Funktionen

$$T_1 = P_1,\ T_2 = P_2 - \int_0^\lambda \frac{dP_1\,d\varrho_{12}}{d\varrho_{11}} = \int_0^\lambda \varphi_2(s;\mu)\,d\tau_2(\mu)$$

ein, für welche wir die Gleichungen anschreiben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(\Delta T_1)^2\,ds = \Delta\varrho_{11} = \Delta\tau_1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} k(\Delta T_2)^2\,ds =$$

$$\Delta\varrho_{22} - \int_\Delta \frac{(d\varrho_{12})^2}{d\varrho_{11}} = \Delta\tau_2,\ \int_{-\infty}^{+\infty} k\,\Delta T_1\,\Delta T_2\,ds = 0.$$

Ist Ξ irgend eine zulässige Lösung (4), so gilt

$$(\Delta\xi_1)^2 \leqq \Delta\varrho_{11}\,.\,\Delta\omega;$$

es ist also $\frac{(d\xi_1)^2}{d\varrho_{11}}$ integrierbar und

$$\Xi_1 = \int_0^\lambda \frac{dP_1\,d\xi_1}{d\varrho_{11}} = Z_1 = \int_0^\lambda \frac{dT_1\,d\zeta_1}{d\tau_1}$$

eine gleichfalls zulässige Lösung. $\Xi - Z_1 = Z_2$ hat die Form $\int_0^\lambda \varphi_2(s;\mu)\,d\zeta_2(\mu)$. Setzen wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(\Delta Z_2)^2\,ds = \Delta\omega_2,$$

so, behaupte ich, ist

Digitized by Google

(8) $$(\Delta\xi_2)^2 \leqq \Delta\omega_2 \Delta\tau_2.$$

Vertauschen wir nämlich in (7) die Indices 1 und 2 und wenden die hervorgehende Relation auf $\Xi' = \mathsf{P}_1$, $\Xi'' = \mathsf{Z}_2$ an, so ergibt sich durch eine einfache Rechnung

$$(\Delta\xi_2)^2 \leqq \left[\Delta\varrho_{22} - \frac{(\Delta\varrho_{12})^2}{\Delta\varrho_{11}}\right]\Delta\omega_2,$$

und daraus folgt (8). Wir finden also die Darstellung

$$\Xi = \int_0^\lambda \frac{d\mathsf{T}_1 d\xi_1}{d\tau_1} + \int_0^\lambda \frac{d\mathsf{T}_2 d\xi_2}{d\tau_2};$$

dabei sind $\frac{(d\xi_1)^2}{d\tau_1}$, $\frac{(d\xi_2)^2}{d\tau_2}$ integrierbar, und es wird

$$\Delta\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\Delta\Xi)^2 ds = \int_\Delta \frac{(d\xi_1)^2}{d\tau_1} + \int_\Delta \frac{(d\xi_2)^2}{d\tau_2}.$$

Umgekehrt ist jede Funktion Ξ von der Form (9), falls $\frac{(d\xi_1)^2}{d\tau_1}$, $\frac{(d\xi_2)^2}{d\tau_2}$ integrierbar sind, offenbar eine zulässige Lösung von (2): die Differentiale $d\mathsf{T}_1$, $d\mathsf{T}_2$ bilden ein volles System orthogonalisierter Eigendifferentiale für unsere lineare Differentialgleichungsschar.

Die nach λ genommenen Differentiale $d\mathsf{P}_1$, $d\mathsf{P}_2$ bezeichnen wir als *die an das Lösungssystem* $\varphi_1(s;\lambda)$, $\varphi_2(s;\lambda)$ *adaptierten Eigendifferentiale* der Schar (1). In derselben Beziehung, wie diese Differentiale zum Streckenspektrum, stehen gewisse lineare Kombinationen der φ_1, φ_2:

$$R_1(s;\lambda) = \varphi_1(s;\lambda) r_{11}(\lambda) + \varphi_2(s;\lambda) r_{12}(\lambda),$$
$$R_2(s;\lambda) = \varphi_1(s;\lambda) r_{21}(\lambda) + \varphi_2(s;\lambda) r_{22}(\lambda)$$

zum Punktspektrum; R_1, R_2 heißen *die an das Lösungssystem* φ_1, φ_2 *adaptierten Eigenfunktionen* der Schar (1). Ueberlegungen, die den in **H**, Abs. 16 angestellten durchaus analog sind (wobei freilich an Stelle des dortigen Differentials $d\mathsf{P}$ hier zunächst das System $d\mathsf{T}_1$, $d\mathsf{T}_2$ benutzt werden muß) führen zu dem folgenden Entwicklungssatz:

Ist f eine Funktion von s, für welche f, $L(f)$ stetig sind und die Integrale

Digitized by Google

$$\int_{-\infty}^{+\infty} kf^2\,ds,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k}(L(f))^2\,ds$$

konvergieren, so gilt eine gleichmäßig und absolut konvergente Darstellung:

$$f(s) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \{\varphi_1(s;\lambda)\,C_1(\lambda)+\varphi_2(s;\lambda)\,C_2(\lambda)\} + \int_{-\infty}^{+\infty} \{\varphi_1(s;\lambda)\,d\Gamma_1(\lambda)+\varphi_2(s;\lambda)\,d\Gamma_2(\lambda)\},$$

deren Koeffizientensystem C_1, C_2; $d\Gamma_1$, $d\Gamma_2$ *sich aus den adaptierten Eigenfunktionen* R_1, R_2 *bezw. Eigendifferentialen* $d\mathsf{P}_1$, $d\mathsf{P}_2$ *mittels der Formeln*

$$C_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s)f(s)\,R_1(s;\lambda)\,ds,\quad C_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s)f(s)\,R_2(s;\lambda)\,ds,$$

$$\Delta\Gamma_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s)f(s)\,\Delta\mathsf{P}_1(s;\lambda)\,ds,\quad \Delta\Gamma_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s)f(s)\,\Delta\mathsf{P}_2(s;\lambda)\,ds$$

berechnet.

Das Punktspektrum ist stets einfach, d. h. es ist $r_{12}^2 = r_{11}r_{22}$. Denn es können nicht $\sqrt{k}.\varphi_1$ und $\sqrt{k}.\varphi_2$ für einen festen λ-Wert beide im Intervall $-\infty < s < +\infty$ quadratisch integrierbar sein. Hingegen kann das Streckenspektrum, wie wir an Beispielen sogleich sehen werden, sehr wohl zweifach sein.

Konvergiert $\frac{q(s)}{k(s)}$ etwa für $s = -\infty$ gegen $+\infty$, so kann man eine für keinen λ-Wert identisch in s verschwindende Lösung $\varphi(s;\lambda)$ von (1) angeben, die nach λ stetig differenzierbar und so beschaffen ist, daß $\sqrt{k}.\varphi$ bei $s = -\infty$ quadratisch integrierbar wird. Benutzen wir diese Lösung φ als das φ_1 unsere bisherigen Schlüsse, so zeigt sich, daß identisch in λ

$$r_{12} = r_{21} = 0,\ r_{22} = 0;\quad \Delta\varrho_{12} = \Delta\varrho_{21} = 0,\ \Delta\varrho_{22} = 0$$

wird, sodaß die Entwicklung einer willkürlichen Funktion genau dieselbe Gestalt annimmt, wie wenn $-\infty$ von Grenzkreis-Beschaffenheit ist.

Konvergiert $\frac{q(s)}{k(s)}$ sowohl für $s = -\infty$ als auch für $s = +\infty$ gegen $+\infty$, so tritt überhaupt nur ein Punktspektrum auf, das

Digitized by Google

sich nirgends im Endlichen verdichtet. Vergl. die Sätze **H**, Abs. 18—20, die sich sofort übertragen lassen.

§ 2.

An Beispielen zu den allgemeinen Resultaten des vorigen § erwähne ich nur die allernaheliegendsten [1]). Zunächst erhalten wir die Integraldarstellungen mittels *Besselscher Funktionen*, wenn wir, unter ν eine nicht negative Konstante verstehend,

$$p(s) = k(s) = s, \quad q(s) = \frac{\nu^2}{s}$$

setzen und als Intervall $0 \leqq s < +\infty$ nehmen, dessen beide Enden singulär sind. Solange $0 \leqq \nu < 1$ ist, ist das Ende 0 vom Grenzkreistypus, das Ende $+\infty$ dagegen vom Grenzpunkttypus. Sind a, b irgend zwei Konstante, so erhalten wir Darstellungen willkürlicher Funktionen als linearer Kombinationen der Funktionen

$$a\lambda^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(s\sqrt{\lambda}) + b\lambda^{\frac{\nu}{2}} J_{-\nu}(s\sqrt{\lambda}) \qquad [\text{falls } 0 < \nu < 1]$$
$$(0 \leqq \lambda < \infty)$$

bezw. der Funktionen

$$aJ(s\sqrt{\lambda}) + bK(s\sqrt{\lambda}) \qquad [\text{falls } \nu = 0].$$
$$(0 \leqq \lambda < \infty)$$

J, J_ν sind dabei die Zeichen für die bekannten Besselschen Funktionen, K bedeutet die zweite Partikularlösung der Differentialgleichung 2. Ordnung, welcher J genügt. Nehmen wir insbesondere $a = 1$, $b = 0$ und schreiben noch $\sqrt{\lambda} = \varkappa$, so bekommen wir die Integraldarstellung [2])

$$(10) \qquad f(s) = \int_0^\infty \{J_\nu(s\varkappa)\,\varkappa\,d\varkappa \int_0^\infty f(t)\,t\,J_\nu(t\varkappa)\,dt\}.$$

Ist hingegen $\nu \geqq 1$, so ist auch das Ende 0 vom Grenzpunkttypus jedoch liegt der am Schluß von § 1 erwähnte einfache Fall vor, daß $\lim_{s=0} \frac{q(s)}{k(s)} = \lim_{s=0} \left(\frac{\nu}{s}\right)^2 = +\infty$ ist. Infolgedessen werden wir für

1) Diese einfachen Beispiele, welche hier nur dazu dienen, die allgemeine Theorie zu illustrieren, lassen sich wohl auch mittels der von Herrn Hilb a. a. O. benutzten Methode (wenn auch mühsamer und unter größeren Einschränkungen für die zu entwickelnde Funktion $f(s)$) durchführen.

2) Die „Basisfunktion" $\varrho(\lambda)$ ist nach **H.**, Abs. 21 zu bestimmen.

Digitized by Google

$\nu \geqq 1$ gleichfalls auf die Integraldarstellung (10) geführt; der einzige Unterschied gegen (10) ist der, daß die willkürliche Funktion $f(s)$ jetzt keiner Randbedingung an der Stelle $s = 0$ unterworfen ist.

Als 2. Beispiel betrachten wir die *„Gaußsche Differentialgleichung"*, die wir in der Form schreiben

$$s(1-s)\frac{d^2y}{ds^2} + [\gamma - (\alpha+1)s]\frac{dy}{ds} + \lambda^* y = 0$$

oder

$$\frac{d}{ds}\left(s^\gamma (1-s)^{\alpha+1-\gamma}\frac{dy}{ds}\right) + \lambda^* s^{\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\gamma} y = 0. \tag{11}$$

Eine ihrer Lösungen ist, wenn F die *hypergeometrische Reihe* bedeutet,

$$F\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \lambda^*},\ \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \lambda^*},\ \gamma;\ s\right).$$

Denken wir uns α und γ als fest gegeben, hingegen λ^* als variablen Parameter, so haben wir eine Schar linearer Differentialgleichungen von der in § 1 betrachteten Form vor uns: es ist jetzt speziell

$$p(s) = s^\gamma (1-s)^{\alpha+1-\gamma},\ q(s) = 0,\ k(s) = s^{\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\gamma}.$$

Als Intervall legen wir zunächst $0 \leqq s \leqq 1$ zu Grunde.

	Das Ende 0 ist	Das Ende 1 ist
vom Grenzkreistypus, wenn	$\lvert 1-\gamma\rvert < 1$	$\lvert\gamma-\alpha\rvert < 1$
vom Grenzpunkttypus, wenn	$\lvert 1-\gamma\rvert \geqq 1$	$\lvert\gamma-\alpha\rvert \geqq 1$.

Setzen wir

$$u = s^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-s)^{\frac{\alpha-\gamma}{2}} y,$$

so schreibt sich (11) in der Form

$$\frac{d}{ds}\left(s(1-s)\frac{du}{ds}\right) - \left[\frac{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2}{s} + \frac{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2}{1-s}\right]u + \left(\lambda^* + \frac{\alpha^2-1}{4}\right)u = 0, \tag{12}$$

aus der zu ersehen ist, daß wir die Allgemeinheit unserer Untersuchung nicht einschränken, wenn wir

$$\gamma - 1 \geqq 0,\quad \alpha - \gamma \geqq 0$$

Digitized by Google

voraussetzen, was wir in der Tat tun wollen. Ferner erkennen wir, daß für beide Enden 0 und 1 der einfache Fall vom Schluß des § 1 vorliegt; es tritt demnach nur ein Punktspektrum ohne Verdichtung im Endlichen und kein Streckenspektrum auf. Die hervorgehenden Reihenentwicklungen sind (unter gewissen Einschränkungen) von Jacobi[1]), Darboux[2]), Appell[3]), Blumenthal[4]) und neuerdings mittels Integralgleichungen auch von Frau W. Myller-Lebedeff[5]) und Herrn Kryloff[6]) behandelt worden.

Fassen wir aber jetzt das Intervall $-\infty \ldots 0$ ins Auge, so werden wir statt (11) schreiben

$$\frac{d}{ds}\left((-s)^{\gamma}(1-s)^{\alpha+1-\gamma}\frac{dy}{ds}\right)+\left(\lambda+\frac{\alpha^2}{4}\right)(-s)^{\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\gamma}\,y=0$$

$$\left[\lambda=-\frac{\alpha^2}{4}-\lambda^*\right].$$

Das Ende 0 ist gemäß der obigen Tabelle entweder vom Grenzkreis- oder vom Grenzpunkt-Typus, im letzten Fall jedoch von der wiederholt erwähnten einfachen Beschaffenheit. Um den Charakter des Endes $-\infty$ zu erkennen, führen wir die Transformation

$$u=(-s)^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-s)^{\frac{\alpha+1-\gamma}{2}}y,$$
$$\sigma=lg(1-s)$$

aus und erhalten

$$\frac{d}{d\sigma}\left((1-e^{-\sigma})\frac{du}{d\sigma}\right)-\left[\frac{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2}{e^{\sigma}-1}+\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2}{e^{\sigma}}\right]u+\lambda u=0$$
$$(0\leqq\sigma<+\infty).$$

Die Untersuchungen in H., Abs. 20, 21 zeigen daher, daß $-\infty$ vom Grenzpunkttypus ist und ein das Intervall $0\leqq\lambda<+\infty$ völlig bedeckendes Streckenspektrum auftritt. Denken wir uns F so fortgesetzt, daß es in der ganzen, längs des Stückes $1\leqq s<+\infty$

---

1) Crelles Journal Bd. 56 (1859); Werke Bd. 6.

2) Journal de Liouville, sér. III, t. 4.

3) Comptes Rendus 1879.

4) Inauguraldissertation, Göttingen 1898.

5) Comptes Rendus, Oktober 1909; Mathematische Annalen, Bd. 69.

6) Comptes Rendus, 6. Febr. 1910; die von Herrn Kryloff dort benutzte Methode ist genau dieselbe, welche ich in den Math. Ann. Bd. 66 (1908), S. 317—320 an dem Beispiel der Laguerre'schen Polynome entwickelt habe.

Digitized by Google

der reellen Axe aufgeschnittenen komplexen s-Ebene regulär ist, so muß für $\lambda > 0$ und große positiv-reelle Werte von $-s$ eine asymptotische Darstellung

$$(-s)^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-s)^{\frac{\alpha+1-\gamma}{2}} F\left(\frac{\alpha}{2}+i\sqrt{\lambda},\ \frac{\alpha}{2}-i\sqrt{\lambda},\ \gamma;\ s\right)$$
$$\sim m_1(\lambda)\cos(\sigma\sqrt{\lambda}) + m_2(\lambda)\sin(\sigma\sqrt{\lambda})$$

gelten (i bedeutet hier $\sqrt{-1}$). Für die an

$$\varphi(s;\ \lambda) = F\left(\frac{\alpha}{2}+i\sqrt{\lambda},\ \frac{\alpha}{2}-i\sqrt{\lambda},\ \gamma;\ s\right)$$

adaptierten Eigendifferentiale $d\mathfrak{P} = \varphi(s;\ \lambda)\, d\varrho$ erhält man die Gleichung [1])

$$d\varrho = \frac{2 \cdot d\sqrt{\lambda}}{\pi\,[m_1^2(\lambda) + m_2^2(\lambda)]}.$$

$m_1(\lambda)$, $m_2(\lambda)$ lassen sich bestimmen, indem man die lineare Beziehung zwischen F und den beiden zu dem Verzweigungspunkte $s = \infty$ gehörigen Fundamentallösungen der Gaußschen Differentialgleichung aufsucht; man findet, wenn $\sqrt{\lambda} = \varkappa$ gesetzt wird,

$$m_1^2 + m_2^2 = 4\left|\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(2i\varkappa)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+i\varkappa\right)\Gamma\left(\gamma-\frac{\alpha}{2}+i\varkappa\right)}\right|^2.$$

Γ ist hier das Zeichen für die Gammafunktion. *Wir bekommen folgende Integraldarstellung einer willkürlichen Funktion $f(s)$: Wird*

$$\psi(s;\ \varkappa) = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+i\varkappa\right)\Gamma\left(\gamma-\frac{\alpha}{2}+i\varkappa\right)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(2i\varkappa)}\right| \cdot F\left(\frac{\alpha}{2}+i\varkappa,\ \frac{\alpha}{2}-i\varkappa,\ \gamma;\ s\right)$$
$$(\varkappa \geqq 0,\quad -\infty < s \leqq 0)$$

gesetzt, dann ist

$$(13)\quad f(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \psi(s;\ \varkappa)\, d\varkappa \int_{-\infty}^{0} f(t)\,(-t)^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}\,\psi(t;\ \varkappa)\, dt$$
$$(-\infty < s \leqq 0).$$

Schreiben wir

1) H., S. 266.

Digitized by Google

$$p(s) = (-s)^{\gamma}(1-s)^{\alpha+1-\gamma},\ k(s) = (-s)^{\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\gamma},$$

so sind die Bedingungen, denen f zu genügen hat, die daß

$$f \text{ und } \frac{d}{ds}\left(p\frac{df}{ds}\right)$$

für $s<0$ stetig sein und die Integrale

$$\int_{-\infty}^{0} kf^2 ds,\quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{k}\left[\frac{d}{ds}\left(p\frac{df}{ds}\right)\right]^2 ds,\quad \int_{-\infty}^{0} \sqrt{k}.|f|\,ds$$

konvergieren müssen. Im Falle $|\gamma-1|<1$ tritt noch die Randbedingung

$$\lim_{s=-0} p\left(f\frac{dF^0}{ds} - F^0\frac{df}{ds}\right) = 0$$

$$\left[F^0 = F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \gamma; s\right)\right]$$

hinzu. Die Gleichung (13) ist, wie jedoch bemerkt werden muß, in der hingeschriebenen Form nur exakt, wenn (außer $\alpha \geqq \gamma \geqq 1$ noch)

$$\gamma - \frac{\alpha}{2} \leqq 1$$

ist. *Sonst tritt neben dem Strecken- ein aus endlichvielen Werten λ bestehendes Punktspektrum auf*, das man erhält, wenn man in

$$\lambda = -\left[\gamma - \frac{\alpha}{2} - n\right]^2$$

n diejenigen positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... durchlaufen läßt, für welche der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck >0 ist[1]).

Die betrachteten Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen sind nicht die einzigen, die aus der hypergeometrischen Reihe entspringen. Wir können, wie aus (12) hervorgeht, die zu den singulären Stellen 0, 1 gehörigen Exponentendifferenzen $1-\gamma$, $\gamma-\alpha$ auch als rein imaginär voraussetzen (das Ende 0, bezw. 1 wird dann jedesmal vom Grenzkreistypus). Wir können aber auch

1) F. Klein, Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe, Mathematische Annalen Bd. 37, S. 573; L. Gegenbauer, Berichte der Akademie zu Wien 1891 u. Monatshefte für Mathematik Bd. 2; Van Vleck, Transactions of the American Mathematical Society vol. 3 (1902); A. Hurwitz, Mathematische Annalen Bd. 38 u. Mathematische Annalen, Bd. 64.

Digitized by Google

die beiden im Endlichen liegenden singulären Stellen 0, 1 durch zwei konjugiert imaginäre, etwa $+i$, $-i$ ersetzen und für diese Exponentendifferenzen vorschreiben, deren Quadrate konjugiert imaginär sind; als Intervall ist dann die ganze reelle Axe $-\infty \cdots +\infty$ zu nehmen. Naheliegende Verallgemeinerungen auf beliebige Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse mögen gleichfalls übergangen werden.

Vielmehr wollen wir jetzt (*3. Beispiel*) von solchen linearen Scharen (1) [Intervall: $-\infty \cdots +\infty$] sprechen, in denen die Funktionen p, q, k ($p > 0$, $k > 0$) die Bedingungen erfüllen:

$$\lim_{s=\pm\infty} (p(s)-1) = \lim_{s=\pm\infty} (k(s)-1) = \lim_{s=\pm\infty} q(s) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(p(s)-1)|\,ds, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |s(k(s)-1)|\,ds, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |sq(s)|\,ds \text{ endlich.}$$

Beide Enden $-\infty, +\infty$ sind vom Grenzpunkttypus; das Streckenspektrum dehnt sich von $\lambda = 0$ bis $+\infty$ aus, das Punktspektrum besteht (falls es überhaupt vorhanden ist) aus endlichvielen Werten $\lambda < 0$. Sind die Funktionen $\varphi_1(s;\lambda)$, $\varphi_2(s;\lambda)$ irgendwie nach der Vorschrift von § 1 gewählt, so gelten für $\lambda > 0$ asymptotische Darstellungen

$$\varphi_i(s;\lambda) \sim \begin{cases} m_i^{+\prime}(\lambda)\cos(s\sqrt{\lambda}) + m_i^{+\prime\prime}\sin(s\sqrt{\lambda}) & \text{[für große positive } s\text{]} \\ m_i^{-\prime}(\lambda)\cos(s\sqrt{\lambda}) + m_i^{-\prime\prime}\sin(s\sqrt{\lambda}) & \text{[für absol.-große negat. } s\text{]} \end{cases}$$
$$(i = 1, 2).$$

Um das Basissystem ϱ_{11}, $\varrho_{12} = \varrho_{21}$, ϱ_{22} zu berechnen, benutzen wir die Funktionen

$$Z_1 = \int_0^\lambda \varphi_1(s;\mu)\,d\sqrt{\mu}, \quad Z_2 = \int_0^\lambda \varphi_2(s;\mu)\,d\sqrt{\mu}$$

und die für die adaptierten Eigendifferentiale $d\mathsf{P}_1$, $d\mathsf{P}_2$ in jedem Intervall Δ der Spektrumsvariablen $\lambda > 0$ gültigen Gleichungen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k\Delta Z_1\,\Delta \mathsf{P}_1\,ds = \Delta\sqrt{\lambda}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k\,\Delta Z_2\,\Delta \mathsf{P}_1\,ds = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k\Delta Z_1 \Delta \mathsf{P}_2\,ds = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} k\Delta Z_2 \Delta \mathsf{P}_2\,ds = \Delta\sqrt{\lambda}.$$

Indem wir dann genau analog verfahren wie in H., Abs. 21, erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichung

Digitized by Google

$$m_1^{+'}\, m_2^{+''} - m_2^{+'}\, m_1^{+''} = m_1^{-'}\, m_2^{-''} - m_2^{-'}\, m_1^{-''}$$

das folgende Resultat:

Aus dem Schema

$$\begin{vmatrix} m_1^{+'} & m_1^{+''} & m_1^{-'} & m_1^{-''} \\ m_2^{+'} & m_2^{+''} & m_2^{-'} & m_2^{-''} \end{vmatrix}$$

bilden wir die Quadratsumme M_{11} der vier in der ersten Zeile stehenden m_i, die Quadratsumme M_{22} der zweiten Reihe und die zugehörige polare Bildung $M_{12} = M_{21}$ $(= m_1^{+'}\, m_2^{+'} + \cdots + m_1^{-''}\, m_2^{-''})$. Da

$$M_{11}\, M_{22} - M_{12}^2 > 0$$

ist, läßt sich die inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} L_{11}\, L_{12} \\ L_{21}\, L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}\, M_{12} \\ M_{21}\, M_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

herstellen, *und nachdem dies geschehen, wird*

$$d\varrho_{ik} = \frac{2L_{ik}}{\pi}\, d\sqrt{\lambda} \quad (i, k = 1 \text{ oder } 2).$$

Transformiert man die positive quadratische Form

$$L_{11}\, x_1^2 + 2L_{12}\, x_1\, x_2 + L_{22}\, x_2^2$$

auf eine Quadratsumme, so erkennt man, daß sich die φ_1, φ_2 insbesondere so wählen lassen, daß

$$\begin{pmatrix} L_{11}, & L_{12} \\ L_{21}, & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

wird. Dies ist aber nicht bloß auf eine Weise möglich, sondern wenn φ_1, φ_2 irgendwie dieser normierenden Bedingung gemäß gewählt sind, genügt auch jedes System

$$\varphi_1^* = \varphi_1 \sin\alpha + \varphi_2 \cos\alpha, \quad \varphi_2^* = -\varphi_1 \cos\alpha + \varphi_2 \sin\alpha$$

derselben Bedingung; dabei ist unter α irgend eine stetig differenzierbare Funktion von $\lambda \geqq 0$ zu verstehen.

Das Fouriersche Integraltheorem ist das einfachste Beispiel der eben behandelten Klasse von Integraldarstellungen.

Endlich fassen wir noch das folgende *(vierte) Beispiel* ins Auge:

$$L(u) + \lambda k u \equiv \frac{d^2u}{ds^2} + su + \lambda u = 0.$$

In **H.**, Abs. 22 ist diese Gleichungsschar für das Intervall $0 \leqq s < +\infty$

Digitized by Google

behandelt[1]); jetzt werde das Intervall $-\infty \cdots +\infty$ zu Grunde gelegt, dessen beide Enden vom Grenzpunkttypus sind. Für $s=-\infty$ liegt der einfache durch

$$\lim_{s=-\infty} \frac{q(s)}{k(s)} \left(= \lim_{s=-\infty} (-s)\right) = +\infty$$

charakterisierte Fall vor; $L(u)=0$ muß demnach eine bei $s=-\infty$ quadratisch integrierbare Lösung $w(s)$ besitzen. Benutzen wir die Partikularlösungen

$$u_1(s) = \sqrt{s}\, J_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3} s^{3/2}) = \frac{\sqrt[3]{3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{3k}}{2.3.5.6....3k-1.3k},$$

$$u_2(s) = \sqrt{s}\, J_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3} s^{3/2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}\,\Gamma(\frac{4}{3})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{3k+1}}{3.4.6.7....3k.3k+1},$$

so finden wir aus den Reihenentwicklungen leicht

$$\lim_{s=-\infty} \frac{u_1(s)}{u_2(s)} = -1.$$

Man kann also setzen

$$w(s) = \tfrac{1}{3}\sqrt{s}\left\{J_{-\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}s^{3/2}) + J_{\frac{1}{3}}(\tfrac{2}{3}s^{3/2})\right\};$$

$w(s)$ ist eine ganze transzendente Funktion. *Es ergibt sich für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(s)$*, für welche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s f^2\, ds;\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^2 f}{ds^2}\right)^2 ds$$

konvergieren, *die folgende bemerkenswerte Integraldarstellung*:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(s+\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, w(t+\lambda)\, dt\, d\lambda$$

$$(-\infty < s < +\infty).$$

Infolge der Symmetrie ihrer Grundfunktion $w(s+\lambda)$ mit Bezug auf s

---

1) Ein kleines Versehen in der dort ausgeführten Zwischenrechnung bedarf der Richtigstellung: in den Formeln für $u^{(1)}(s)$ [S. 257, Z. 18 u. 22] ist der Faktor $\sqrt[3]{3}$ durch $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ und infolgedessen S. 268, Z. 16 der Faktor

$$\sqrt[3]{3}\left\{\Gamma(\tfrac{1}{3})\Gamma(\tfrac{2}{3})\right\}^2 \quad \text{durch} \quad 3\left\{\Gamma(\tfrac{1}{3})\Gamma(\tfrac{2}{3})\right\}^2$$

zu ersetzen; das Endresultat bleibt unverändert.

Digitized by Google

und λ läßt sich diese Darstellung aber auch direkt, genau nach Art des Fourierschen Integraltheorems beweisen; dabei genügen betreffs der zu entwickelnden Funktion $f(s)$ die Voraussetzungen, *daß* $f(s)$ *im Endlichen von beschränkter Schwankung und*

$$\frac{e^{-\frac{2}{3}|s|^{3/2}}}{\sqrt[4]{|s|}} f(s)$$

bei $s = -\infty$, $\frac{1}{\sqrt[4]{s}} f(s)$ *aber bei* $s = +\infty$ *absolut integrierbar ist.*

§ 3.

Wir untersuchen jetzt den „*polaren*“ *Fall*[1])

$$L(u) + \lambda k u \equiv \frac{d}{ds}\left(p\frac{du}{ds}\right) - qu + \lambda k u = 0, \tag{14}$$

wobei wir der Einfachheit halber nur das eine Ende des Intervalls als singulär voraussetzen wollen; d. h. wir nehmen an, daß $p(s)$ für $s \geqq 0$ stetig und positiv ist, die stetige Funktion $k(s)$ aber im Gebiet $s \geqq 0$ nicht überall einerlei Vorzeichen besitzt[2]). Von $q(s)$ müssen wir jetzt verlangen, daß $\frac{q(s)}{|k(s)|}$ oberhalb einer festen positiven Schranke, die $= 1$ genommen werden darf, liegt. Für die Aufstellung der Greenschen Funktion kommt dann nicht die in **H.**, Kap. I dargestellte, das Imaginäre benutzende Methode in Betracht, sondern der in den Göttinger Nachrichten 1909, S. 38—43 dargestellte Ansatz. Als Randbedingung an der Stelle $s = 0$ werde $(u)_{s=0} = 0$ gewählt, und es bezeichne $\alpha(s)$ die durch

$$\alpha(0) = 0, \quad p(0)\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_{s=0} = 1$$

bestimmte (monoton wachsende) Lösung von

$$L(u) = 0. \tag{15}$$

Ferner existiert eine für alle s positive, monoton abnehmende Lösung $\beta(s)$ dieser Gleichung, die an der Stelle $s = 0$ den Wert 1 hat und so beschaffen ist, daß $\beta(s) - \varepsilon\alpha(s)$ stets eine Nullstelle im

---

1) **Hilbert**, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung, diese Nachrichten 1906, S. 462—474; **Marty**, Comptes Rendus, 28. Februar u. 7. März 1910; **Fubini**, Annali di Matematica, Ser. III, T. XVII (1910), p. 111.

2) Wir wollen uns vorstellen, daß sich die Nullstellen von $k(s)$ im Endlichen nirgends verdichten.

Digitized by Google

Gebiet $s > 0$ hat, wie auch die positive Konstante ε gewählt sein mag[1]). Da $p(s)\frac{d\beta}{ds}$ eine negative, wachsende Funktion von s ist, konvergiert sie für $s = +\infty$ gegen eine bestimmte Grenze; diese muß 0 sein, falls $\lim_{s=+\infty} \alpha(s) = +\infty$ wird, wie aus der Identität

$$\begin{gathered} p(s)\left(\beta(s)\frac{d\alpha}{ds} - \alpha(s)\frac{d\beta}{ds}\right) = 1, \\ \left|p\beta\frac{d\alpha}{ds}\right| + \left|p\alpha\frac{d\beta}{ds}\right| = 1 \end{gathered} \tag{16}$$

hervorgeht. Ist hingegen $\lim_{s=+\infty} \alpha(s)$ endlich, so ist notwendig $\lim_{s=+\infty} \beta(s) = 0$, da sonst $\beta(s) - \varepsilon\alpha(s)$ für hinreichend kleine positive ε im Bereich $s \geqq 0$ konstantes Vorzeichen besäße. Mithin ist stets

$$\lim_{s=\infty} p(s)\beta(s)\frac{d\beta}{ds} = 0.$$

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{gathered} \int_0^s |k|\alpha^2 ds \leqq \int_0^s \left[p\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + q\alpha^2\right] ds = p\alpha\frac{d\alpha}{ds}, \\ \int_s^\infty |k|\beta^2 ds \leqq \int_s^\infty \left[p\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + q\beta^2\right] ds = -p\beta\frac{d\beta}{ds}, \end{gathered} \tag{17}$$

und da nach (16)

$$p^2\alpha\beta\frac{d\alpha}{ds}\left|\frac{d\beta}{ds}\right| \leqq \tfrac{1}{4}$$

ist, die Ungleichung[2])

$$\int_0^s |k|\alpha^2 ds \cdot \int_s^\infty |k|\beta^2 ds \leqq \tfrac{1}{4}.$$

Die Greensche Funktion setzen wir in der Form an

$$G(s,t) = \begin{cases} \alpha(s)\beta(t) & (s \leqq t) \\ \alpha(t)\beta(s) & (s \geqq t). \end{cases}$$

---

1) Göttinger Nachrichten 1909, S. 39 (Satz 1).

2) Diese Ungleichung ist schärfer als die Göttinger Nachrichten, S. 44 auf anderem Wege erhaltene, in der rechts 1 statt $\frac{1}{4}$ auftritt. In der jetzigen Form ist sie völlig analog zu der für komplexe λ in H., S. 228 bewiesenen.

Digitized by Google

Ist nicht nur $\int_0^\infty |k|\beta^2\,ds$, sondern auch $\int_0^\infty |k|\alpha^2\,ds$ konvergent („Grenzkreisfall"), so könnte hier $\beta(s)$ auch durch gewisse andere Lösungen von $L(u)=0$ ersetzt werden; unser Ansatz bedeutet dann, daß wir im Unendlichen die Randbedingung

$$\lim_{s=+\infty} p(s)\left(u(s)\frac{d\beta}{ds}-\beta(s)\frac{du}{ds}\right)=0$$

zu Grunde legen.

$$K(s,t) = G(s,t)\sqrt{|k(s)\,k(t)|}$$

ist im Sinne der Theorie der singulären Integralgleichungen ein positiv-definiter, beschränkter Kern; es ist nämlich für alle Funktionen $x(s)$, für die $\int_0^\infty x^2\,ds \leqq 1$ ist,

$$0 \leqq K\langle x\rangle \equiv \int_0^\infty\int_0^\infty K(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt \leqq 1.$$

Nunmehr läßt sich die Theorie ganz analog wie bei positivem k entwickeln, wenn man nur überall statt

$$\int_0^\infty ku^2\,ds \quad (\text{für } k>0)$$

jetzt die positiv definite Bildung

$$Gk(u) = Gk(u,u)$$
$$\left\{Gk(u,v) = \int_0^\infty\int_0^\infty G(s,t)\,k(s)\,k(t)\,u(s)\,v(t)\,ds\,dt\right\}$$

den Betrachtungen zu Grunde legt und dementsprechend statt der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int_0^\infty kuv\,ds\right)^2 \leqq \int_0^\infty ku^2\,ds\int_0^\infty kv^2\,ds \quad (\text{für } k>0)$$

jetzt die Ungleichung

$$(Gk(u,v))^2 \leqq Gk(u)\,.\,Gk(v)$$

heranzieht[1]). Außerdem müssen wir noch die folgende Abschätzung benutzen:

1) Vergl. Marty, Comptes Rendus, t. 150 (1910), S. 516.

Digitized by Google

$$\int_0^\infty |k|\, v^2\, ds \leqq Gk(u). \tag{18}$$

Hierin bedeutet u eine stetige Funktion, für welche $\int_0^\infty |k|\, u^2\, ds$ konvergiert, und es ist

$$v(s) = \int_0^\infty G(s,t)\, k(t)\, u(t)\, dt$$

gesetzt.

(18) läßt sich als unmittelbare Folge der Gleichung

$$\int_0^\infty \left[p\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + qv^2\right] ds = Gk(u)$$

auffassen, die ihrerseits den Nachweis der Limesgleichung

$$\lim_{s=\infty} p(s)\, v(s)\, \frac{dv}{ds} = 0 \tag{19}$$

erfordert. Es gelten wegen (16), (17) die Abschätzungen

$$\int_0^\infty |k(t)|\,(G(s,t))^2\, dt \leqq \alpha(s)\,\beta(s),$$

$$\int_0^\infty |k(t)|\left(p(s)\,\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}\right)^2 dt \leqq p^2(s)\,\frac{d\alpha}{ds}\left|\frac{d\beta}{ds}\right|,$$

also

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left(p(s)\, G(s,t)\,\frac{\partial G(s,r)}{\partial s}\right)^2 |k(t)\,k(r)|\, dt\, dr \leqq \tfrac{1}{4}.$$

Nun ist

$$p(s)\, v(s)\,\frac{dv}{ds} = \int_0^\infty\int_0^\infty p(s)\, G(s,t)\,\frac{\partial G(s,r)}{\partial s}\cdot k(t)\,k(r)\,u(t)\,u(r)\, dt\, dr,$$

und es folgt zunächst mittels der Schwarzschen Ungleichung

$$\left|p(s)\, v(s)\,\frac{dv}{ds}\right| \leqq \tfrac{1}{2}\int_0^\infty |k|\, u^2\, ds.$$

Bedenkt man aber noch, daß

$$p(s)\, G(s,t)\,\frac{\partial G(s,r)}{\partial s}$$

Digitized by Google

für $\begin{matrix} 0 \leqq t \leqq a \\ 0 \leqq r \leqq b \end{matrix}$ gleichmäßig mit $\frac{1}{s}$ gegen 0 konvergiert, so ergibt sich die Richtigkeit der Gleichung (19).

Uebrigens ist (18) nur ein anderer Ausdruck für die Beziehung

$$KK\langle x\rangle \leqq K\langle x\rangle,$$

in der KK den iterierten Kern bedeutet. Diese Beziehung ist allgemein gültig für jeden Kern K, dessen zugehörige Integralform $K\langle x\rangle$ für $\int_0^\infty x^2\,ds \leqq 1$ in den Grenzen 0 und 1 liegt.

Es ist wiederum vor allem nötig, über die „zulässigen Lösungen" $\Xi(s;\lambda)$ von

$$L(\Xi) + k\int_0^\lambda \mu\, d_\mu \Xi = 0,$$

d. h. diejenigen Lösungen, welche den Bedingungen

$$\Xi_{s=0} = 0,\ (\Xi_{\lambda=0} = 0,)\ \int_0^\infty |k|\,\Xi^2\,ds \text{ endlich und stetig}$$

genügen, einen Ueberblick zu gewinnen. Wenn $\varphi(s;\lambda)$ etwa die durch

$$\varphi_{s=0} = 0,\quad \left(p(s)\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{s=0} = 1$$

bestimmte Lösung von

$$L(u) + \lambda k u = 0$$

bedeutet, drückt sich ein solches Ξ in der Form aus:

$$\Xi(s;\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(s;\mu)\,d\xi(\mu).$$

Setzen wir

$$Gk(\Delta\Xi) = \Delta\omega,$$

wo ω eine stetige wachsende Funktion von λ ist, so hat der Quotient $\frac{(\Delta\xi)^2}{\Delta\omega}$, gebildet für alle zulässigen Lösungen Ξ, eine bestimmte präzise obere Grenze, die sich als der Zuwachs $\Delta\sigma$ einer stetigen monotonen Funktion σ herausstellt. Damit Ξ eine zulässige Lösung ist, muß demnach jedenfalls $\frac{(d\xi)^2}{d\sigma}$ integrierbar sein, wie aus

Digitized by Google

$$(\Delta\xi)^2 \leqq \Delta\omega\,\Delta\sigma,$$

$$\int_{\Delta} \frac{(d\xi)^2}{d\sigma} \leqq \Delta\omega \tag{21}$$

hervorgeht.

Wir führen

$$\Sigma(s;\lambda) = \int_0^{\lambda} \varphi(s;\mu)\,d\sigma(\mu)$$

ein und haben nun noch zu zeigen, daß für $\Xi = \Sigma$ und auch für

$$\Xi = \int_0^{\lambda} \frac{d\Sigma\,d\xi}{d\sigma}, \quad \text{falls } \frac{(d\xi)^2}{d\sigma}$$

integrierbar ist, das Integral $\int_0^{\infty} |k|(\Delta\Xi)^2\,ds$ konvergiert. Zu diesem Zwecke teilen wir Δ, das wir uns etwa ganz im Gebiet $\lambda > 0$ gelegen denken, in die Teilintervalle $\Delta_h = (\lambda_h, \lambda_{h+1})$, die sämtlich eine Länge $< \varepsilon$ besitzen mögen, und bilden

$$\Delta \mathsf{H}_\varepsilon = \sum_{(h)} \left(\lambda_h \frac{\Delta_h \xi^{(h)}}{\Delta_h \omega^{(h)}} \frac{\Delta_h \xi}{\Delta_h \sigma}\, \Delta_h \Xi^{(h)} \right).$$

Dabei sind die

$$\Xi^{(h)} = \int_0^{\lambda} \varphi(s;\mu)\,d\xi^{(h)}(\mu)$$

zulässige Lösungen, für welche die Ungleichungen

$$\Delta_h \sigma \geqq \frac{(\Delta_h \xi^{(h)})^2}{\Delta_h \omega^{(h)}} = \frac{(\Delta_h \xi^{(h)})^2}{Gk(\Delta_h \Xi^{(h)})} \geqq (1-\varepsilon)\,\Delta_h \sigma$$

statthaben. Wir bilden

$$Gk(\Delta \mathsf{H}_\varepsilon) = \sum_h Gk(\Delta_h \mathsf{H}_\varepsilon) = \sum_h \lambda_h^2 \frac{(\Delta_h \xi^{(h)})^2}{(\Delta_h \omega^{(h)})^2} \frac{(\Delta_h \xi)^2}{(\Delta_h \sigma)^2}\, \Delta_h \omega^{(h)}$$

$$\leqq \sum_h \lambda_h^2 \frac{(\Delta_h \xi)^2}{\Delta_h \sigma} \leqq \int_{\Delta} \lambda^2 \frac{(d\xi)^2}{d\sigma}$$

und finden nach (18), wenn die Bezeichnung

$$\Delta \Xi_\varepsilon = \int_0^{\infty} G(s,t)\,k(t)\,\Delta \mathsf{H}_\varepsilon(t)\,dt = \sum_h \left\{ \frac{\Delta_h \xi^{(h)}}{\Delta_h \omega^{(h)}} \frac{\Delta_h \xi}{\Delta_h \sigma} \cdot \lambda_h \int_{\Delta_h} \frac{\varphi(s;\mu)\,d\xi^{(h)}(\mu)}{\mu} \right\}$$

Digitized by Google

eingeführt wird,

$$\int_0^\infty |k|(\Delta\Xi_\varepsilon)^2\,ds \leqq \int_\Delta \lambda^2 \frac{(d\xi)^2}{d\sigma}.$$

Da aber gleichmäßig in jedem endlichen Intervall der Variablen s

$$\lim_{\varepsilon=0} \Delta\Xi_\varepsilon = \Delta\Xi$$

gilt, muß in der Tat

$$\int_0^\infty |k|(\Delta\Xi)^2\,ds \leqq \int_\Delta \lambda^2 \frac{(d\xi)^2}{d\sigma}$$

sein. Nebenbei erhalten wir also noch für jede zulässige Lösung Ξ die Ungleichung

$$\int_0^\infty |k|(\Delta\Xi)^2\,ds \leqq \lambda_M^2 \,.\, Gk(\Delta\Xi);$$

λ_M^2 bedeutet das Maximum von λ^2 in Δ.

Nachdem so die quadratische Integrierbarkeit von $\sqrt{|k|}\,.\,\Delta\Xi$ sichergestellt ist, schließen wir leicht

$$\Delta\omega = Gk(\Delta\Xi) = \int_\Delta \frac{(d\xi)^2}{d\sigma},$$

insbesondere also

$$Gk(\Delta\Sigma) = \Delta\sigma.$$

Dies geschieht am einfachsten so: Man setze

$$\Delta\Xi_\varepsilon^* = \sum_h \frac{\Delta_h\xi^{(h)}}{\Delta_h\omega^{(h)}} \frac{\Delta_h^q\xi}{\Delta_h\sigma} \Delta_h\Xi^{(h)};$$

dann ist

$$Gk(\Delta\Xi_\varepsilon^*) = \sum_h \frac{(\Delta_h\xi^{(h)})^2}{(\Delta_h\omega^{(h)})^2} \frac{(\Delta_h\xi)^2}{(\Delta_h\sigma)^2} \Delta_h\omega^{(h)} \leqq \sum_h \frac{(\Delta_h\xi)^2}{\Delta_h\sigma} \leqq \int_\Delta \frac{(d\xi)^2}{d\sigma},$$

also

$$|Gk(\Delta\Xi, \Delta\Xi_\varepsilon^*)|^2 \leqq Gk(\Delta\Xi)\,Gk(\Delta\Xi_\varepsilon^*) \leqq \Delta\omega \,.\, \int_\Delta \frac{(d\xi)^2}{\delta\sigma} \tag{22}$$

und

$$\int_0^\infty |k|(\Delta\Xi_\varepsilon^*)^2\,ds \leqq \lambda_M^2 \,.\, Gk(\Delta\Xi_\varepsilon^*) \leqq \lambda_M^2 \,.\, \int_\Delta \frac{(d\xi)^2}{d\sigma}. \tag{23}$$

Da $\Delta\Xi_\varepsilon^*$ gleichmäßig in jedem endlichen Intervall von s gegen $\Delta\Xi$

Digitized by Google

konvergiert und $\int_0^\infty |k|(\Delta\Xi_\varepsilon^*)^2 ds$ nach (23) für alle ε unterhalb einer festen Grenze bleibt, schließen wir aus (22)

$$\lim_{\varepsilon=0} Gk(\Delta\Xi, \Delta\Xi_\varepsilon^*) = Gk(\Delta\Xi) = \Delta\omega,$$

$$\left(\int_\Delta \frac{(d\xi)^2}{d\sigma} \leqq\right) \Delta\omega \leqq \int_\Delta \frac{(d\xi)^2}{d\sigma}.$$

Aus

$$Gk(\Delta\Sigma) \leqq \int_\Delta |k|(\Delta\Sigma)^2 ds$$

ergibt sich

$$\Delta\sigma \leqq \int_\Delta \lambda^2 d\sigma,$$

d. h. im Intervall $-1 \leqq \lambda \leqq +1$ ist $\sigma(\lambda)$ konstant: das („polare") Streckenspektrum läßt ebenso wie das Punktspektrum das Intervall $-1 \cdots +1$ ganz frei. Hingegen erstreckt sich das Spektrum sowohl nach links wie nach rechts hin ins Unendliche.

Bilden wir die adaptierten Eigendifferentiale $d\mathsf{P}$ gemäß der Gleichung

$$d\mathsf{P} = \frac{d\Sigma}{\lambda},$$

so lautet der Entwicklungssatz (im Grenzpunktfalle):

Die Funktion $f(s)$ möge so beschaffen sein, daß für alle $s \geqq 0$, für die $k(s) \neq 0$,

$$f, \quad L(f), \quad L\left(\frac{1}{k} L(f)\right)$$

stetig sind, während an den Nullstellen von $k(s)$ und im Unendlichen die Integrale

$$\int_0^\infty |k| f^2 ds, \quad \int_0^\infty \frac{1}{|k|} (L(f))^2 ds, \quad \int_0^\infty \frac{1}{|k|} \left\{L\left(\frac{1}{k} L(f)\right)\right\}^2 ds$$

konvergieren sollen; ferner werde

$$\lim_{s=0} f = 0, \quad \lim_{s=0} \frac{1}{k} L(f) = 0$$

vorausgesetzt: dann gilt eine gleichmäßig und absolut konvergente Entwicklung

Digitized by Google

$$f(s) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi(s;\lambda)\, C(\lambda) + \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi(s;\lambda)\, d\Gamma(\lambda),$$

deren Koeffizienten sich aus den adaptierten Eigenfunktionen und Eigendifferentialen R, $d\mathsf{P}$ *nach den Formeln*

$$C(\lambda) = \int_0^\infty kfR\, ds, \quad \Delta\Gamma = \int_0^\infty kf\Delta\mathsf{P}\, ds$$

berechnen.

Göttingen, den 1. Juli 1910.

Digitized by Google

Ueber die Integration eines bestimmten Integrals in Bezug auf einen Parameter.

Von

Leon Lichtenstein in Charlottenburg.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 23. Juli 1910.

In den folgenden Zeilen sollen einige Sätze über die zweimalige Integration von Funktionen zweier reeller Veränderlichen abgeleitet werden.

I. Es sei $f(x,y)$ eine im Gebiete

$$(1) \qquad \begin{matrix} x_1 \lessgtr x \leqq x_2, \\ y_1 \lessgtr y \leqq y_2 \end{matrix}$$

erklärte beschränkte Funktion von x und y.

Die Funktion $f(x,y)$ möge für alle y in Bezug auf x im Riemann'schen und für alle x in Bezug auf y im Lebesgue'schen Sinne integrierbar (sommable) sein.

Alsdann ist das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$ im Lebesgue'schen Sinne, das Integral $\int_{y_1}^{y_2} {}_L f(x,y)\,dy$ [1] im Riemann'schen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$(2) \qquad \int_{y_1}^{y_2} {}_L dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} {}_L f(x,y)\,dy. \text{ [2]}$$

1) Zur Unterscheidung fügen wir, wenn es sich um die Lebesgue'schen Integrale handelt, dem Integralzeichen den Buchstaben L bei.

2) Daß das Integral $\int_{y_1}^{y_2} {}_L f(x,y)\,dy$ im Riemann'schen Sinne integrierbar ist,

Digitized by Google

Der Beweis wird sehr einfach, wenn man sich der folgenden Sätze von Herrn Lebesgue bedient.

Ist eine (beschränkte) Funktion $\varphi(x)$ im Riemann'schen Sinne integrierbar, so ist

$$(3) \qquad \int_L \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x)\,dx.$$

Konvergiert eine Reihe im Lebesgue'schen Sinne integrierbarer Funktionen $\varphi_n(x)$ in allen Punkten eines Intervalls gegen eine Funktion $\varphi(x)$ und ist für alle n

$$(4) \qquad |\varphi_n(x)| < M,$$

worin M eine Konstante bedeutet, so ist die Funktion $\varphi(x)$ im Lebesgue'schen Sinne integrierbar und es ist

$$(5) \qquad \int_L \varphi(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_L \varphi_n(x)\,dx.\ ^{1}).$$

Von diesen Sätzen machen wir in folgender Weise Gebrauch. Es ist

$$(6) \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx = \lim_{h=\frac{x_2-x_1}{n}=0} [f(\xi_1,y)\,h + f(\xi_2,y)\,h + \cdots + f(\xi_n,y)\,h],$$

worin $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ beliebige in den Intervallen

$$(x_1, x_1+h),\quad (x_1+h, x_1+2h),\quad \ldots,\quad (x_1+(n-1)h, x_2)$$

liegende Werte bedeuten. Der eingeklammerte Ausdruck stellt eine für alle h im Riemann'schen und a fortiori im Lebesgue'schen Sinne integrierbare Funktion von y dar. Da überdies

$$(7) \qquad |f(\xi_1,y)\,h + \cdots + f(\xi_n,y)\,h| \leqq |x_2 - x_1| \cdot \text{obere Grenze von } |f(x,y)|$$

ist, so ist die Funktion $\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$ im Lebesgue'schen Sinne integrierbar. Ferner ist

---

ist von Herrn H. W. Joung in der vor kurzem erschienenen inhaltreichen Abhandlung, On parametric integration, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1910, S. 125—149, gezeigt worden. Das Verfahren von Herrn Joung ist von dem in dieser Arbeit benutzten verschieden.

1) Vgl. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, S. 114.

Digitized by Google

$$\int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx = \lim_{h=\frac{x_2-x_1}{n}=0} [h\int_{y_1}^{y_2}{}_L f(\xi_1, y)\,dy$$

(8)

$$+ h\int_{y_1}^{y_2}{}_L f(\xi_2, y)\,dy + \cdots + h\int_{y_1}^{y_2}{}_L f(\xi_n, y)\,dy] = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2}{}_L f(x,y)\,dy.$$

Hiermit ist unser Satz bereits bewiesen.

Als Korollar ergibt sich der folgende Satz II.

Es sei $f(x,y)$ eine im Gebiete (1) erklärte beschränkte Funktion von x und y.

Die Funktion $f(x,y)$ möge für alle y in Bezug auf x und für alle x in Bezug auf y im Riemann'schen Sinne integrierbar sein. Alsdann ist

1. $\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$ eine im Riemann'schen Sinne integrierbare Funktion von y,

2. $\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$ eine im Riemann'schen Sinne integrierbare Funktion von x.

Es ist ferner

(9) 3. $$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx.$$

Dem Satze I zufolge sind, in der Tat, die beiden Integrale

$$\int_{x_1}^{x_2}{}_L f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{y_1}^{y_2}{}_L f(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$$

im Riemann'schen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx = \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$$

(10)

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2}{}_L f(x,y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy.$$

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich zum Teil auf uneigentliche Integrale übertragen.

Es sei $\psi(x)$ eine in dem Intervalle $x_1 \leqq x \leqq x_2$ erklärte nicht beschränkte Funktion. Es mögen

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots \quad \text{und} \quad M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$$

Digitized by Google

zwei Reihen unbegrenzt wachsender positiver Zahlen bedeuten. Wir führen eine unendliche Reihe von Funktionen $\psi_k(x)$ durch folgende Festsetzungen ein. Es ist $\psi_k(x) = \psi(x)$ in allen Punkten, in denen $-M_k \gtreqless \psi(x) \leqq N_k$; ferner ist $\psi_k(x) = N_k$, wenn $\psi(x) > N_k$, $\psi_k(x) = -M_k$, wenn $\psi(x) < -M_k$. Nunmehr definieren wir mit Herrn de la Vallée Poussin das uneigentliche Integral $\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx$ durch die Gleichung

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx = \lim_{k=\infty} \int_{x_1}^{x_2} \psi_k(x)\,dx. \tag{11}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Funktionen $\psi_k(x)$ im Riemannschen Sinne integrierbar sind und daß der Grenzwert (11) existiert und von der besonderen Wahl der Größen N_k und M_k unabhängig ist. Dieses uneigentliche Integral wird im folgenden durch den unten angehängten Buchstaben V gekennzeichnet.

III. Es sei $f(x, y)$ eine im Gebiete (1) erklärte nicht beschränkte Funktion, die folgende Eigenschaften hat:

1. Die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{x_1}^{x_2}{}_V f(x, y)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x, y)\,dy \tag{12, 13}$$

sind vorhanden.

2. Die stets vorhandenen Integrale

$$\int_{x_1}^{x_2}{}_V |f(x, y)|\,dx \quad \text{und} \quad \int_{y_1}^{y_2}{}_V |f(x, y)|\,dy$$

stellen beschränkte Funktionen von y und x dar.

Alsdann sind die beiden Integrale (12) und (13) im Lebesgue'schen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$\int_{x_1}^{x_2}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x, y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2}{}_V f(x, y)\,dx. \tag{14}$$

Es sei, wie oben, gesetzt:

$$\begin{aligned} &f_k(x, y) = f(x, y), \text{ wenn } -M_k \gtreqless f(x, y) \leqq N_k, \\ &f_k(x, y) = N_k, \text{ sobald } f(x, y) > N_k, \; f_k(x, y) = -M_k, \\ &\qquad\qquad \text{wenn } f(x, y) < -M_k. \end{aligned} \tag{15}$$

Dem Satze II zufolge sind die beiden Integrale

Digitized by Google

$$\int_{x_1}^{x_2} f_k(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{y_1}^{y_2} f_k(x,y)\,dy$$

im Riemann'schen und a fortiori im Lebesgue'schen Sinne integrierbar. Es ist ferner

$$(16) \qquad \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2} f_k(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2} f_k(x,y)\,dy.$$

Es sei

$$(17) \qquad \int_{x_1}^{x_2}{}_V |f(x,y)|\,dx < P, \quad \int_{y_1}^{y_2}{}_V |f(x,y)|\,dy < P,$$

worin P eine Konstante bedeutet. Offenbar ist alsdann für alle k

$$(18) \qquad \left|\int_{x_1}^{x_2} f_k(x,y)\,dx\right| < P, \quad \left|\int_{y_1}^{y_2} f_k(x,y)\,dy\right| < P.$$

Dem bereits einmal benutzten Lebesgue'schen Satze zufolge ist also das Integral

$$(19) \qquad \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \left[\lim_{k=\infty} \int_{x_1}^{x_2} f_k(x,y)\,dx\right] = \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2}{}_V f(x,y)\,dx$$

vorhanden und gleich $\lim\limits_{k=\infty} \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2} f_k(x,y)\,dx.$

Desgleichen ist

$$(20) \qquad \int_{x_1}^{x_2}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x,y)\,dy = \lim_{k=\infty} \int_{x_1}^{x_2}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2} f_k(x,y)\,dy.$$

Hieraus und aus der Beziehung (16) folgt endlich

$$(21) \qquad \int_{x_1}^{x_2}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2}{}_V f(x,y)\,dx.$$

Damit sind alle unsere Behauptungen bewiesen.

Durch eine geringfügige Abänderung des zuletzt angewandten Beweisverfahrens erhält man schließlich den folgenden Satz IV.

Die nicht beschränkte Funktion $f(x,y)$ möge für alle y das uneigentliche Integral (22) $\int_{x_1}^{x_2}{}_V f(x,y)\,dx$ und für alle x das im Sinne von Herrn Lebesgue genommene Integral (23) $\int_{y_1}^{y_2}{}_L f(x,y)\,dy$ besitzen.

Digitized by Google

Sind $\int_{x_1}^{x_2}{}_V |f(x,y)|\,dx$ und $\int_{y_1}^{y_2}{}_L |f(x,y)|\,dy$ beschränkte Funktionen von y und x, so sind die Funktionen (22) und (23) im Lebesgue'schen Sinne integrierbar. Es ist ferner

$$\int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2}{}_V f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_L f(x,y)\,dy. \tag{24}$$

Beachten wir, daß

$$\int_{x_1}^{x_2}{}_V f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}{}_L f(x,y)\,dx$$

ist, so können wir für (24) auch die symmetrische Formel

$$\int_{x_1}^{x_2}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_L f(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2}{}_L f(x,y)\,dx \tag{25}$$

setzen.

Nun noch ein Satz über die Integrale mit unendlichen Grenzen.

V. Es sei $f(x,y)$ eine im Gebiete

$$\begin{aligned} x_1 &\leqq x, \\ y_1 &\leqq y \leqq y_2 \end{aligned} \tag{26}$$

erklärte nicht notwendig beschränkte Funktion, die folgende Eigenschaften hat:

Es gibt eine Zahl M, so daß für $y_1 \leqq y \leqq y_2$ und für alle $X > x_1$

$$\int_{x_1}^{X}{}_V |f(x,y)|\,dx < M, \tag{27}$$

für alle $x \geqq x_1$

$$\int_{y_1}^{y_2}{}_V |f(x,y)|\,dy < M. \tag{28}$$

Alsdann sind die beiden Integrale

$$\int_{x_1}^{\infty}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{\infty}{}_V f(x,y)\,dx$$

vorhanden. Ferner ist

$$\int_{x_1}^{\infty}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{\infty}{}_V f(x,y)\,dx. \tag{29}$$

Digitized by Google

Dem Satze III gemäß sind für alle $X > x_1$ die beiden Integrale

$$\int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{X}{}_V f(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1}^{X}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x,y)\,dy$$

vorhanden. Ferner ist

$$\int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{X}{}_V f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{X}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x,y)\,dy. \tag{30}$$

Nach der Voraussetzung ist für alle X

$$\left| \int_{x_1}^{X}{}_V f(x,y)\,dx \right| < M. \tag{31}$$

Dem wiederholt benutzten Lebesgue'schen Satze zufolge ist daher die Funktion

$$\lim_{X=\infty} \int_{x_1}^{X}{}_V f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{\infty}{}_V f(x,y)\,dx$$

im Lebesgue'schen Sinne integrierbar. Ferner ist

$$\lim_{X=\infty} \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{X}{}_V f(x,y)\,dx = \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \lim_{X=\infty} \int_{x_1}^{X}{}_V f(x,y)\,dx$$

$$= \int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{\infty}{}_V f(x,y)\,dx = \lim_{X=\infty} \int_{x_1}^{X}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{x_1}^{\infty}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x,y)\,dy.$$

Man überzeugt sich leicht, daß das Integral $\int_{x_1}^{\infty}{}_L dx \int_{y_1}^{y_2}{}_V f(x,y)\,dy$ unbedingt konvergiert.

Der Satz I läßt sich auf die Integrale von Stieltjes ausdehnen.

VI. Es sei $\alpha(x)$ eine für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ erklärte Funktion von beschränkter Schwankung. Die Funktion $f(x,y)$ möge folgende Eigenschaften haben:

1. Sie ist in dem Gebiete

$$x_1 \leqq x \leqq x_2,$$
$$y_1 \leqq y \leqq y_2$$

beschränkt und in Bezug auf y im Lebesgue'schen Sinne integrierbar.

Digitized by Google

2. Das Integral von Stieltjes

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)d\alpha(x) \tag{33}$$

ist für alle y in dem Intervalle $y_1 \leqq y \leqq y_2$ vorhanden[1]).

Alsdann sind die beiden Integrale

$$\int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,d\alpha(x) \tag{34}$$ und $$\int_{x_1}^{x_2} d\alpha(x) \int_{y_1}^{y_2}{}_L f(x,y)\,dy \tag{35}$$

vorhanden und einander gleich.

Der Beweis ist dem Beweise des Satzes I ganz analog. Es ist

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,d\alpha(x) = \lim_{h=\frac{x_2-x_1}{n}=0} \Big[f(\xi_1,y)\{\alpha(x_1+h)-\alpha(x_1)\} \tag{36}$$

$$+f(\xi_2,y)\{\alpha(x_1+2h)-\alpha(x_1+h)\}+\cdots+f(\xi_n,y)\{\alpha(x_2)-\alpha(x_2-h)\}\Big],$$

worin $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ beliebige entsprechend in den Intervallen

$$(x_1, x_1+h),\ (x_1+h, x_1+2h),\ \ldots,\ (x_2-h, x_2)$$

gelegene Werte bedeuten. Der eingeklammerte Ausdruck stellt eine im Lebesgue'schen Sinne integrierbare Funktion dar. Da überdies

$$|f(\xi_1,y)\{\alpha(x_1+h)-\alpha(x_1)\}+\cdots+f(\xi_n,y)\{\alpha(x_2)-\alpha(x_2-h)\}| \tag{37}$$

$$< \sum_{i=1}^{n} |\alpha(x_1+ih)-\alpha(x_1+\overline{i-1}\,h)|\,.\ \text{obere Grenze von } |f(x,y)| < Q,$$

worin Q eine Konstante bedeutet, so ist, wie behauptet,

$$\int_{y_1}^{y_2}{}_L dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,d\alpha(x) = \lim_{h=\frac{x_2-x_1}{n}=0} \Big[\int_{y_1}^{y_2}{}_L f(\xi_1,y)\,dy\,.\,\{\alpha(x_1+h)-\alpha(x_1)\}+\cdots \tag{38}$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}{}_L f(\xi_n,y)\,dy\,.\,\{\alpha(x_2)-(x_2-h)\}\Big] = \int_{x_1}^{x_2} d\alpha(x) \int_{y_1}^{y_2}{}_L f(x,y)\,dy.$$

---

1) Dieses tritt z. B. ein, wenn die Funktion $f(x,y)$ in Bezug auf x stetig ist, oder wenn $f(x,y)$ in Bezug auf x im Riemann'schen Sinne integrierbar ist, während die Funktion $\alpha(x)$ der Bedingung genügt

$$|\alpha(x')-\alpha(x)| < k|x'-x|,$$

worin k eine beliebige Konstante bedeutet.

Digitized by Google

Ueber die Fehlerquellen der Kaufmann-Simon'schen Methode zur Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons.

Von

K. Lerp.

(Vorläufige Mitteilung).

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung vom 23. Juli 1910.

Die neuesten Bestimmungen des Verhältnisses $\frac{\varepsilon}{\mu}$, der Ladung zur Masse des Elektrons, haben Werte ergeben, welche beträchtlich tiefer liegen als die bekannte Kaufmann-Simon'sche Zahl $(1{,}88 \cdot 10^7)$. Zur Erklärung dieser auffallenden Differenz sind eine ganze Reihe von Vermutungen ausgesprochen worden über die möglichen Fehlerquellen der Kaufmann-Simon'schen Methode, aber ohne daß bisher irgend etwas erwiesen worden wäre. Zweck der vorliegenden Untersuchung ist es, jene Frage der Fehlerquellen einer genaueren Prüfung zu unterziehen.

I. Wiederholung der Simonschen Arbeit.

Da die Arbeit von Sally Simon[1]) die grundlegende ist, so sind an seiner speziellen Anordnung die möglichen Fehler untersucht worden. Um zunächst einen Ueberblick zu gewinnen über die Fehlerquellen dieser besondern Versuchsanordnung und der praktischen Ausführung, blieb nichts anderes übrig, als die gesamte Simon'sche Arbeit zu wiederholen. Die relative Feldmessung er-

1) S. Simon, Wied. Ann. 69, p. 589, 1899.

Digitized by Google

folgte dabei nach einem verbesserten Prinzip in der Weise, daß das Magnetfeld der Apparatspulen kompensiert wurde durch das einer großen Spule. Die Spulenströme wurden jedesmal so reguliert, daß der kleine Magnet, welcher als Meßinstrument diente, keine Drehung erfuhr. Die experimentelle Bestimmung der absoluten Feldstärke im Mittelpunkt der gemeinsamen Spulenachse geschah mit Hilfe zweier genau ausgemessener Vergleichsspulen, welche konzentrisch über die beiden Apparatspulen geschoben wurden. Der auf diese Weise ermittelte Wert der absoluten Feldstärke im Mittelpunkt ergab sich zu

$$H_0 = 8{,}123, \text{ Gauß (für 1 Amp.)}$$

Aus den Dimensionen der Apparatspulen wurde berechnet

$$H_0 = 8{,}115 \text{ Gauß.}$$

Bei den Beobachtungen an Kathodenstrahlen erfolgte die Messung der magnetischen Ablenkung mit Hilfe eines Kathetometers, welches Ablesungen bis 0,02 mm gestattete.

Die ersten Messungsreihen bei dieser Wiederholung der Simonschen Arbeit ergaben die folgenden Werte für $\frac{\varepsilon}{\mu}$:

$$1{,}712 \qquad 1{,}709 \qquad 1{,}711 \text{ und } 1{,}721 \cdot 10^7.$$

Da eine Aenderung des Magnetfeldes im Laufe der Zeit nicht ausgeschlossen schien, so wurde die Feldmessung nach Beendigung dieser Versuche noch einmal wiederholt.

Bei den weiteren Beobachtungen an Kathodenstrahlen gelang es, durch schnelleres und langsameres Laufenlassen der Influenzmaschine die Spannung für längere Zeit konstant zu halten, sodaß ganze Beobachtungsreihen mit demselben Potential ausgeführt werden konnten. Es wurde auf diese Weise möglich, die Schwankungen der Einzelwerte vom Mittelwert bis auf $^1/_2$ % herabzudrücken (bei Simon 3 %). Aus 8 Versuchsreihen mit je 5 Beobachtungen ergaben sich die folgenden Mittelwerte:

1,702	1,715	1,706	1,707
1,705	1,711	1,706	u. $1{,}707 \cdot 10^7$

Mittel: $\frac{\varepsilon}{\mu} = 1{,}707 \cdot 10^7$, und umgerechnet auf die Geschwindigkeit Null (nach der Lorentz'schen Theorie):

$$\frac{\varepsilon}{\mu_0} = 1{,}72 \cdot 10^7.$$

Digitized by Google

II. Die nicht ganz einwandfreien theoretischen Voraussetzungen der Kaufmann-Simon'schen Methode.

Die theoretische Ableitung Simons setzt stillschweigend voraus, daß die Kathodenstrahlen parallel laufen. In Wirklichkeit ist jedoch eine beträchtliche Divergenz vorhanden, derart, daß es nach ausgeführten Messungen den Anschein hat, als kämen die Strahlen her von einem Punkte, der etwas hinter der Kathode liegt. Geht man einmal von dieser Annahme aus, so läßt sich auf Grund der experimentell gefundenen Daten berechnen, um wie viel die magnetische Ablenkung der Strahlen zu groß erscheinen muß. Diese Differenz liegt für die benutzten Spulenströme (bei einer bestimmten Einstellung) zwischen 0,02 und 0,04 mm, d. h. es wird der Endwert $\frac{\varepsilon}{\mu}$ um $^1/_2$ bis 1 % zu groß ausfallen. Ein solcher systematischer Fehler kann für eine exakte Messung nicht mehr vernachlässigt werden, nur erscheint es schwierig, bei den komplizierten Verhältnissen, die in Wirklichkeit vorliegen, irgend eine Korrektion anzubringen.

Weitere Untersuchungen über die Störungen infolge des Erdfeldes oder einer möglichen negativen Ladung der Fluorescenzscheibe zeigten, daß ein solcher Einfluß nicht vorhanden ist.

Es ist dann insbesondere von J. J. Thomson[1]) darauf hingewiesen worden, daß die Elektronen möglicherweise erst in einiger Entfernung von der Kathode entstehen, und infolgedessen ein merklicher Bruchteil des Entladungspotentials V_0 nicht in Rechnung käme. Es würde dann die der Kaufmann'schen Methode zu Grunde liegende Gleichung $\frac{\mu}{2} v^2 = \varepsilon V_0$ nicht gelten (v = Geschwindigkeit der Elektronen). Zur Untersuchung dieser Frage wurde eine von Lenard und Kaufmann herrührende Methode benutzt, welche auch A. Becker[2]) bei seinen Messungen verwendet hat: die Verzögerung resp. Beschleunigung der Kathodenstrahlen durch ein starkes elektrostatisches Feld, dessen Kraftlinien mit der Richtung der Kathodenstrahlen zusammenfallen. Aus der Simon'schen Endformel leiten sich dann 2 Gleichungen ab, aus denen man das tatsächlich zur Beschleunigung dienende Potential berechnen kann. Bei der experimentellen Ausführung dieser Messungen be-

1) J. J. Thomson, Conductivity of El. through gases, 2. Aufl. 1906, p. 128
2) A. Becker, Ann. 17. 1905, p. 381.

Digitized by Google

trug das Entladungspotential 10000 Volt. Aus 2 Versuchsreihen mit 13 resp. 12 Beobachtungen ergaben sich die Mittelwerte

$$V = 9910 \text{ Volt und } 9980 \text{ Volt.}$$

Es kann natürlich nicht behauptet werden, daß damit ein strenger Beweis für die Gültigkeit der Energie-Gleichung erbracht sei, da irgend welche Störungen infolge des verhältnismäßig hohen Druckes (0,04 bis 0,05 mm Quecksilber) sich nicht übersehen lassen.

Es blieb schließlich noch ein letzter, ebenfalls von J. J. Thomson erhobener Einwand zu prüfen: eine mögliche Verzögerung der Elektronen durch die Gasmoleküle. Um über diese Möglichkeit ein Urteil zu gewinnen, wurden Versuche angestellt mit einem Wehneltrohr, welches ebenfalls die von Simon angegebenen Dimensionen hatte. Es gelang in der Tat, bei bedeutend kleineren Drucken (bis 0,002 mm Quecksilber) Beobachtungen auszuführen.

Als Mittelwert ergab sich dabei $\frac{\varepsilon}{\mu} = 1{,}726 \cdot 10^7$.

III. Zusammenfassung der Resultate.

Der bei der Wiederholung der Simon'schen Arbeit gefundene Wert $\frac{\varepsilon}{\mu_0} = 1{,}72 \cdot 10^7$ weicht noch etwas mehr als die neuerdings erhaltenen Resultate von der Simon'schen Zahl ab, trotzdem die Messungen in derselben Weise ausgeführt sind. Man könnte versucht sein, eine erste Erklärung dieser Differenz in den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern der Einzelmessungen zu suchen. Die Fehlergrenzen derselben habe ich mich bemüht, möglichst genau festzustellen, und nach den erhaltenen Resultaten ergibt die Rechnung die folgende Genauigkeit im Endwert $\frac{\varepsilon}{\mu}$:

Aus der relativen Feldmessung eine mögliche Schwankung um	0,4 %,
aus der absoluten Feldmessung	0,2 %,
aus den beiden Integrationen	0,1 %,
aus der Einstellung und Ausmessung	1,2 %,
aus der Eichung des Elektrometers	0,3 %
Sa. . . .	2,2 %.

Dabei ist die Genauigkeit eher zu hoch als zu niedrig eingeschätzt und wird auf nicht mehr als ± 3 % zu veranschlagen sein. Immerhin reicht diese recht beträchtliche Fehlergrenze nicht aus, eine Differenz zu erklären. Dagegen lassen sich gegen die Aus-

Digitized by Google

führung der Simon'schen Arbeit selbst einige schwere Bedenken geltend machen:

1) Der unregelmäßige Feldverlauf, wie er zu Tage tritt, wenn man die Simon'sche Kurve in starker Vergrößerung zeichnet, ist nicht ohne Einfluß auf das Doppelintegral $\int dx \int H dx$, welches in den Endwert $\frac{\varepsilon}{\mu}$ quadratisch eingeht.

2) Bedenklich erscheint die Abweichung des experimentell ermittelten Wertes der absoluten Feldstärke von dem berechneten, was im Endwert 2,4 % ausmacht.

3) Endlich bezieht Simon alle Messungen auf die Marke eines Spulenrandes. Da sein ganzer Apparat auf Holz aufgebaut war, so erscheint eine Verziehung im Laufe der Zeit nicht ausgeschlossen; eine Verschiebung der Meßmarke aber nur um Bruchteile eines Millimeters macht alle Exaktheit der Einzelmessungen illusorisch.

Was die Arbeiten von W. Seitz [1]) und A. Becker [2]) angeht, welche das Simon'sche Resultat durchaus bestätigten, so diente die Bestimmung von $\frac{\varepsilon}{\mu}$ bei W. Seitz nur zur Prüfung seiner ganzen Einstellung und kann daher nicht als Präzisionsmessung angesehen werden. Die von A. Becker erhaltenen Resultate aber sind keineswegs exakter als die aller vorhergehenden Messungen, wie er behauptet. Im Gegenteil sind die Abweichungen in seinen Einzelmessungen bedeutend größer als bei S. Simon, und selbst die aus den einzelnen Reihen abgeleiteten Mittelwerte liegen noch um 6 % auseinander. Mit welcher Genauigkeit die Feldmessung durchgeführt wurde, entzieht sich leider der Kritik, da numerische Angaben über den Feldverlauf fehlen.

Es sei schließlich noch hervorgehoben, daß die aus den Untersuchungen über die theoretischen Fehlerquellen gezogenen Folgerungen bestehen bleiben, gleichgültig, welches der wirkliche Wert von $\frac{\varepsilon}{\mu}$ ist, da es sich hier nur um vergleichende Messungen handelt, wie es überhaupt nicht der Zweck der Arbeit war, eine Neubestimmung für $\frac{\varepsilon}{\mu}$ zu liefern. Nach diesen Ergebnissen sind alle über jene Fehlerquellen ausgesprochenen Vermutungen nicht zutreffend, sind jedenfalls nicht derart, daß sie die Differenz gegen-

1) W. Seitz, Ann. 8, p. 233, 1902.
2) A. Becker, Ann. 17, p. 381, 1905.

Digitized by Google

über den neuesten Messungen zu erklären vermöchten. Gegen die Kaufmann-Simon'sche Methode überhaupt fällt nur der von A. Bestelmeyer erhobene Einwand ins Gewicht: die Vernachlässigung der Divergenz der Kathodenstrahlen. Theoretisch scheint das der einzige Mangel jener Methode zu sein, der allerdings ausreicht, sie für Präzisionsmessungen untauglich zu machen, ganz abgesehen von den komplizierten Fehlerquellen, welche sich bei der praktischen Ausführung einstellen.

Digitized by Google

Ueber den letzten Fermatschen Lehrsatz.

Von

Felix Bernstein.

Vorgelegt in der Sitzung am 23. Juli 1910 von Herrn D. Hilbert.

Unter den Voraussetzungen

I 1) der zweite Faktor $h_2 = l^\mu h_2'$ der Klassenzahl $h = h_1 h_2$ des Kreiskörpers $k(\zeta)$ der l-ten Einheitswurzeln ist wenigstens einmal durch l teilbar, ($\mu > 0$, h_2' zu l prim),

I 2) in dem Teilklassenkörper l^μ-ten Grades, welcher zu dem Faktor l^μ von h_2 gehört (d. h. aus dem Teilklassenkörper $\overline{Kk}$ l^μ-ten Grades von $k(\zeta+\zeta^{-1})$ durch Adjunktion von ζ entsteht) werden alle Ideale von $k(\zeta)$, deren l-te Potenzen Hauptideale in $k(\zeta)$ sind, selbst Hauptideale,

wird gezeigt werden, daß die Fermatsche Gleichung

$$a^l + b^l + c^l = 0 \tag{1}$$

in ganzen rationalen sämtlich von Null verschiedenen zu l primen Zahlen nicht bestehen kann.

Die Voraussetzungen I sind z. B. erfüllt, wenn die Klassenzahl des Klassenkörpers zu $k(\zeta)$, der zum Faktor l^m ($h = l^m h'$, h' zu l prim) gehört, zu l selbst prim ist.

§ 1.

Es besteht zunächst der folgende

Satz 1. Es sei $\overline{Kk}$ der zu $k(\zeta+\zeta^{-1})$ gehörige Teilklassenkörper vom Grade l^μ und E eine komplexe Ein-

Digitized by Google

heit des durch Adjunktion von ζ zu demselben entstehenden Körpers $(\overline{Kk}, \zeta)$, so ist

$$E = \zeta^g H \tag{2}$$

wo H eine reelle Einheit bedeutet.

Dieser Satz begründet einen wesentlichen Unterschied in der Theorie des ersten und zweiten Faktors der Klassenanzahl; er läßt sich auf die Klassenkörper, welche den im ersten Faktor der Klassenzahl enthaltenen Potenzen von l entsprechen, nicht ausdehnen.

Beweis. Der reelle Klassenkörper $\overline{Kk}$ sowie der erweiterte Körper $(\overline{Kk}, \zeta)$ sind Galoissche Körper, da sie mit allen algebraisch konjugierten identisch sind.

Ferner besitzt der erweiterte Körper gegenüber dem ursprünglichen den Relativgrad 2, sodaß die absoluten Grade etwa $l^u(l-1)$ und $\frac{l^u(l-1)}{2}$ sind. Da nun $\overline{Kk}$ als reeller Körper gegenüber der in der Galoisschen Gruppe von $(\overline{Kk}, \zeta)$ enthaltenen Untergruppe $(1, s)$ — wo s den Uebergang zur konjugiert imaginären Zahl bedeutet — invariant bleibt, so ist $\overline{Kk}$ ein Teilkörper des zu dieser Gruppe als invariant gehörigen Unterkörpers vom Grade $\frac{l^u(l-1)}{2}$ und also ist vermöge der Gleichheit der Grade $\overline{Kk}$ selbst dieser Unterkörper. Bedeutet S eine beliebige Substitution der Gruppe des Körpers $(\overline{Kk}, \zeta)$, so sind gegenüber den konjugierten Gruppen

$$(1, S^{-1} s S)$$

die zu $\overline{Kk}$ algebraisch konjugierten Körper als invariant zugehörig und da $\overline{Kk}$ selbst mit allen diesen identisch ist, so sind diese Gruppen selbst identisch. D. h. es ist

$$s = S^{-1} s S \quad \text{oder} \quad sS = Ss. \tag{3}$$

Hiernach ist nun

$$S\frac{E}{E^s} = \frac{SE}{(SE)^s}. \tag{4}$$

d. h. es ist $\frac{E}{E^s}$ mit sämtlichen algebraisch konjugierten vom absolutem Betrage 1. Also ist $\frac{E}{E^s}$ eine Einheitswurzel; wir schreiben

$$\frac{E}{E^s} = \pm \zeta^{2g}. \tag{5}$$

Digitized by Google

Um zu zeigen, daß nur das $+$Zeichen gilt (vgl. D. Hilbert, Zahlbericht p. 336) bemerken wir, daß die Differente von $(\overline{Kk}, \zeta)$ gleich der von $k(\zeta)$, die von $\overline{Kk}$ gleich der von $k(\zeta+\zeta^{-1})$ ist, also die Relativdifferente von $(\overline{Kk}, \zeta)$ gegenüber $\overline{Kk}$ gleich der Relativdifferente von $k(\zeta)$ gegenüber $k(\zeta+\zeta^{-1})$ ist, d. h. sie ist durch $\mathfrak{l}^2$ teilbar. Entspringt aber der Körper $(\overline{Kk}, \zeta)$ aus einer Gleichung $x^2 = A$, so ist $2A$ durch die Relativdifferente aber durch $\mathfrak{l}^2$ teilbar und also A keine Einheit.

Es würde aus der Gleichung

$$E = -\zeta^{2g} E^s \quad \text{oder} \quad E^l = -(E^s)^l = -(E^l)^s$$

folgen, daß die Einheit $P = E^l$ die Gleichung

$$P^2 = -P.P^s$$

befriedigt. P ist nicht reell, da sonst $P^2 = -P^2$ wäre, und also würde die Gleichung

$$x^2 = -P.P^s$$

einen zu $\overline{Kk}$ relativ quadratischen in $(\overline{Kk}, \zeta)$ enthaltenen Körper bestimmen, der mit $(\overline{Kk}, \zeta)$ identisch wäre. Dies ist aber, da $-P.P^s$ Einheit ist, unmöglich.

Setzen wir jetzt

$$E^s \zeta^g = E\zeta^{-g} = H$$

so ist H reell und

$$E = \zeta^g H.$$

Anderer Beweis. Der Körper $\overline{Kk}$ vom Grade $r_1 = \frac{l^\mu(l-1)}{2}$ ist mit allen algebraisch konjugierten reell und daher $r = r_1 - 1$ die Dirichletsche Zahl der unabhängigen Einheiten. Der Körper $(\overline{Kk}, \zeta)$ vom Grade $2r_1$ ist mitsamt allen allgebraisch konjugierten imaginär und also ebenfalls $r = r_1 - 1$ die Dirichletsche Zahl der Einheiten. Da nun die unabhängigen reellen Einheiten aus $\overline{Kk}$ auch in $(\overline{Kk}, \zeta)$ unabhängig bleiben, so gibt es für eine beliebige komplexe Einheit in $(\overline{Kk}, \zeta)$ einen Exponenten μ, sodaß

$$E^\mu = H$$

ist, wo H in $\overline{Kk}$ liegt (vgl. Zahlbericht p. 222).

Da der Körper $(\overline{Kk}, \zeta)$ aber durch eine Wurzel aus einer Einheit nicht entsteht, wie soeben bewiesen, so ist $H = \Theta^\mu$ und also

$$E = \varrho^\mu \quad \text{wo} \quad \varrho^\mu = 1.$$

Digitized by Google

Es ist also $\varrho = \pm \zeta^{sg}$, wonach die weiteren Schlüsse wie vorhin folgen.

Aus beiden Beweisen wird deutlich, warum der Satz nicht für die Einheiten des allgemeinen Klassenkörpers Kk gilt. Es ist nämlich der Körper aller reeller Zahlen in Kk, im allgemeinen kein Galoischer Körper, sondern nur dann, wenn Kk mit $(\overline{Kk}, \zeta)$ identisch, also der erste Faktor der Klassenzahl zu l prim ist. Der Satz wird daher schon im einfachsten Falle, wo h_1 einmal durch l teilbar und h_2 zu l prim ist, hinfällig.

§ 2.

Aus der Gleichung

$$a^l + b^l + c = 0 \tag{1}$$

in der wir ohne Einschränkung a, b, c als teilerfremd voraussetzen können, folgt

$$\begin{aligned} a + b &= \mathfrak{j}_0^l \\ a + \zeta^r b &= \mathfrak{j}_r^l \qquad (r = 1, 2, \ldots, l-1) \end{aligned} \tag{6}$$

wo $\mathfrak{j}_0, \mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_{l-1}$ Ideale in k bedeuten, die teilerfremd sind.

Indem in 2) vorausgesetzten Teilklassenkörper $(\overline{Kk}, \zeta)$ verwandeln sie sich in Hauptideale (J_r), sodaß unter $E_0, E_1, \ldots, E_{l-1}$, Einheiten in $(\overline{Kk}, \zeta)$ verstanden, die Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b &= E_0 J_0^l \\ a + \zeta^r b &= E_r J_r^l \qquad (r = 1, 2, \ldots, l-1) \end{aligned} \tag{7}$$

resultieren. Vermöge des Satzes 1, § 1 bestehen die Gleichungen

$$E_r = E_r^s \zeta^{2g_r} \tag{8}$$

und daher erhalten wir

$$\frac{a + \zeta^r b}{a + \zeta^{-r} b} \zeta^{-2g_r} = \left(\frac{J_r}{J_r^s}\right)^l \qquad (r = 1, 2, \ldots, l-1). \tag{9}$$

Ist $\frac{J_r}{J_r^s}$ keine Zahl des Kreiskörpers $k(\zeta)$, so entsteht ein Teilklassenkörper $(\overline{Kk}, \zeta)$ aus der auf der linken Seite der Gleichung (9) entstehenden Zahl des Kreiskörpers und diese ist dann der l-ten Potenz einer Zahl des Kreiskörpers nach dem Modul $\mathfrak{l}^l$ kongruent. In jedem Fall besteht also eine Kongruenz

Digitized by Google

$$\zeta^{2g_r}\frac{a+\zeta^r b}{a+\zeta^{-r}b} \equiv \alpha_r^l (\mathfrak{l}^l), \tag{10}$$

wo α_r eine ganze oder gebrochene Zahl des Kreiskörpers ist. Vermöge der stets bestehenden Kongruenzen

$$\alpha_r \equiv \alpha_r(\mathfrak{l}) \quad \text{und} \quad \alpha_r^l \equiv \alpha_r^l(\mathfrak{l}^l), \tag{11}$$

wo a_r rational ist, wird aus (10)

$$\zeta^{2g_r}\frac{a+\zeta^r b}{a+\zeta^{-r}b} \equiv a_r^l (\mathfrak{l}^l) \tag{12}$$

und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß nach dem Modul $\mathfrak{l}$ der Quotient zweier imaginär konjugierten Zahlen der 1 kongruent ist $a_r \equiv 1\,(\mathfrak{l})\, a_r^l \equiv 1\,(\mathfrak{l}^l)$, also

$$\zeta^{2g_r}\frac{a+\zeta^r b}{a+\zeta^{-r}b} \equiv 1\,(\mathfrak{l}^l) \qquad (r = 1, 2, \ldots, l-1). \tag{13}$$

Die Kongruenzen (13) führen aber in bekannter Weise auf einen Widerspruch.

§ 3.

Unter der Voraussetzung

II Alle Klassen $c^l = 1$ aus $k(\zeta)$ lassen sich im Körper $(\overline{Kk}, \zeta)$ in der Form $c_1^{x_1}$ $(x_1 = 0, 1, \ldots, l-1)$, unter c_1 eine geeignete derselben verstanden, darstellen,

wird die Unmöglichkeit der Gleichung (1) in ganzen rationalen von Null verschiedenen und zu l primen Zahlen gezeigt werden.

Wenn $\mu = 0$ ist, verstehen wir dabei unter $\overline{Kk}$, $k(\zeta+\zeta^{-1})$ selbst.

Die Voraussetzung II umfaßt z. B. den Fall[1]) $h_1 = l \,.\, h_1'$ $h_2 = l \,.\, h_2'$, (h_1', h_2' zu l prim), sowie als engeren Unterfall den von E. E. Kummer behandelten Fall einer einmal durch l teilbaren Klassenanzahl.

Sei $s = (\zeta : \zeta^r)$ gesetzt, wo r eine primitive Wurzel von l bedeute, so besteht in $(\overline{Kk}, \zeta)$ eine Relation

$$c_1 \,.\, sc_1^t = 1, \tag{14}$$

wo t einer der Werte $1, 2, \ldots, l-1$ ist, da sc_1 mit c_1 in $(\overline{Kk}, \zeta)$ verschieden von 1 und von der Form $c_1^{x_1}$ ist. Es besteht dann für $c = c_1^{x_1}$ vermöge $s(c_1^{x_1}) = (sc_1)^{x_1}$ die Gleichung

$$c \,.\, (sc)^t = 1 \tag{15}$$

1) Doch wird in diesem Fall, wie man leicht zeigt, sogar $c_1 = 1$.

Digitized by Google

mit demselben nur von r abhängigen t für eine beliebige der Klassen $c = c_1^{x_1}$.

Aus der Zerlegung (6) geht, unter c die Klasse von $\mathfrak{j}_1$ verstanden, die Gleichung

$$(16) \qquad (a+b\zeta)(a+b\zeta^r)^t = EJ^l$$

hervor, wo E eine Einheit, J eine Zahl aus $(\overline{Kk}, \zeta)$ bedeutet, mit demselben t hervor, (die auch giltig bleibt, falls $\mathfrak{j}_1$ und damit $s\mathfrak{j}_1$ in $(\overline{Kk}, \zeta)$ Hauptideale werden sollten).

Durch Division mit der konjugiert imaginären Zahl erhalten wir mit Rücksicht auf den Satz 1 § 1, und durch dieselben Schlüsse wie früher die Kongruenz

$$(17) \qquad (a+b\zeta)(a+b\zeta^r)^t \equiv \zeta^x (a+b\zeta^{-1})(a+b^{-r})^t (l^l).$$

Gemäß der Formel der logarithmischen Differentiation

$$(18) \qquad l^{(g)}(a+bc^{vk}) \equiv k^g \cdot l^{(g)}(a+bc^v)(l) \qquad (g = 1, 2, \ldots, l-1)$$

erhält man, unter Berücksichtigung der Kongruenz

$$(19) \qquad l^{(g)} e^{xv} \equiv 0\,(l) \qquad (g = 2, 3, \ldots),$$

$$(20) \qquad l^{(g)}(a+bc^v)[1+tr^g-(-1)^g-t(-r)^g] \equiv 0\,(l). \qquad (g = 2, 3, \ldots, l-1).$$

D. h.

$$(21) \qquad l^{(2h+1)}(a+bc^v)[1+t\,.\,r^{2h+1}] \equiv 0\,(l) \qquad (2h+1 = 3, 5, \ldots, l-2).$$

Damit die Kongruenzen nach l

$$(22) \qquad \begin{aligned} 1+t\,.\,r^3 &\equiv 0 \\ 1+t\;\; r^5 &\equiv 0 \end{aligned}$$

erfüllt wären, wäre notwendig, daß

$$(23) \qquad r^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & r^2 \end{vmatrix} \equiv r^3(r^2-1) \equiv 0\,(l),$$

also

$$(24) \qquad r \equiv \pm 1\,(l)$$

wäre, was zufolge der Wahl von r ausgeschlossen ist. Also ist

Digitized by Google

eine der beiden Kongruenzen (22) nicht erfüllt und damit eine der Kongruenzen nach l

$$(25) \qquad \begin{aligned} l^{(3)}(a+be^{\nu}) &\equiv 0 \\ l^{(5)}(a+be^{\nu}) &\equiv 0 \end{aligned}$$

erfüllt. Da t nur von der Wahl von r abhängt, so gestattet die erfüllte Kongruenz die Vertauschung von a, b, c. Daß aber unter letzterer Voraussetzung keine der Kongruenzen (25) für zu l prime a, b, c bestehen kann, läßt sich nach E. E. Kummer[1]) bekanntlich elementar zeigen.

Damit ist ohne Benutzung der Kongruenzen von E. E. Kummer der Nachweis der Behauptung II geliefert, und es hat sich gezeigt, daß die, aus der Annahme der Teilbarkeit des zweiten Faktors der Klassenanzahl durch l, hervorgehende Schwierigkeit sich durch allgemeine Schlüsse erledigen läßt.

---

1) Math. Abh. d. K. Ak. d. Wiss. Berlin 1857, No. 3, pg. 64 und 65.

Göttingen, den 20. Juli 1910.

Digitized by Google

Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

Von

Otto Toeplitz in Göttingen.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 23. Juli 1910.

Einleitung.

Das Problem der orthogonalen Transformation einer beschränkten quadratischen Form ist durch die Dissertation[1]) und die Habilitationsschrift[2]) von Hellinger gewissermaßen erschöpfend in derjenigen Richtung ausgebaut worden, die Hilbert ihr vorzeichnete, als er in seiner vierten Mitteilung[3]) das Fundament zu dieser Theorie legte. Den hier folgenden, lose nebeneinandergestellten Abschnitten schwebt das gemeinsame Endziel vor, dieser Hilbert-Hellingerschen Theorie eine von ihr unabhängige andere, man könnte sagen: algebraische, an die Seite zu stellen, die die diffizilen analytischen Werkzeuge jener Theorie, den Hellingerschen Integralbegriff und die Hellingerschen Differentiallösungen durch Entwicklungen elementaren Charakters ersetzt. Die orthogonale Transformation der beschränkten quadratischen Formen auf Normalformen (insbesondere Nr. 2) und das Studium solcher Normalformen (Nr. 3, 4) ist der Weg, auf dem sich die vorliegende Note diesem Endziel nähern will.

Indessen beanspruchen die hier folgenden Abschnitte neben diesem gemeinsamen Interesse auch einzeln genommen ein solches. So stellt Nr. 2 den Zusammenhang der Hilbert-Hellingerschen Theorie mit der Theorie der Kettenbrüche auf eine neue, in gewissem Sinne durchgreifendere Art her. Auf zwei Arten hat man bisher

1) Göttingen 1907.

2) Journ. f. Math. 136 (1909), pag. 210—271.

3) Diese Nachr. 1906, pag. 157 ff.

Digitized by Google

— soviel mir aus mündlichen Mitteilungen bekannt ist — von jener Theorie aus eine Brücke herüber zu den Stieltjesschen Untersuchungen zu schlagen versucht: das eine Mal sollte die Hilbert-Hellingersche Theorie, angewandt auf diejenigen speziellen quadratischen Formen von unendlichvielen Variabeln, die ich unten „Jacobische" nenne, die Kettenbruchtheorie von Stieltjes ergeben; das andere Mal sollte die Stieltjessche Theorie, angewandt nicht auf eine einzige analytische Funktion einer Variabeln λ, sondern auf die Reziproke der quadratischen Form $\Sigma(a_{pq} - \lambda e_{pq}) x_p y_q$, die analytisch von λ abhängt, die Hilbert-Hellingersche Theorie liefern. In Nr. 2 des folgenden hingegen erweisen sich die sog. Jacobischen Formen als Normalformen oder genauer als Bestandteile von Normalformen, auf die man jede beschränkte quadratische Form durch orthogonale Transformation bringen kann.

Die Bedeutung von Nr. 4 für das genannte allgemeine Endziel soll erst bei späterer Gelegenheit näher ausgeführt werden. Für sich genommen enthält diese Nummer eine Fortführung meiner Habilitationsschrift [1]); nur werden statt Laurentreihen für $|z| = 1$ trigonometrische Reihen betrachtet, d. h. es wird $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ gesetzt, womit der Anschluß an die moderne Theorie der Fourierreihen gewonnen ist. Aus dem Zusammenhange zwischen Fourierschen Reihen und L-Formen, d. h. gewissen quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen [2]), der in aller Vollständigkeit hergestellt wird, ergibt sich (Nr. 5) eine neue Art von Sätzen über Fouriersche Reihen, von denen einige hier folgen.

1. Reduktion der quadratischen Formen auf finite Formen.

Eine bilineare Form von unendlichen Veränderlichen heiße *zeilenfinit* [3]), wenn in jeder Zeile ihres Koeffizientenschemas nur endlichviele von Null verschiedene Elemente vorkommen, desgleichen *kolonnenfinit*, wenn das Entsprechende von den Kolonnen gilt, endlich *finit* [3]), wenn sie zugleich zeilen- und kolonnenfinit ist. Eine quadratische Form, die zeilenfinit ist, ist wegen der symmetrischen Beschaffenheit ihrer Koeffizienten eo ipso finit. Auf Grund dieser Terminologie kann man folgenden Satz aufstellen:

1) Diese Nachr. 1907, pag. 110 ff., „Zur Transformation der Scharen bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen"; vgl. auch den in einem der nächsten Hefte der Math. Ann. erscheinenden Abdruck meiner Habilitationsschrift, der die Ausführung dieser Voranzeige in den Gött. Nachr. enthält.

2) In der Note heißen sie „Laurent-Formen".

3) Vgl. „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen", diese Nachr. 1906, pag. 351—355, ausführlich Math. Ann. 69, pag. 289—330 (zitiert als „Grundlagen").

Digitized by Google

Satz 1: *Man kann jede beschränkte quadratische Form $A(x, x)$ durch eine orthogonale Transformation $x = W(\xi)$ ihrer Veränderlichen in eine finite, beschränkte Form $B(\xi, \xi)$ überführen.*

Die beiden Beweise, die ich für diesen Satz hier mitteile, haben diejenige Methode zum Ausgangspunkt, die Jacobi benutzt, um eine quadratische Form von n Veränderlichen lediglich unter Benutzung von Quadratwurzelziehen auf die Normalform

$$(1) \qquad a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 + 2b_1 x_1 x_2 + 2b_2 x_2 x_3 + \cdots + 2b_{n-1} x_{n-1} x_n$$

orthogonal zu transformieren[1]).

Entsprechend diesem Vorgehen von Jacobi ist es nämlich möglich, zunächst durch eine orthogonale Transformation $W^{(1)}$ der Veränderlichen von der zweiten ab die gegebene Form $\Sigma a_{pq} x_p x_q$ auf die Gestalt zu bringen

$$(2) \qquad a_1 x_1^{(1)2} + 2b_1 x_1^{(1)} x_2^{(1)} + \sum_{p,q=2}^{\infty} a_{pq}^{(1)} x_p^{(1)} x_q^{(1)}.$$

Man braucht zu diesem Ende die orthogonale Transformation nur folgendermaßen zu bestimmen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^{(1)} \\ x_2 &= \varrho a_{12} x_2^{(1)} + w_{23} x_3^{(1)} + w_{24} x_4^{(1)} + \cdots \\ x_3 &= \varrho a_{13} x_2^{(1)} + w_{33} x_3^{(1)} + w_{34} x_4^{(1)} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo $\varrho^2 = a_{12}^2 + a_{13}^2 + \cdots$ ist, und wo die noch nicht fixierten Größen $w_{\alpha\beta}$ der Forderung genügen[2])

$$(4) \qquad a_{12} w_{2p} + a_{13} w_{3p} + \cdots = 0 \qquad (p = 3, 4, \ldots).$$

Sodann kann man die Restform, d. h. die in (2) auftretende Summe analog behandeln, wie eben die ursprüngliche und so der Transformation $W^{(1)}$ eine zweite $W^{(2)}$ der Veränderlichen von der dritten ab folgen lassen, u. s. f. Aber während bei endlichvielen Veränderlichen die sukzessive Anwendung dieses Verfahrens unmittelbar auf die Normalform (1) führt, führt bei unendlichvielen Veränderlichen die unbegrenzte Fortsetzung des Verfahrens nicht zu einem entsprechenden Ziel. Ist es doch, vom Standpunkte der Hilbert-Hel-

1) Durch eine gelegentliche mündliche Bemerkung von Herrn E. Hilb wurde meine Aufmerksamkeit darauf gelenkt, diesen Gedanken für Zwecke der orthogonalen Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen zu verwenden.

2) Ueber die Möglichkeit, eine oder mehrere (auch unendlichviele) zu einander orthogonale Größenreihen zu einem vollständigen Orthogonalsystem zu ergänzen, vgl. Hilbert, 4. Mitteilg., pag. 196 oder auch E. Schmidt, Rend. del Circ Mat. di Palermo, 25, 1908, erstes Semester, pag. 53 ff.

Digitized by Google

lingerschen Theorie aus, nicht schwer einzusehen, daß bei quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen die zu (1) analoge Normalform nicht ohne besondere Einschränkungen erreicht werden kann. Vielmehr hat *eine „Jacobische Form" — so wollen wir eine quadratische Form vom Typus*

$$(5) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + 2b_1 x_1 x_2 + 2b_2 x_2 x_3 + \cdots$$

nennen — in Hellingers Terminologie stets nur ein einfaches Spektrum, und da die Vielfachheit des Spektrums invariant ist gegenüber orthogonaler Transformation, kann sicher keine Form mit nicht durchweg einfachem Spektrum orthogonal in eine Jacobische transformiert werden. Auch aus dem Charakter des oben geschilderten Verfahrens heraus ist es nicht schwer zu erkennen, weshalb seine unbegrenzte sukzessive Anwendung nicht statthaft ist. Es sind nicht Konvergenzschwierigkeiten, die sich hier in den Weg stellen: die sukzessive Bildungsweise des Verfahrens bewirkt es, daß nach der n-maligen Anwendung des Verfahrens derjenige Teil der Form, der die ersten n Veränderlichen enthält, bereits die erwünschte Gestalt hat und fortan nicht mehr berührt wird; und ebenso ist hinsichtlich der Transformation, die aus den ersten n sukzessiven Schritten resultiert, zu konstatieren, daß die ersten $n+1$ Kolonnen ihres Koeffizientenschemas einen definitiven Charakter tragen, d. h. auch allen den folgenden Transformationen, die aus den ersten $n+h$ Schritten resultieren, gemeinsam sind; infolgedessen wird durch die unbegrenzte Fortsetzung des Prozesses eine ganz bestimmte definitive Transformation definiert, welche rein formal und auch betreffs der Konvergenzverhältnisse befriedigend die gegebene quadratische Form in eine Jacobische überführt. Indessen diese Transformation ist, ihrer Bildung gemäß, nur *kolonnenweise* orthogonal, während das Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form verlangt, daß diese orthogonale Transformation auch *zeilenweise* orthogonal (abgeschlossen) ist; und bei unendlichvielen Veränderlichen ist bekanntlich, anders wie bei endlichvielen Veränderlichen, das eine *nicht* eine Folge des andern[1]). Es kann natürlich vorkommen, daß die definitive Matrix auch zeilenweise orthogonal ist, aber es wird dies möglicherweise selbst bei Formen mit durchweg einfachem Spektrum nicht notwendig eintreten.

Es ist jedoch möglich, dieses sukzessive Verfahren so zu modifizieren, daß es einen Beweis von Satz 1 liefert, und die ver-

1) Vergl. „Grundlagen", pag. 312.

Digitized by Google

schiedene Gestaltung dieser Modifikation liefert die beiden folgenden verschiedenen Beweise:

Der **1. Beweis** beruht auf der Bemerkung, daß man, ganz ähnlich wie oben, durch eine orthogonale Transformation der Veränderlichen anstatt von der zweiten erst von der $(n+1)^{\text{ten}}$ ab bewirken kann, daß in der transformierten Form die Glieder mit $x_1 x_{n+2}, x_1 x_{n+3}, \ldots$ fehlen. Indem man nun nach Ausführung des ersten Schrittes den zweiten nicht bei der dritten Veränderlichen, sondern erst bei einer späteren, n_2^{ten}, anheben läßt, den dritten Schritt bei einer noch späteren, n_3^{ten}, u. s. f., hat man es in der Hand, die Zahlen $n_2, n_3, \ldots$ so stark ansteigen zu lassen, daß zuerst in der ersten Transformation die Quadratsumme der ersten n_2 Elemente der zweiten Zeile, deren sämtliche Elemente doch die Quadratsumme 1 haben, um weniger als ε unter 1 gelegen ist, daß ferner bei der aus den beiden ersten Schritten resultierenden Transformation sowohl in der zweiten als auch in der dritten Zeile die Quadratsumme der ersten n_2 Elemente um weniger als ε^2 unter 1 liegt, und daß also allgemein in derjenigen Transformation, die aus den ersten h Schritten resultiert, in ihren $h+1$ ersten Zeilen die Quadratsumme derjenigen Elemente, die einen definitiven Charakter tragen, zwischen $1-\varepsilon^h$ und 1 gelegen ist. Alsdann erhellt leicht, daß dieses modifizierte Verfahren, unbegrenzt fortgesetzt, eine schließliche Transformation definiert, die auch *zeilenweise* orthogonal ist, und die die gegebene quadratische Form zwar nicht in eine Jacobische, aber in eine finite überführt.

Der **2. Beweis** knüpft an den Umstand an, daß man, noch während der Ausführung des ersten Schrittes, die dabei auftretende Willkür in der Bestimmung der Größen $w_{\alpha\beta}$ geschickt benutzen kann, indem man diese Größen gemäß der folgenden Bemerkung *eindeutig* normiert:

Hilfssatz: *Ist eine Reihe von Größen*

$$\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31}, \ldots$$

von der Quadratsumme 1 *vorgelegt, so kann man eine Doppelfolge*

$$\begin{array}{cccc} \omega_{12}, & \omega_{22}, & \omega_{32}, & \ldots \\ 0, & \omega_{23}, & \omega_{33}, & \ldots \\ 0, & 0, & \omega_{34}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{array}$$

so dazu bestimmen, daß sie, mit der gegebenen Größenreihe zusammen genommen, ein zeilen- und kolonnenweise orthogonales System bilden. Die Größen der Doppelfolge bestimmen sich nämlich aus dieser

Digitized by Google

Forderung durch eine elementare Ausrechnung, und die dabei auftretenden Quadratwurzeln ergeben lediglich eine gewisse Willkür in der Wahl der Vorzeichen, die man durch die weitere Forderung beseitigen kann, daß die Größen $\omega_{12}, \omega_{23}, \ldots$ nicht negativ sein sollen.

Beginnt man mit dem dermaßen normierten Algorithmus das sukzessive Verfahren, so darf man dasselbe natürlich ebensowenig in der normierten Form unbegrenzt fortsetzen, wie dies ohne Einführung der Normierung ohne Weiteres statthaft war. Indessen genügt es, auf Grund der gewählten Normierung, im Gegensatz zum ersten Beweise, bei der sukzessiven Anwendung des Algorithmus gelegentlich eine einzige Veränderliche zu überspringen, d. h. lediglich statt von der n^{ten} Veränderlichen von der $(n+1)^{\text{ten}}$ ab die nächste Transformation zu vollziehen, um der ersten und späterhin den ersten h Zeilen einen definitiven Charakter zu verleihen, sodaß an der Quadratsumme 1 ihrer Elemente während des weiteren Prozesses nichts mehr geändert wird. Und es ist nur noch wie beim ersten Beweise zu überlegen, daß eine kolonnenweise orthogonale Transformation vollständig, d. h. zeilenweise orthogonal ist, wenn nur die Quadratsumme jeder einzelnen Zeile gleich 1 ist.

Der zweite Beweis scheint nicht nur einfacher und befriedigender zu sein als der erste, sondern er gestattet auch, wesentlich mehr zu folgern. *Einmal* wird nämlich die finite Form, die durch ihn erreicht wird, bald noch erheblich reduziert und der Jacobischen Form soweit angenähert, als dies der Sachlage nach überhaupt möglich ist: bezüglich der n_1 ersten Veränderlichen wird sie genau von der Jacobischen Art, und es kann dabei n_1 ganz beliebig groß gewählt werden, unabhängig von den Koeffizienten der gegebenen Form; von da an verbreitert sich, um an das anschauliche Bild des Koeffizientenschemas anzuknüpfen, die finite Form nach beiden Seiten nur um einen einzigen Schritt, um dann beliebig weit fünf Elemente breit fortzuströmen, und dann nötigenfalls gelegentlich und, wenn dies notwendig ist, noch unendlich oftmals wieder verbreitert zu werden; und die Stellen, wo die Verbreiterung vollzogen wird, können willkürlich spät gewählt werden, unabhängig von der Beschaffenheit der gegebenen Form.

Andrerseits wird die beim zweiten Beweise konstruierte Transformation selbst finit sein, wenn die gegebene quadratische Form finit war, und somit liefert der zweite Beweis zugleich die Reduktion einer beliebigen finiten quadratischen Form auf die eben

Digitized by Google

beschriebene spezielle Gestalt vermöge einer finiten Transformation[1]). —

Satz 2: *Analog kann man jede beschränkte Bilinearform durch eine und dieselbe orthogonale Transformation beider Reihen von Veränderlichen in eine zeilenfinite und ebenso in eine kolonnenfinite Form transformieren.*

Satz 1 gestattet, die in der Einleitung erwähnte Elementarisierung des Hellingerschen Begriffes der Differentiallösungen in die Wege zu leiten. Das wesentliche Hilfsmittel dabei ist das Resultat meiner Arbeit über lineare Gleichungssysteme mit zeilenfinitem Koeffizientenschema[2]), deren Unbekannte an keinerlei Konvergenzbedingung gebunden sind. Für den vorliegenden Fall ergibt dieses Resultat, daß die homogenen linearen Gleichungen, deren Koeffizientenschema das der betrachteten finiten quadratischen Form B ist, stets eine Lösung besitzen, deren Quadratsumme natürlich nicht zu konvergieren braucht. Und es ist leicht, von Hellingers Betrachtungen aus einzusehen, daß bei einer finiten Form bei passender Normierung jede Differentiallösung ihren Charakter als eine Lösung in metaphorischem Sinne aufgibt und eine solche elementar aufzufassende Lösung wird; die einzelne Koordinate der Lösung wird zugleich in ihrer Abhängigkeit von λ sehr einfach, nämlich eine rationale Funktion[3]).

2. Zerspaltung der quadratischen Form in Jacobische Formen.

Setzt man den Algorithmus von Nr. 1 unbeirrt durch die dort besprochenen Bedenken trotzdem fort, und ergänzt die orthogonale Transformation nötigenfalls durch Hinzufügung weiterer Kolonnen gewaltsam zu einer vollständigen, so kann man sich unter Beobachtung einiger Vorsicht davon überzeugen, daß diese Transformation die gegebene quadratische Form tatsächlich zerspaltet in eine Jacobische Form und in eine Restform, die von ganz anderen Veränderlichen abhängt als die Jacobische Form:

$$A(x, x) = J(\xi, \xi) + R_1(\eta^{(1)}, \eta^{(1)}).$$

1) Auf diesen Gegenstand beabsichtige ich demnächst gelegentlich einer zusammenhängenden Theorie der finiten Formen und Transformationen zurückzukommen.

2) „Ueber die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten", Rend. del Circ. Mat. di Pal. 28, (zweites Semester 1909), pag. 88—96.

3) Die weitere Ausbildung der finiten Theorie dürfte zeigen, daß sie sogar eine *ganze* rationale Funktion wird.

Digitized by Google

Indem man die Restform R_2 demselben Verfahren unterwirft und nötigenfalls unbegrenzt so fortfährt, gelangt man durch einen ähnlichen Schluß wie Hellinger zu dem

Satz 3: *Man kann jede beschränkte quadratische Form $A(x, x)$ durch orthogonale Transformation in Jacobische Formen zerspalten, d. h. man kann sie in eine Form $J(\xi, \xi)$ verwandeln, die die Summe von endlichvielen oder unendlichvielen Jacobischen Formen ist, deren jede von anderen Veränderlichen abhängt:*

$$A(x, x) = J(\xi, \xi) = J_1(\xi^{(1)}, \xi^{(1)}) + J_2(\xi^{(2)}, \xi^{(2)}) + \cdots.$$

Es ist darin eines aus der Reihe der Hellingerschen Resultate enthalten und auf independente Art neu abgeleitet, daß nämlich jede beschränkte quadratische Form in Formen mit einfachem Spektrum zerspalten werden kann.

3. Theorie der Jacobischen Formen.

Satz 3 enthält nicht die Antwort auf die Frage, ob jede quadratische Form mit einfachem Spektrum in eine einzige Jacobische Form transformiert werden kann. Da das Spektrum einer solchen Form eine beliebige perfekte Punktmenge sein kann, also z. B. aus einzelnen getrennten Strecken bestehen kann, erscheint es von vornherein zweifelhaft, ob eine einzelne Jacobische Form eines solchen zerrissenen Spektrums fähig ist. Die folgende Betrachtung wird u. a. Beispiele von Jacobischen Formen liefern, deren Spektrum aus zwei oder mehr getrennten Stücken besteht, und wird es wahrscheinlich machen, daß die eben gestellte Frage zu bejahen ist.

Unschwer beweist man:

Satz 4: *Eine Jacobische Form*

$$J \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots - 2b_1 x_1 x_2 - 2b_2 x_2 x_3 - \cdots$$

ist dann und nur dann beschränkt, wenn die Größen a_n, b_n unter einer von n unabhängigen Grenze bleiben, und sie ist dann und nur dann vollstetig, wenn $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ ist. —

Die Größen A_n mögen durch die Rekursionsformeln definiert werden:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \\ A_2 &= a_2 A_1 - b_1^2 \\ A_3 &= a_3 A_2 - b_2^2 A_1 \\ A_4 &= a_4 A_3 - b_3^2 A_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A_{n+1} &= a_{n+1} A_n - b_n^2 A_{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

Digitized by Google

und es sei außerdem

$$(2)\qquad \begin{aligned} A_n^{(1)}(a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots) &= A_n(a_2, a_3, \ldots; b_2, b_3, \ldots) \\ A_n^{(2)}(a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots) &= A_n(a_3, a_4, \ldots; b_3, b_4, \ldots) \text{ etc.;} \end{aligned}$$

dann ist

1) $1, A_1, A_2, A_3, \ldots$ die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenschema mit demjenigen der Form J übereinstimmt;

2) liefert die Auflösung der zugehörigen unhomogenen, linearen Gleichungen als Resolvente von J eine quadratische Form mit folgendem Koeffizientenschema:

$$(3)\qquad \left(\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \cdot \\ \frac{A_1 u_1 - 1}{b_1} & \frac{A_1 u_2}{b_1} & \frac{A_1 u_3}{b_1} & \frac{A_1 u_4}{b_1} & \cdot \\ \frac{A_2 u_1 - A_1^{(1)}}{b_1 b_2} & \frac{A_2 u_2 - b_1}{b_1 b_2} & \frac{A_2 u_3}{b_1 b_2} & \frac{A_2 u_4}{b_1 b_2} & \cdot \\ \frac{A_3 u_1 - A_2^{(1)}}{b_1 b_2 b_3} & \frac{A_3 u_2 - b_1 A_1^{(2)}}{b_1 b_2 b_3} & \frac{A_3 u_3 - b_1 b_2}{b_1 b_2 b_3} & \frac{A_3 u_4}{b_1 b_2 b_3} & \cdot \\ \frac{A_4 u_1 - A_3^{(1)}}{b_1 b_2 b_3 b_4} & \frac{A_4 u_2 - b_1 A_2^{(2)}}{b_1 b_2 b_3 b_4} & \frac{A_4 u_3 - b_1 b_2 A_1^{(3)}}{b_1 b_2 b_3 b_4} & \frac{A_4 u_4 - b_1 b_2 b_3}{b_1 b_2 b_3 b_4} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right),$$

wo $u_1, u_2, \ldots$ willkürliche Größen sind.

Soll diese zunächst rein formal betrachtete[1]) Reziproke beschränkt sein, so ist sie notwendig[2]) eindeutig und symmetrisch, und folglich muß sein:

$$(4)\qquad \begin{aligned} b_1 u_2 &= A_1 u_1 - 1 \\ b_1 b_2 u_3 &= A_2 u_1 - A_1^{(1)} \\ b_1 b_2 b_3 u_4 &= A_3 u_1 - A_2^{(1)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b_1 \ldots b_n u_{n+1} &= A_n u_1 - A_{n-1}^{(1)}, \end{aligned}$$

d. h. die bisher willkürlichen Größen $u_2, u_3, \ldots$ bestimmen sich linear aus u_1, und diese eine nun noch freie Größe u_1 muß notwendig durch die Forderung der Beschränktheit von (3) eindeutig bestimmt sein.

---

1) Da alle in Betracht kommenden Reihen abbrechen, kann von dieser Resolventeneigenschaft im formalen Sinne, ohne Rücksicht auf die Beschränktheit der betreffenden Formen, unbedenklich geredet werden.

2) Vgl. „Grundlagen", § 7 sowie „Die Jacobische Transformation ...", diese Nachr. 1907.

Digitized by Google

Wird diese ganze Betrachtung statt auf J selbst auf $J-\lambda E$ angewandt, wo E die Einheitsform bedeutet, so gibt (3) dasjenige, was Hilbert die „Resolvente" von J nennt. u_1 ist jetzt durch die Forderung der Beschränktheit der Resolvente eindeutig als Funktion von λ definiert für alle diejenigen Werte von λ, die nicht dem Spektrum angehören, insbesondere also für alle komplexen Werte und auch alle reellen, dem Betrage nach über dem Maximum der Form J gelegenen Werte. Aus allgemeinen Gründen folgt leicht, daß u_1 eine in der Umgebung der Stelle ∞ reguläre Funktion von λ ist, die überall bis an die Axe des Reellen heran regulär ist, nur längs des Spektrums singulär oder verzweigt.

Satz 5: *Die Koeffizienten der Resolvente einer Jacobischen Form sind sämtlich linear aus dem obersten $u_1(\lambda)$ aufgebaut in der Gestalt $\alpha(\lambda)u_1(\lambda)+\beta(\lambda)$, wo $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ Polynome sind, leiten sich also in einfacher Weise aus der einzigen analytischen Funktion $u_1(\lambda)$ ab.*

Wendet man diese Bemerkung auf diejenige Form an, die Hilbert[1]) den Legendreschen Polynomen zuordnet, so erhält man als speziellen Fall die bekannte Darstellung der Kugelfunktionen zweiter Art durch $\lg\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$. —

Es seien jetzt alle Größen $a_n = \lambda$, während den b_n auf verschiedene Art Zahlenwerte beigelegt werden.

a) $$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1, \quad \ldots$$

Hier ergibt (1)

(α) $$\lambda A_n = A_{n+1} + A_{n-1},$$

woraus

$$|\lambda||A_n| \leqq |A_{n+1}| + |A_{n-1}|,$$

also für $|\lambda| > 2$

$$2|A_n| \leqq |A_{n+1}| + |A_{n-1}|,$$
$$|A_{n+1}| - |A_n| \geqq |A_n| - |A_{n-1}|$$

folgt; da durch explicite Ausrechnung leicht zu zeigen ist, daß die ersten $|A_n|$ für $|\lambda| > 2$ mit n zunehmen, wachsen sie beständig mit n; sie bleiben also von 0 durchaus entfernt. Soll nun (3) beschränkt sein, so muß speziell $\lim u_n = 0$ sein; also hat $\frac{u_{n+1}}{A_n}$ den limes 0 und somit ergibt (4), d. h.

$$\frac{u_{n+1}}{A_n} = u_1 - \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

1) 4. Mitteilg., pag. 208.

Digitized by Google

mit wachsendem n:

$$0 = u_1 - \lim_{n=\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n},$$

während aus (α)

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} + \frac{A_{n-1}}{A_n} = \lambda,$$

mithin im limes

$$u_1 + \frac{1}{u_1} = \lambda, \qquad u_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

folgt. Damit ist u_1 als Funktion von λ berechnet; sie hat längs der reellen Axe von $+2$ bis -2 einen Verzweigungsschnitt [1]).

Nach dem hier auseinandergesetzten Prinzip erhält man — nur durch wesentlich umständlichere Grenzübergänge die weiteren Beispiele [2]):

b) $\qquad b_1 = a, \quad b_2 = b, \quad b_3 = a, \quad b_4 = b, \quad \ldots \quad (ab = 1),$

$$u_1 = \frac{a^2\lambda^2 - (a^4-1) \pm \sqrt{(a\lambda + a^2 + 1)(a\lambda - a^2 + 1)(a\lambda + a^2 - 1)(a\lambda - a^2 - 1)}}{2\lambda},$$

die von $-a-b$ bis $-a+b$ und von $a-b$ bis $a+b$ verzweigt ist. Daß für $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ z. B. und $\lambda = 0$ eine beschränkte Reziproke vorhanden ist, kann man unschwer direkt aus (3) heraus zeigen; so folgt, daß man hier eine Jacobische Form hat, deren Spektrum sicher aus zwei getrennten Stücken besteht [3]).

Satz 6: *Es gibt Jacobische Formen, deren Spektrum aus zwei getrennten Strecken besteht.*

Den angegebenen Beispielen könnte ich solche hinzufügen, bei denen das Spektrum aus n getrennten Strecken besteht etc.

4. *L*-Formen und Fourierreihen.

Unter einer *L*-Form verstehe ich eine quadratische Form von unendlichvielen Veränderlichen, deren Koeffizientenschema folgende Beschaffenheit hat [4]):

---

1) In Uebereinstimmung mit Hilbert, 4. Mitteilg., pag. 208, Hellinger, J. f. Math. 136, pag. 22 f.

2) Die auch aus dem Bereich der Poincaréschen Sätze der Theorie der linearen Differenzengleichungen in einer gewissen Richtung heraustreten dürften.

3) Mit Hilfe von Hellinger l. c. III. Cap. kann man übrigens ableiten, daß allgemein das Spektrum der Jacobischen Form genau mit den Verzweigungslinien der Funktion $u_1(\lambda)$ übereinstimmt.

4) Vgl. diese Nachr. 1907 (Zur Transformation ...); der Bequemlichkeit halber werden nur Cosinusreihen und dementsprechend nur reelle, quadratische

Digitized by Google

$$\begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ . & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & . \\ . & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . \\ . & a_2 & a_1 & \boxed{a_0} & a_1 & a_2 & . \\ . & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & . \\ . & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Satz 7: *Ist $f(\varphi)$ eine im Intervall 0 bis π eindeutige, stetige oder doch nur mit endlichvielen Unstetigkeitsstellen erster Art (Sprungstellen) behaftete, also beschränkte Funktion, und sind*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi$$

ihre Fourierkoeffizienten, so ist die mit diesen Koeffizienten gebildete L-Form beschränkt.

Der Beweis ergibt sich aus dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung. Es ist zu zeigen, daß

$$a_0(x_1^2+\cdots+x_n^2)+2a_1(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)+\cdots+2a_{n-1}x_1x_n$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1 \tag{1}$$

unter einer von n unabhängigen Grenze bleibt, d. h. also der Ausdruck

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi)\{(x_1^2+\cdots+x_n^2)+(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)\cos\varphi+\cdots + (x_1x_n)\cos(n-1)\varphi\}\,d\varphi. \tag{2}$$

Nun ist

$$0 \leqq \Big(\sum_r x_r\cos r\varphi\Big)^2+\Big(\sum_r x_r\sin r\varphi\Big)^2 \tag{3}$$

$$= \sum_{p,q} x_p x_q(\cos p\varphi\cos q\varphi+\sin p\varphi\sin q\varphi) = \sum_{p,q} x_p x_q\cos(p-q)\varphi$$

gerade der Ausdruck in der Parenthese unter dem Integralzeichen, also ist dieser nicht-negativ, und mithin ist der genannte Mittelwertsatz anwendbar; ist M die obere Grenze des Betrages der Funktion $f(\varphi)$, so folgt, daß der Ausdruck (2) dem Betrage nach kleiner ist als

---

L-Formen betrachtet; den allgemeinen Fourierschen Reihen würden Hermitesche *L*-Formen zugehören. Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß in jener Voranzeige in diesen Nachr. das Wort beschränkt als Abkürzung für absolut-beschränkt gebraucht wird, was weder hier noch anderwärts festgehalten worden ist. Vgl. auch „Grundlagen", § 5, vierte Bemerkung.

Digitized by Google

$$(4)\qquad \frac{1}{\pi} M \int_0^{\pi} \Big\{ \sum_{p,q} x_p x_q \cos(p-q)\varphi \Big\} d\varphi$$
$$= \frac{1}{\pi} M \sum_{p,q} x_p x_q \int_0^{\pi} \cos(p-q)\varphi \, d\varphi ;$$

bekanntlich ist aber

$$\int_0^{\pi} \cos(p-q)\varphi \, d\varphi = \begin{cases} 0 \text{ für } p \neq q, \\ \pi \quad , \quad p = q; \end{cases}$$

mithin ist (4) gleich $M(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$, d. h. $= M$ wegen der oben geforderten Nebenbedingung, q. e. d. [1]). —

Setzt man

$$(5)\qquad .., \quad x_{-1} = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$
$$x_{n+1} = 0, \quad x_{n+2} = 0, \quad \ldots,$$

so erscheint

$$(6)\qquad \frac{n a_0 + (n-1) \cdot 2 a_1 + \cdots + 2 a_{n-1}}{n}$$

als ein Wert der quadratischen Form unter der Nebenbedingung (1); andererseits ist dieser Ausdruck das n^{te} arithmetische Mittel der zugehörigen Fourierschen Reihe für $\varphi = 0$, und gemäß der Theorie des Herrn Fejér konvergiert dieses mit wachsendem n gegen den Wert $f(0)$ bezw. das arithmetische Mittel der Nachbarwerte, falls 0 für die Funktion $f(\varphi)$ eine Unstetigkeitsstelle erster Art ist. Setzt man allgemeiner

$$(7)\qquad x_h = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos\left\{ \frac{\pi}{4} + \left(h - \frac{n+1}{2} \right) \varphi \right\} \quad (h = 1, .., n),$$

und wiederum alle übrigen Veränderlichen gleich 0, so lehrt eine elementare trigonometrische Rechnung, daß

$$(8)\qquad \begin{aligned} x_1^2 + \cdots + x_n^2 &= 1 \\ x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n &= \frac{n-1}{n} \cos\varphi \\ x_1 x_3 + \cdots + x_{n-2} x_n &= \frac{n-2}{n} \cos 2\varphi \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_1 x_n &= \frac{1}{n} \cos(n-1)\varphi \end{aligned}$$

1) Dieser Beweis ist dem Beweise des Herrn Fejér für die Beschränktheit der von ihm betrachteten Mittel nachgebildet. Vgl. etwa Journ. f. Math. 138, pag. 32.

Digitized by Google

ist und daß also der Wert der Form für das Wertsystem (7) zugleich der Wert des n^{ten} Fejérschen Mittels der Fourierreihe für $f(\varphi)$ ist, nun für ein beliebiges, auch von 0 verschiedenes φ. Zugleich folgt aus den beiden Beweisen einerseits, daß die obere Grenze der Form $\leqq$ der oberen Grenze der Funktion ist, andererseits das Umgekehrte; mithin stimmen beide Grenzen überein.

Satz 8: *Die Werte der Fejérschen Mittel der Fourierreihe für $f(\varphi)$ sind zugleich Werte der zugehörigen quadratischen Form für gewisse Wertsysteme der Variabeln, deren Quadratsumme* 1 *ist.*

Nimmt $f(\varphi)$ den Wert 0 nirgends an und kommt ihm auch nicht beliebig nahe, so kann $1/f(\varphi)$ gebildet werden, genügt denselben Stetigkeitsbedingungen wie $f(\varphi)$ und ist beschränkt; es können also ihre Fourierkoeffizienten gebildet werden; und die ersten, formalen Bemerkungen meiner Habilitationsschrift [1]) in Verbindung mit dem „Aequivalenzsatze" der Fourierkoeffizienten [2]) ergeben, daß die zu $1/f(\varphi)$ gehörige quadratische L-Form, die zufolge dem eben gegebenen Beweise beschränkt ist, die Reziproke der zu $f(\varphi)$ gehörigen L-Form ist.

Besitzt umgekehrt die zu $f(\varphi)$ gehörige L-Form eine beschränkte Reziproke, so ist die aus ihr durch Iteration entstehende Form L^2, die nach dem genannten Aequivalenzsatze zu $\{f(\varphi)\}^2$ gehört, ebenfalls beschränkt, besitzt auch eine beschränkte Reziproke und ist zugleich definit; ihre untere Grenze ist alsdann > 0 [3]), und nach Satz 8 ist die untere Grenze von $\{f(\varphi)\}^2$ nicht unter derjenigen dieser Form gelegen, also ebenfalls > 0; mithin kommt $f(\varphi)$ dem Wert 0 nicht beliebig nahe.

Wendet man diese Bemerkungen auf die Funktion $f(\varphi) - \lambda$ an, so folgt, daß die zugehörige Form $L - \lambda E$ dann und nur dann eine beschränkte Reziproke hat, wenn $f(\varphi) - \lambda$ dem Wert 0 nicht nahe kommt, also $f(\varphi)$ dem Werte λ. Das Spektrum [4]) der Form L, d. h. die Gesamtheit der Werte von λ, für die $L - \lambda E$ keine beschränkte Reziproke hat, ist also nichts anderes als der Wertvorrat der Funktion $f(\varphi)$.

Satz 9: *Das Spektrum der in Satz 7 beschriebenen L-Form ist der Wertvorrat der Funktion $f(\varphi)$.* —

Diese Betrachtungen kann man auch dann durchführen, wenn die Stetigkeitsannahme von Satz 7 (endlichviele Sprungstellen)

---

1) Vgl. diese Nachr. 1907 (Zur Transformation . . .), Satz 2.

2) Vgl. Hurwitz, Math. Ann. 57, pag. 429, Satz IV sowie Math. Ann. 59, pag. 553.

3) Vgl. diese Nachr. 1907 (Die Jacobische Transformation . . .), pag. 101—109.

4) Vgl. „Grundlagen" § 8.

Digitized by Google

durch die weitere ersetzt wird, daß $f(\varphi)$ selbst nebst seinem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrabel ist. Und man kann dann auch umgekehrt, wenn irgend eine beschränkte L-Form vorgelegt ist, nach dem Fischer-Rieszschen Satze[1]) eine Funktion $f(\varphi)$ hinzukonstruieren, die diesen Bedingungen genügt, und kann dann aus dem passend modifizierten Satz 8 die Beschränktheit von $f(\varphi)$ folgern; dabei muß man nur den Begriff „Wert der Funktion", wie stets in der Theorie der Lebesgueschen Integrale, in dem Sinne fassen, daß ein Wert, den eine Funktion nur in einer Punktmenge von Maß 0 approximiert, nicht als Wert der Funktion angesehen wird.

5. Anwendungen.

a. Aus Satz 7 folgt die Beschränktheit vieler Formen, deren Nachweis sonst Schwierigkeiten bereitet, z. B. die Existenz einer beschränkten *quadratischen* Form, die nicht absolut-beschränkt ist, also bedingt-beschränkt[2]). Die Entwicklung der einfachsten, aus geradlinigen Zügen bestehenden Funktionen gibt Anlaß dazu.

b. Die Entwicklung streckenweise konstanter Funktionen in Fourierreihen lehrt in Verbindung mit Satz 9:

Satz 10: *Es gibt beschränkte L-Formen auch außer der Einheitsform E, die lediglich ein Punktspektrum oder neben einem Streckenspektrum noch ein Punktspektrum besitzen, endlich auch solche, deren Streckenspektrum aus mehreren getrennten Stücken besteht.*

c. Satz 9 gestattet ferner, einige Sätze über Fourierreihen abzuleiten, die eine Uebertragung des *Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen auf Fourierreihen* anbahnen. Auch hier beschränke ich mich der Bequemlichkeit halber auf reine Cosinusreihen. Sei

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdot & a_{n-2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & a_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdot & a_0 \end{vmatrix}$$

1) da in einer beschränkten Matrix die Quadratsumme jeder Zeile konvergiert.

2) Die Ausdehnung dieser Betrachtungen auf Sinusreihen liefert in ähnlich einfacher Weise die viel behandelte Beschränktheit der Formen $\sum \frac{1}{(p-q)} x_p y$ und $\sum \frac{1}{p+q} x_p x_q$. Vgl. Grundlagen § 5, pag. 308, vierte Bemerkung, Fußnote sowie eine demnächst im Journ. f. Math. 139 erscheinende Arbeit von Herrn J. Schur, die einfache Beweise für die Beschränktheit dieser und mannigfacher anderer Formen enthält.

Digitized by Google

die Determinante des n^{ten} Abschnitts einer L-Form, so ist $D_1 \geqq 0$, ..., $D_n \geqq 0$ die bekannte Bedingung dafür, daß der n^{te} Abschnitt der L-Form eine definite quadratische Form seiner n Veränderlichen ist. Die Betrachtungen meiner Note „Die Jacobische Transformation ..."[1]) gestatten, dieses Kriterium unmittelbar auf quadratische Formen von unendlichvielen Veränderlichen zu übertragen. Auf die obige quadratische L-Form angewandt, ergibt dies:

Satz 11: *Ist* $a_0 + 2a_1 \cos\varphi + 2a_2 \cos 2\varphi + \cdots$ *die Fourierreihe einer stetigen oder auch nur einer beschränkten, selbst nebst ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrablen Funktion* $f(\varphi)$, *so ist dann und nur dann* $f(\varphi) \geqq 0$ *für alle* φ, *wenn sämtliche Abschnittsdeterminanten* $D_n \geqq 0$ *sind*[2]).

Sind nicht alle $D_n \geqq 0$, so gibt die Anzahl f_n der Vorzeichenfolgen und w_n der Vorzeichenwechsel in der Reihe $1, D_1, \ldots, D_n$ die beim Trägheitsgesetz der quadratischen Formen von n Variabeln auftretenden Invarianten ($f_n + w_n = n$). Diese Zahlen stimmen überein mit der Anzahl der positiven und der negativen unter den Wurzeln der Säkulargleichung der betreffenden Form. Es handelt sich darum, ein Analogon davon für L-Formen zu gewinnen.

Ich ging dabei von der Bemerkung aus, daß nach Satz 11 bei durchweg positiven Funktionen $\frac{w_n}{n} = 0$ ist und $\frac{f_n}{n} = 1$, und daß ähnlich bei durchweg negativen Funktionen, z. B. bei der Funktion -1, nur Zeichenwechsel auftreten, also $\frac{f_n}{n} = 0$, $\frac{w_n}{n} = 1$ ist. Ich bemerkte dann ferner, daß bei $\cos t - \cos\varphi$ die Determinanten $D_n = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$ sind, daß also z. B. für $t = 10^0$ nach 17 Zeichenfolgen immer ein Zeichenwechsel eintritt, während andererseits die zugehörige Funktion in 1/18 des Intervall 0 bis 2π negativ, sonst positiv ist. Von da aus gelangte ich zur Aufstellung von Satz 12.

---

1) diese Nachr. 1907.

2) Der hier gegebene Beweis und ebenso derjenige für Satz 12 muß durch Betrachtungen algebraischer Natur ergänzt werden, wenn er den Fall verschwindender D_n mit behandeln soll, oder es muß die Arbeit von Carathéodory aus den Math. Ann. 64 benutzt werden. — Vgl. auch die neueste Untersuchung von Carathéodory über diesen Gegenstand (Jahresber. d. deutsch. Math. Vereins 1910, Ber. über die Sitzung der math. Ges. zu Göttingen am 28. Juni, sowie eine demnächst in den Rend. del Circ. Mat. di Pal. erscheinende Arbeit), die mir den unmittelbaren Anlaß zu der hier begonnenen Untersuchung gegeben hat.

Digitized by Google

Um zu einem Beweise desselben zu gelangen, setze man

$$x_1^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi h}{n+1}, \quad x_2^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{2\pi h}{n+1}, \quad \ldots,$$

$$x_n^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{n\pi h}{n+1};$$

$x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ sind dann die Ecken des gemeinsamen Polar-n-eders der beiden Formen

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2, \quad x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n \text{ [1]}.$$

Gemäß einer elementaren trigonometrischen Rechnung ist dann

$$x_1^{(h)} x_p^{(h)} + x_2^{(h)} x_{p+1}^{(h)} + \cdots + x_{n-p+1}^{(h)} x_n^{(h)} =$$
$$\frac{n-p}{n} \cos p\varphi - (-1)^h \frac{\sin (n-p)\varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{1}{n},$$

falls $\frac{h\pi}{n+1} = \varphi$ gesetzt wird, und folglich ist

$$Q_n = a_0(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + 2a_1(x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n) + \cdots + 2a_{n-1}(x_1 x_n)$$

für $(x^{(h)})$ gleich dem n^{ten} Fejérschen Mittel der zur betrachteten L-Form gehörigen Fourierreihe, bis auf ein additiv hinzutretendes Glied, das wegen des Faktors $\frac{1}{n}$ mit wachsendem n vernachlässigt werden kann; welche Stelle φ sich ergibt, wird davon abhängen, in welcher Weise man h mit n wachsen läßt. Unter sehr weiten Voraussetzungen, gewiß aber bei jeder stetigen Funktion werden also die Werte von $Q_n(x, x)$ in den n Ecken des obigen Polar-n-eders mit wachsendem n beliebig genau die Werte der Funktion $f(\varphi)$ in den äquidistanten Teilpunkten des Intervalls 0 bis π in $n+1$ Teile approximieren; die Anzahl der positiven und negativen unter ihnen wird im limes sich verhalten wie die Intervalle, in denen $f(\varphi)$ positiv und die, wo sie negativ ist, ihren Längen nach.

Andererseits sind die Stellen $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ ebenfalls zwar nicht exakt, aber mit wachsendem n approximativ die Ecken eines Polar-n-eders von

$$x_1 x_p + x_2 x_{p+1} + \cdots + x_{n-p+1} x_n,$$

und es sind deshalb, nach dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, so viele positive und negative unter den Werten von Q_n in diesen Ecken, als Folgen und Wechsel in der Serie $1, D_1, \ldots, D_n$; für abbrechende Fourierreihen ist diese Approximation leicht exakt durchzuüberlegen, und es folgt:

1) Vgl. Beispiel a in Nr. 3, sowie Hellinger, Journ. f. Math. 136, § 3.

Digitized by Google

Satz 12: *Sind f_n, w_n die Anzahlen der Vorzeichenfolgen und -wechsel in der Serie* $1, D_1, D_2, \ldots, D_n$ $(f_n + w_n = n)$, *so ist das Verhältnis* $f_n : w_n$ *im limes gleich dem Verhältnis der Gesamtlänge der Intervalle, in denen* $f(\varphi)$ *positiv ist, zur Gesamtlänge derjenigen, wo* $f(\varphi)$ *negativ ist*[1]).

Der hier angedeutete Beweis beruht auf der Tatsache, daß alle Formen $Q_n(x, x)$ im limes für $n = \infty$, d. h. daß alle L-Formen ein gemeinsames „Polartetraeder" oder, was dasselbe ist, gemeinsame Hauptachsen haben, deren es kontinuierlich viele gibt; und die Werte der Funktion $f(\varphi)$ erscheinen als die Längen dieser Hauptachsen[2]).

---

1) Es ist dabei vorausgesetzt, daß alle $D_n \neq 0$ sind; vgl. die Anmerkung zu Satz 11.

2) Ein anderer, einfacherer Beweis, den ich während des Druckes dieser Note fand, wird dem Abdruck meiner Habilitationsschrift, l. c. § 5 eingefügt; er bezieht sich ebenfalls zunächst nur auf den Fall abbrechender Fourierreihen (trigonometrische Polynome), auf die Beseitigung dieser Einschränkung beabsichtige ich an anderer Stelle zurückzukommen; dieselbe erfordert lediglich algebraische Betrachtungen.

Digitized by Google

Ueber den zweiten Fall des letzten Fermatschen Lehrsatzes.

Von

Felix Bernstein.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 23. Juli 1910.

In einer oben S. 482 erschienenen Note[1]) ist der erste Fall des letzten Fermatschen Lehrsatzes — der Fall, daß die Zahlen a, b, c in $a^l + b^l + c^l = 0$ zu l prim sind — unter erweiterten Bedingungen bewiesen worden, welche die von E. E. Kummer in seiner letzten Arbeit für diesen Fall gegebenen Bedingungen als Spezialfall enthalten, ohne daß beim Beweise die Kummerschen Kongruenzen benutzt werden.

In der gegenwärtigen Mitteilung wird der zweite Fall des letzten Fermatschen Lehrsatzes unter Bedingungen bewiesen, welche wesentlich wiederum die E. E. Kummerschen Bedingungen als Spezialfall enthalten, sodaß jetzt die ganze letzte E. E. Kummersche Arbeit in vereinfachter und verallgemeinerter Form vorliegt. Die neuen Methoden der Zahlentheorie, welche insbesondere den grundlegenden Arbeiten von D. Hilbert[2]) verdankt werden, werden im folgenden bekannt vorausgesetzt.

---

1) Felix Bernstein, Ueber den letzten Fermatschen Lehrsatz.

2) vgl. D. Hilbert, Die Theorie der alg. Zahlkörper, Jahresber. d. d. Math. vgg. (94/95) u. D. Hilbert, Ueber die Theorie der Relativ-Abelschen Zahlkörper, Gött. Nachr. Math. Phys. Kl. 1898 p. 370; abgedruckt in Acta Math. Bd. 26.

Digitized by Google

§ 1.

Unter der Voraussetzung

I. Die Klassenzahl des Kreiskörpers $k(Z)$ der l^2ten Einheitswurzeln ist einmal und nur einmal durch l teilbar

wird zunächst (§ 1—4) gezeigt werden, daß eine Gleichung

$$a^l + b^l + c^l = 0 \tag{1}$$

für ganze rationale sämtlich nicht verschwindende Zahlen, deren eine, etwa c, durch l teilbar sei, nicht möglich ist.

E. E. Kummer (Math. Abh. d. K. Ak. d. Wiss. Berlin, 1857, No. 3, pg. 41—74) hatte unter den formal komplizierteren Voraussetzungen

1) daß nur eine der $\frac{l-3}{2}$ ersten Bernoullischen Zahlen (die νte) durch l teilbar sei,

2) daß es irgend einen komplexen Modul gäbe, für welchen die bestimmte Einheit $E_\nu(\alpha)$ (erklärt l. c. p. 44) einer $l$ten Potenz nicht kongruent sei,

3) daß die νlte Bernoullische Zahl nicht durch l^2 teilbar sei, ebenfalls die Unmöglichkeit des Bestehens von (1) für drei Zahlen a, b, c der genannten Beschaffenheit bewiesen.

Die 2te seiner Bedingungen besagt, daß der zweite Faktor der Klassenzahl des Körpers der $l$ten Einheitswurzeln zu l prim ist. Die 1te besagt, daß der erste Faktor derselben Klassenzahl einmal und nur einmal durch l teilbar sei, sodaß 1) und 2) aus I folgen. Das Verhältnis von 3) zu I wird später erörtert werden.

Weiterhin wird unter den gegen I erweiterten Voraussetzungen

II. Der Körper $k(Z)$ der l^2ten Einheitswurzeln enthält keine Klasse, die zum Exponenten l^2 gehört und die Klassenzahl h_2 des Körpers $k(\zeta+\zeta^{-1})$ ist zu l prim, (§ 5) der zweite Fall des Fermatschen Satzes bewiesen werden.

§ 2.

Die Klassenzahl h des Körpers $k(\zeta)$ ($\zeta^l = 1$) ist ein Teiler der Klassenzahl von $k(Z)$ also höchstens einmal durch l teilbar. Wir haben vorauszusetzen, daß sie wirklich einmal durch l teilbar ist, da der Fall h zu l prim erledigt ist. Wir bemerken zunächst den

Satz 1. Der Klassenkörper $l$ten Grades zu $k(\zeta)$ entspringt aus einer Einheit ε.

Digitized by Google

Den Beweis dieses Satzes kann man mithilfe des von E. E. Kummer aufgestellten und von D. Hilbert vereinfachten besonderen Einheitensystems für den Kreiskörper, führen. (sh. D. Hilbert Zahlbericht § 138ff.). Einen auf allgemeineren Prinzipien beruhenden Beweis verschieben wir, um den Gang der Darstellung nicht zu unterbrechen, auf das Ende des Paragraphen 5.

Satz 2. Jede primäre Einheit ist reell.

Denn aus

$$\varepsilon = \xi^a \eta \equiv \alpha^l (\mathfrak{l}^l) \quad (\eta \text{ reell}) \tag{2}$$

folgt wenn $\alpha \equiv a (l)$ (a rational)

$$\xi^a \eta \equiv a^l \equiv \xi^{-a} \eta (\mathfrak{l}^l), \tag{3}$$

d. h.

$$\xi^{2a} \equiv 1 (\mathfrak{l}^l), \tag{4}$$

$$2a \equiv 0 (l) \quad \text{d. i.} \quad a \equiv 0 (l). \tag{5}$$

§ 3.

Es besteht der

Satz 3. Wenn eine Einheit ε des Kreiskörpers $b(\xi)$ **unter der Voraussetzung** I der Kongruenz

$$\varepsilon \equiv \alpha^{l^2} (l^2 \mathfrak{l}) \qquad (\mathfrak{l} = (1 - \xi)) \tag{6}$$

genügt, wo α eine ganze oder gebrochene Zahl des Kreiskörpers bedeutet, so ist ε die $l$te Potenz einer Einheit.

Denn andernfalls ist ε eine primäre Zahl, sodaß $\mathsf{E} = \sqrt[l]{\varepsilon}$ einen unverzweigten Körper bestimmt. Wir können in (6) α durch die rationale Zahl $a \equiv \alpha (l)$ ersetzen und schließen aus § 2 Satz 1, daß ε und also E reell ist. Aus der Kongruenz (6) folgt (Hilbert, Zahlbericht pg. 400) die Zerlegung

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{L} . S\mathfrak{L} \ldots S^{l-1}\mathfrak{L} \tag{7}$$

in $(\sqrt[l]{\varepsilon})$ und also

$$\mathsf{E} - \xi^u a^l \equiv 0 \qquad \cdot (\mathfrak{l} . S^u \mathfrak{L}^{l-1}) \tag{8}$$

oder

$$\mathsf{E} \equiv (\mathsf{Z}^u a)^l \quad ((S^u \mathfrak{L})^l) \qquad (u = 0, 1 \ldots l - 1) \tag{9}$$

Danach definiert die Gleichung $x^l = \mathsf{E}$ wieder einen unverzweigten Körper relativ zu $(\mathsf{Z}, \sqrt[l]{\varepsilon})$ oder die Gleichung $x^{l^2} = \varepsilon$ einen unverzweigten Körper zu $k(\mathsf{Z})$. Mithin wäre die Klassenzahl von $k(\mathsf{Z})$ durch l^2 teilbar, was zufolge I unmöglich ist.

Digitized by Google

Also ist $\mathfrak{E}$ die $l$te Potenz Θ^l einer Einheit, was $\varepsilon = N(\Theta)^l$ nach sich ziehen würde. Daher muß schon $\varepsilon = \eta^l$ die $l$te Potenz einer Einheit in $k(\zeta)$ sein.

§ 4.

Wir legen der Betrachtung statt (1) die allgemeinere Gleichung

$$U^l + V^l = \varepsilon_0(\lambda\bar{\lambda})^{ml} W^l \tag{10}$$

zugrunde, wo U, V, W reelle von Null verschiedene untereinander und zu l prime Zahlen bedeuten mögen, während ε_0 eine Einheit des Körpers $b(\zeta)$ bedeute.

Unter $\bar{\alpha}$ verstehen wir eine zu α imaginär konjugierte Zahl. Ferner nehmen wir $m = k \cdot \frac{l-1}{2}$, $k \geqq 1$ an.

Aus (10) erhalten wir

$$\begin{aligned} U + V &= \eta_0 [\lambda\bar{\lambda}]^{ml\frac{l-1}{2}} \Theta_0^l \\ U + \zeta^r V &= (1-\zeta^r)\mathfrak{j}_r^l \end{aligned} \tag{11}$$

wo $\mathfrak{j}_r$ teilerfremde zu l prime, Ideale aus $k(\zeta)$ bedeuten, während Θ_0 eine Zahl, η_0 eine Einheit aus $k(\zeta+\zeta^{-1})$ ist. In der Tat folgt aus den Gleichungen

$$(U+\zeta^r V) - (U+\zeta^s V) = (\zeta - \zeta^s) V, \tag{12}$$

und

$$\zeta^r(U+\zeta^s V) - \zeta^s(U+\zeta^r V) = (\zeta^r - \zeta^s) U, \tag{13}$$

daß $(U+\zeta^r V)$ und $(U+\zeta^s V)$ den größten gemeinsamen Teiler $(= (1-\zeta)$ haben. Andrerseits würde aus

$$U + \zeta^r V \equiv 0(\mathfrak{l}^2) \tag{14}$$

$$U + \zeta^{-r} V \equiv 0(\mathfrak{l}^2), \tag{15}$$

also

$$V(\zeta^r - \zeta^{-r}) \equiv 0(\mathfrak{l}^2) \quad \text{d. i.} \quad V \equiv 0(\mathfrak{l}) \tag{16}$$

folgen, da U und V reell sind. Daher geht nur in $U+V$ eine höhere als die erste Potenz von $\mathfrak{l}$ auf.

Wir beweisen, daß $\mathfrak{j}_r$ ein Hauptideal ist.

Aus

$$U + V \equiv 0(\mathfrak{l}^{(2m-1)l+1}) \tag{17}$$

folgt

Digitized by Google

$$\frac{U+\zeta^r V}{1-\zeta^r}:\frac{U+\zeta^{-r}V}{1-\zeta^{-r}} \equiv 1(l^{(2m-1)l+1}). \tag{18}$$

Nun ist die Zahl $\frac{U+\zeta^r V}{1-\zeta^r}:\frac{U+\zeta^{-r}V}{1-\zeta^{-r}}$ vermöge

$$\frac{U+\zeta^r V}{1-\zeta^r}:\frac{U+\zeta^{-r}V}{1-\zeta^{-r}} = \frac{i_r^l}{i_{-r}^l} \tag{19}$$

die $l$te Potenz eines Idealbruchs und vermöge (18) primär, als ist sie, da nach Satz 1 § 2 der Klassenkörper aus einer reellen Einheit entspringt, bis auf eine reelle Einheit ε_r^* die $l$te Potenz einer gebrochenen Zahl des Körpers $k(\zeta)$. Wir setzen

$$\frac{U+\zeta^r V}{1-\zeta^r}:\frac{U+\zeta^{-r}V}{1-\zeta^{-r}} = \varepsilon_r^* \vartheta_r^l. \tag{20}$$

Die linke Seite von (20) gleich μ gesetzt, folgert man übrigens noch schärfer aus der Gleichung $\mu\bar{\mu} = 1$, daß ε_r^* die $l$te Potenz einer Einheit ist, sodaß wir $\varepsilon_r^* = 1$ annehmen können.

Andrerseits ist

$$\frac{U+\zeta^r V}{1-\zeta^r}\cdot\frac{U+\zeta^{-r}V}{1-\zeta^{-r}} = \eta_r^* i_r^l, \tag{21}$$

wo i eine Zahl η_r^* eine Einheit aus $k(\zeta+\zeta^{-r})$ bedeutet, da h_2 zu l prim ist.

Folglich ist

$$\left(\frac{U+\zeta^r V}{1-\zeta^r}\right)^2 = \eta_r^* (i_r \vartheta_r)^l, \tag{22}$$

oder, wenn $2.2' \equiv 1(l)$ ist, durch Erheben in die $2'$te Potenz

$$\frac{U+\zeta^r V}{1-\zeta^r} = \eta_r \Theta_r^l, \tag{23}$$

wo η_r eine reelle Einheit, Θ_r eine ganze Zahl in $k(\zeta)$, ist.

Aus (23) folgt nun, indem wir r in $l-r$ verwandeln und subtrahieren

$$\eta_r \Theta_r^l - \eta_{-r}\Theta_{-r}^l = \frac{U(\zeta^r-\zeta^{-r})+V(\zeta^r-\zeta^{-r})}{(1-\zeta^r)(1-\zeta^{-r})} \tag{24}$$

oder zufolge (11) und mit Rücksicht auf $\eta_r = \eta_{-r}$,

$$\Theta_r^l - \Theta_{-r}^l = \varepsilon(1-\zeta)^{(2m-1)l}\Theta_0^l, \tag{25}$$

wo ε eine Einheit aus $k(\zeta)$ bedeutet. Die linke Seite ist das Produkt der Faktoren

Digitized by Google

$$\Theta_r - \zeta^u \Theta_{-r} \qquad (u = 0,1 \ldots, (l-1), \tag{26}$$

von denen je zwei den größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{l} = (1-\zeta)$ haben. Daher enthält nur einer die zweite und damit die $(2m-2)l+1$te Potenz von $\mathfrak{l}$. Wir wollen die, nur bis auf eine Potenz von ζ als Faktor, definierte Zahl Θ_r so normieren, daß sie einer ganzen rationalen Zahl nach dem Modul $\mathfrak{l}^2$ kongruent ist. Dann ist die konjugierte imaginäre Zahl Θ_{-r} kongruent Θ_r nach dem Modul $\mathfrak{l}^2$ und es ist vermöge (26)

$$\Theta_r \equiv \Theta_{-r} (\mathfrak{l}^{(2m-2)l+1}). \tag{27}$$

Ferner ist

$$(\Theta_r - \zeta^u \Theta_{-r})(\Theta_{-r} - \zeta^{-u} \Theta_r) = \bar{\eta}_u J_u^l (1-\zeta^u)(1-\zeta^{-u}), \tag{28}$$

wo J_u, da h_2 zu l prim ist, eine reelle Zahl wird.

Aus (27) und (28) folgt

$$\Theta_r^2 \equiv \eta J_u^l \ (\mathfrak{l}^{(2m-2)l+1}), \tag{29}$$

oder

$$\eta_u^{-1} \Theta_r \Theta_{-r} \equiv J_u^l (\mathfrak{l}^{(2m-2)l+1}). \tag{30}$$

Nun ist $m > 2$ also $(2m-2) > 2$ und damit ist gezeigt, daß $\Theta_r \Theta_{-r}$ durch Multiplikation mit einer reellen Einheit primär gemacht werden kann.

Aus (23) und (11) erhalten wir nun für $r \not\equiv \pm s (l)$

$$\frac{U^2 + (\zeta^r + \zeta^{-r}) UV + V^2}{(1-\zeta^r)(1-\zeta^{-r})} = \eta_r^2 (\Theta_r \Theta_{-r})^l \tag{31}$$

und

$$U^2 + UV + V^2 = \eta_0^2 (\lambda\bar{\lambda})^{(2m-1)l+1} \Theta_0^{2l}, \tag{32}$$

woraus durch Elimination von U^2, UV, W^2

$$\eta_r^2 (\Theta_r \Theta_{-r})^l - \eta_s^2 (\Theta_s \Theta_{-s})^l = \eta_0^2 (\lambda\bar{\lambda})^{(2m-1)l+1} \cdot \frac{(\zeta^r + \zeta^{-r} - \zeta^s - \zeta^{-s}}{(1-\zeta^r)(1-\zeta^{-r})(1-\zeta^s)(1-\zeta^{-s})} \Theta_0^{2l} \tag{33}$$

folgt. Da nun, wie gezeigt, $\Theta_r . \Theta_{-r}$ und $\Theta_s . \Theta_{-s}$ durch Multiplikation mit passenden reellen Einheiten primär gemacht werden kann, so erhält man nach Division mit Einheiten eine Gleichung der Form

$$U_1^{*l} - \eta^* V_1^{*l} = \varepsilon^* (\lambda\lambda)^{(2m-1)l+1} \Theta_0^{2l}, \tag{34}$$

wo η^* und ε^* Einheiten, U_1^* und V_1^* reelle primäre Zahlen bedeuten, die, wie aus (12) und (13) zu sehen, teilerfremd sind.

Digitized by Google

Danach ist

$$\eta^* \equiv \left(\frac{U_1^*}{V_1^*}\right)^l (l^{(2m-1)l+1}) \tag{35}$$

und da, vermöge $\frac{U_1^*}{V_1^*} \equiv a^l(l^l)$, $\frac{U_1^{*l}}{V_1^{*l}} \equiv a^{l^2}(l^{2l}.1)$ ist, so ist, unter Rücksicht auf $2m-1>2$

$$\eta^* \equiv a^{l^2}(l^2.1). \tag{36}$$

Also ist nach Satz 3, § 3 η^* die $l$te Potenz η^l einer Einheit η, die wir so normieren können, daß sie reell wird. D. h. er besteht in reellen teilerfremden, zu l primen, Zahlen U_1, V_1, W_1 eine Gleichung

$$U_1^l + V_1^l = \varepsilon_1(\lambda\bar{\lambda})^{(2m-1)l} W_1^l, \tag{37}$$

wenn

$$U_1 = U_1^* \quad V_1 = -V_1^*\eta \quad W_1 = \Theta_0^2 \tag{38}$$

gesetzt wird, von derselben Form, wie (10).

Die Gleichung

$$(W) = (\Theta_0.\Theta_1 \dots \Theta_{l-1}) \tag{39}$$

zeigt, daß $W_1 = \Theta_0^2$ weniger Primideale enthält, als W, außer, wenn alle $\Theta_1, \dots, \Theta_{l-1}$ Einheiten sind. Dann aber würde vermöge der Gleichung (23)

$$\frac{U+\zeta^r V}{1-\zeta^r} = \eta_r \Theta_r^l, \tag{23}$$

wo η_r eine reelle Einheit ist und wo Θ_r^l als $l$te Potenz einer Einheit von $k(\zeta)$ ebenfalls reell ist, folgen

$$\frac{U+\zeta^r V}{1-\zeta^r} = \frac{U+\zeta^{-r} V}{1-\zeta^{-r}}, \tag{40}$$

oder

$$V = -U, \tag{41}$$

was nach der Voraussetzung unmöglich ist.

Danach nimmt die Anzahl der Primfaktoren, die in den auf gleiche Weise gebildeten Zahlen W, W_1, W_2, ... aufgehen, unbegrenzt ab, was gegen den Satz der Endlichkeit der Primfaktorenzerlegung verstößt.

§ 5.

Unter den erweiterten Voraussetzungen

II. Der Körper $k(Z)$ der l^2ten Einheitswurzeln enthält keine Klasse, die zum Exponenten l^2 gehört, und die Klassenzahl h_2 des Körpers $k(\zeta+\zeta^{-1})$ ist

Digitized by Google

zu l prim, wird die Unmöglichkeit des Bestehens der Gleichung (1) unter den gleichen Annahmen über a, b, c wie in § 1 bewiesen werden.

Unter den gegenwärtigen Voraussetzungen besteht der

Satz 4. Jede primäre Zahl, die $l$te Potenz eines Ideals ist, ist bis auf eine primäre Einheit, die $l$te Potenz einer Zahl. D. h. die rel. cyklischen Klassenkörper K_l vom Grade l entspringen aus Einheiten.

Die Klassen von $k(\zeta)$ lassen sich in der Form darstellen

$$Cc, \tag{42}$$

wo c eine Klasse aus $k(\zeta+\zeta^{-1})$ bedeutet und

$$C\overline{c} = 1 \tag{43}$$

ist. Die Klassen, deren $l$te Potenz die Hauptklasse ist, werden ausführlicher in der Gestalt

$$C_1^{X_1} \dots C_\sigma^{X_\sigma} \dots c_1^{x_1} \dots c_g^{x_g} D^l \qquad (X_i, x_i = 0,1 \dots l-1) \tag{44}$$

dargestellt, welche infolge unserer Annahme daß $k(\zeta+\zeta^{-1})$ eine zu l prime Klassenzahl besitzt, hier in die speziellere Form

$$C_1^{X_1} \dots C_\sigma^{X_\sigma} D^l \tag{45}$$

übergeht.

Zu der Kongruenz

$$X_i \equiv 0 (l) \tag{46}$$

gehöre die singuläre Primärzahl M. Zur selben Kongruenz gehört die singuläre Primärzahl $\overline{M}$, welche zu M imaginär konjugiert ist, da die Gruppen

$$\overline{C}_1^{X_1} \dots \overline{C}_{i-1}^{X_{i-1}} . \overline{C}_{i+1}^{X_{i+1}} \dots \overline{C}_\sigma^{X_\sigma} \tag{47}$$

und

$$C_1^{X_1} \dots C_{i-1}^{X_{i-1}} . C_{i+1}^{X_{i+1}} \dots C_\sigma^{X_\sigma} \tag{48}$$

vermöge (43) übereinstimmen.

Also ist

$$M = \overline{M}^a \beta^l \tag{49}$$

und also

$$M = M^{a \cdot a} (\beta \overline{\beta}^a)^l, \tag{50}$$

woraus

$$a^2 - 1 \equiv 0 (l) \tag{51}$$

folgt, da M nicht die $l$te Potenz einer Zahl ist.

Digitized by Google

Wäre nun

(52) $$a \equiv -1(l),$$

so wäre

(53) $$M\overline{M} = \gamma^l$$

oder es wäre in dem Körper $(\sqrt[l]{\overline{M}}, \xi)$ ein unverzweigter relativ-cyklischer Körper zu $k(\xi+\xi^{-1})$ enthalten. Da dies aber die Teilbarkeit von h_2 durch l zur Folge hätte, so kann zufolge der Voraussetzung nur

(54) $$a \equiv +1(l)$$

stattfinden. Es ist also

(55) $$M = \overline{M}\gamma^l$$

und also

(56) $$M = (M\overline{M})^{\mathfrak{x}'}\delta^l,$$

wenn $2.2' \equiv 1(l)$ ist. Ist nun unter $\mathfrak{h}$ ein Ideal verstanden

(57) $$(M) = \mathfrak{h}^l,$$

so ist

(57) $$(M\overline{M}) = (\mathfrak{h}\overline{\mathfrak{h}})^l$$

und da

$$\mathfrak{h}\overline{\mathfrak{h}} \sim 1$$

ist, so wird

(58) $$M\overline{M} = \varepsilon\vartheta^l,$$

was in Verbindung mit (56)

(59) $$M = \eta.\varkappa^l$$

liefert. Die Einheit η ist überdies als primäre Einheit reell, womit unser Satz bewiesen ist. Ferner besteht wie früher der Satz 3. Von nun an verlaufen alle Schlüsse wörtlich wie früher, und es ist die Unmöglichkeit des Bestehens der Gleichung (1) unter den neuen Voraussetzungen erkannt.

Man erkennt beiläufig durch die vorstehende Betrachtung, daß die singulären Primärzahlen die zu Kongruenzen

$$X_i \equiv 0(l)$$

gehören, stets reell sind.

Verstehen wir also unter

G_1 die Anzahl der Kongruenzen $X_i \equiv 0(l)$ die zu singulären Einheiten gehören,

G_2 die Anzahl der Kongruenzen $X_i \equiv 0(l)$, die zu singulären Zahlen, die nicht Einheiten sind,

Digitized by Google

g die Zahl der Kongruenzen $x_i \equiv 0(l)$,
so besteht also die Relation

$$G_2 \leqq g. \tag{45}$$

Aus der Bedingung $\mu\mu = \alpha^l$ für singuläre Zahlen, die zu einer Kongruenz $x_i \equiv 0(l)$ gehören, folgt die Ungleichung

$$g \leqq G. \tag{46}$$

Die Ungleichung (46) hat Herr E. Hecke[1]) kürzlich bewiesen. Ist also h nur einmal durch l teilbar, und also

$$G + g = 1, \tag{47}$$

so folgt aus (45) und (46)

$$g = 0, \quad G_2 = 0, \quad G_1 = 1, \tag{48}$$

womit der Satz I § 2 bewiesen ist.

---

1) E. Hecke, Über nicht-reguläre Primzahlen und den Fermatschen Satz. Gött. Nachr. 23. Juli 1910.

Digitized by Google

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XXIV.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 29. Oktober 1910.

Die Hydrierung ungesättigter Kohlenstoffverbindungen unter Auflösung der mehrfachen Kohlenstoffbindungen ist auf verschiedenen Wegen durchführbar, nämlich erstens unter Anwendung chemischer Reduktionsmittel, welche geeignet sind, aus saurer oder alkalischer Quelle naszierenden Wasserstoff zu liefern und zweitens unter Anwendung von molekularem Wasserstoff bei Gegenwart eines Katalysators. Die erste, ältere Methode ist von begrenzter Anwendbarkeit, da nur Doppelbindungen von bestimmter Lage im Molekül sich dabei reduzierbar erweisen und sie hat außerdem den Nachteil, daß unter dem Einfluß (sauerer oder alkalischer) chemischer Reagentien ungesättigte Verbindungen sehr leicht Umlagerungen erleiden können. Die zweite Methode ist erst in neuester Zeit in Aufnahme gekommen. Sabatier und Senderens haben bekanntlich mit großem Erfolg unter Verwendung von Nickel als Katalysator u. a. die Überführung von Benzolverbindungen in vollkommen hydrierte cyklische Verbindungen vollziehen können. Man bedarf aber, um die Reaktion durchzuführen erhöhter Temperatur. Einer solchen darf man veränderliche Verbindungen, wie es z. B. viele Körper der Terpenreihe sind, nicht aussetzen, auch benötigt man für Durchführung der Versuche relativ großer Substanzenmengen. Weit geeigneter ist für Laboratoriumszwecke die

Digitized by Google

von Paal[1]) ausgearbeitete Methode, bei der, unter Verwendung von metallischem Palladium als Katalysator, die Reaktion bei gewöhnlicher Temperatur verläuft und die sich auch mit gutem Erfolg mit ganz kleinen Substanzmengen durchführen läßt. Ein etwas verändertes Verfahren wendete Skita[2]) an, ferner Vavon[3]) und endlich S. Fokin[4]), der aber ausdrücklich angiebt, daß cyklische Verbindungen mit Doppelbindungen in den Temperaturgrenzen von Zimmertemperatur bis 100° nicht merkbar reagierten.

Aus bestimmter Veranlassung hatte ich die Paal'sche Methode zwecks Reduktion einiger ungesättigter Verbindungen der Terpenreihe angewendet, bei denen andere Methoden überhaupt nicht in Frage kommen konnten. Dabei habe ich das von Paal ausgearbeitete Verfahren als eines der wertvollsten neueren Hilfsmittel für die Erforschung der ungesättigten alicyklischen Verbindungen schätzen gelernt, dessen systematische Verwendung die Klärung einer ganzen Reihe noch ungelöster Fragen verspricht. Der unschätzbare Vorzug der Methode in ihrer Anwendung auf Terpenverbindungen liegt zunächst darin, daß man die zu behandelnde Substanz unter Bedingungen mit Wasserstoff beladen kann, unter denen jede Umlagerung ausgeschlossen ist. Die Reaktionen verlaufen bei gewöhnlicher Temperatur und man bedarf gar keiner oder höchstens indifferenter Lösungsmittel für die zu reduzierende Substanz. Besonders zeigte sich aber — und das ist das wesentlich Neue, was hier hervorzuheben ist — daß das Anwendungsgebiet des Paal'schen Reduktionsverfahrens ganz bedeutend über das hinausgeht, was wir mit Hülfe der eigentlich chemischen Reduktionsmethoden überhaupt erreichen können. Es lassen sich mit Hülfe des Palladium-Verfahrens bei gewöhnlicher Temperatur Kohlenstoff-Bindungen durch Wasserstoffaddition auflösen, die anderen Reduktionsmitteln Widerstand entgegen setzen.

So erweisen sich z. B. bei mehrfach ungesättigten Ketonen bei Anwendung der bisher üblichen Reduktionsmethoden nur solche Aethylenbindungen durch Wasserstoffaddition auflösbar, die dem Carbonyl benachbart liegen. Die Paal'sche Methode gestattet alle

1) Paal, Ber. **38**, 1398, 2414 (1905); **40**, 1392. 2201 (1907) **41**, 805. 818. 2273. 2282 (1908); **42**, 1541. 1553. 2239. 2930 (1909).

2) Skita, Ber. **41**, 2938 (1908); **42**, 1627 (1909).

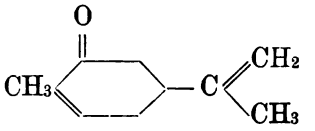
3) Centralbl. **1910**. I, 358.

4) S. Fokin, Centralbl. **1908**, II. 1996. Z. f. ang. Chemie **22**, 1451. 1496 (1909).

Digitized by Google

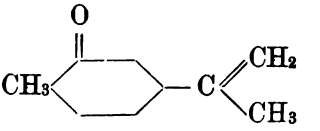
überhaupt vorhandenen Aethylenbindungen zu reduzieren. Als Beispiel diene das Carvon (I), das unter dem Einfluß von nascierendem Wasserstoff aus saurer oder alkalischer Quelle nur bis zu dem Bihydrocarvon (II) reduzierbar ist (bezw. bis zu dem zugehörigen ungesättigten Alkohol), während es sich mit freiem Wasserstoff bei Gegenwart von Palladium leicht zu gesättigtem Tetrahydrocarvon (III) abwandeln läßt:

I.



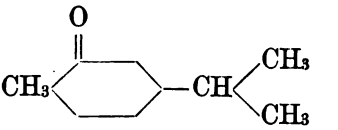
Carvon
$C_{10}H_{14}O$

II.



Dihydrocarvon
$C_{10}H_{16}O$

III.



Tetrahydrocarvon
$C_{10}H_{18}O$.

Man ist nunmehr also im Stande das Carvon direkt und leicht in aktives Tetrahydrocarvon umzuwandeln, was bis dahin auf keine Weise möglich war.

Ebenso kann man in anderen Verbindungen durch freien Wasserstoff bei Anwesenheit von Palladium Aethylenbindungen zur Reduktion bringen, die bisher als nicht direkt durch Wasserstoff auflösbar galten. Dafür werden im folgenden eine ganze Reihe von Beispielen mitgeteilt werden. Diese Möglichkeit, Kohlenstoff-Doppelbindungen zu lösen, an welcher Stelle des Moleküls sie auch liegen mögen, ist jedenfalls ein Fortschritt, der grade für die Chemie der alicyklischen Verbindungen von besonderer Bedeutung ist.

Es kommt hinzu, daß durch Palladium-Wasserstoff die Kohlenstoff-Doppelbindungen so viel leichter gelöst werden, als die Doppelbindung z. B. von Sauerstoff an Kohlenstoff, daß man bei der Reduktion ungesättigter Ketone die Reaktion so leiten kann, daß so gut wie gar kein Alkohol auftritt, der Verbindungstypus, von dem man ausgeht, also erhalten bleibt. Das gelingt in bestimmten Fällen ja auch bei Anwendung der gewöhnlichen

Digitized by Google

Reduktionsmethoden[1]), aber weitaus nicht so leicht und so vollkommen. Vor allen Dingen fallen bei Anwendung des neuen Verfahrens alle die unangenehmen Nebenerscheinungen fort, Verharzung, reichliche Pinakonbildung u. s. w., welche bei der Reduktion ungesättigter Ketone sich sonst so unliebsam bemerklich machen. Infolge dessen sind die Ausbeuten an den reduzierten Produkten meist sehr gute.

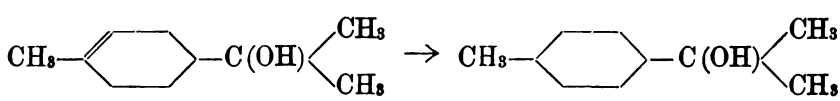
Was die technische Ausführung der Versuche betrifft, so ist den exakten Angaben von Paal kaum etwas hinzuzufügen. Eine wesentliche Bedingung für das gute Gelingen der Versuche ist aber, daß man die zu reduzierenden Substanzen in möglichst reinen Zustand verwendet. Ungesättigte Terpenverbindungen z. B., welche längere Zeit aufbewahrt waren, enthalten (infolge von Sauerstoffaufnahme u. s. w.) stets Fremdsubstanzen, welche schädigend auf den Katalysator einwirken, so daß die Reaktionen vorzeitig zum Stillstand kommen und unbefriedigende Resultate geben. Sind die Reduktionen nicht vollständig verlaufen, so kann man ungesättigte Anteile natürlich durch Behandlung mit Permanganat entfernen.

Im Folgenden wird an einer Reihe von Beispielen die Anwendbarkeit des Verfahrens auf verschiedenartige Verbindungstypen namentlich aus der Gruppe der alicyklischen Substanzen illustriert werden. Bei der praktischen Durchführung der Reduktionsversuche bin ich in sehr geschickter Weise von Herrn Dr. Hans Tiedtke und Dr. Paul Virck unterstützt worden.

I. Reduktion ungesättigter cyklischer Alkohole.

1) Darstellung von p-Menthanol (8) aus α-Terpineol.

Zur Reduktion wurde reines inaktives α-Terpineol vom Schmelzpunkt 35° verwendet. Die Wasserstoffaufnahme erfolgt schnell und vollständig in dem Sinn:



α-Terpineol, $C_{10}H_{17}OH$ Menthanol (8), $C_{10}H_{19}OH$.

Das Menthanol (8) hat folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 209—210° ohne jede Zersetzung.

$d_{20} = 0.905$, $n_D = 1.4629$ bei 20°

1) Wallach, Terpene und Campher, **122**, 6.

Digitized by Google

Berechnet für $C_{10}H_{19}OH$	Gefunden
M 47.55	47.47

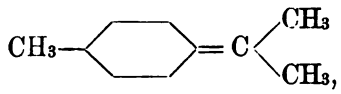
0.2060 gr gaben 0.5790 CO_2 und 0.2401 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{20}O$	Gefunden
C 76.85	76.66
H 12.99	13.03

Das Phenylurethan des gesättigten Alkohols schmilzt nach dem Umkrystallisieren aus Methylalkohol bei 115—116°.

Die Reduktion des α-Terpineols zum Menthanol (8) ist inzwischen auch Béhal[1]) nach der Sabatier'schen Methode gelungen. Die von Béhal für das Präparat angegebenen Eigenschaften (Siedep. 206—208°, $d_{20} = 0.912$, $n_D = 1.4687$) stimmen ziemlich gut mit den oben mitgeteilten. Für das Phenylurethan giebt Béhal den Schmelzpunkt aber 94—95° an. Es bezieht sich das wahrscheinlich auf ein optisch aktives Präparat während ich bisher nur das inaktive α-Terpineol der Reduktion unterworfen habe.

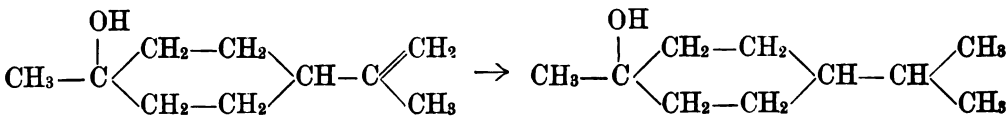
Die Beobachtungen Béhals über das Verhalten des Menthanol (8) gegen Wasser abspaltende Agentien, stimmen ganz mit den meinen überein. Man erhält daraus leicht das von mir früher beschriebene semicyklische $\Delta^4(8)$-Menthen



von dem aus man, wie ich s. Z. nachwies, zum Menthon gelangen kann[2]).

2) Darstellung von p-Menthanol (1) (tertiärem Carvomenthol) aus β-Terpineol.

Das β-Terpineol (Schmelzp. 32°) läßt sich ebenso leicht reduzieren wie α-Terpineol



β-Terpineol p-Menthanol (1).

1) Centralbl. **1910**. II. 645.
2) A. **360**, 72 ff. (1908).

Digitized by Google

Das Menthanol (1) ist schon vor längerer Zeit zuerst von v. Baeyer[1]) auf einem Umweg aus Carvomenthen dargestellt worden. Ueber Eigenschaften der reinen Verbindung, die zu ihrer Charakterisierung beitragen könnten, ist aber noch nichts bekannt. Diesbezüglich kann nun Folgendes mitgeteilt werden.

Das Menthanol (1) siedet bei 208—209° ohne Zersetzung und zeigt $d_{20} = 0.9000$, $n_D = 1.4619$ bei 20°

Berechnet für $C_{10}H_{19}OH$	Gefunden
M 47.55	47.64

0.2294 gr gaben 0.6463 CO_2 und 0.2646 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{20}O$	Gefunden
C 76.85	76.84
H 12.99	12.90.

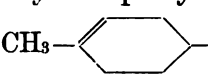
Das Phenylurethan des p-Menthanol (1) schmilzt bei 100—101°.

Beim Erwärmen mit Chlorzink spaltet der Alkohol sehr leicht Wasser ab. Der entstehende Limonen-artig riechende Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{18}$ zeigt folgende Konstanten:

Siedepunkt 174—175°, $d_{21} = 0.821$, $n_D = 1.4551$ bei 21°

Berechnet für $C_{10}H_{18}$ ⊢	Gefunden
M 45.63	45.61.

Die Molekularrefraktion deutet auf das Fehlen einer semicyklischen Bindung. Das auf dem angegebenen Wege dargestellte, jetzt sehr zugängliche Präparat besteht also überwiegend oder ganz aus Δ^1-Tetrahydro-p-Cymol (Carvomenthen)



Die mitgeteilten Konstanten stimmen mit denen überein, welche für den auch nach anderen Methoden gewinnbaren Kohlenwasserstoff in der Literatur sich finden.

Synthese von Carvotanaceton aus Carvomenthen.

Carvomenthen verbindet sich mit Nitrosylchlorid. Das erhaltene Nitrosochlorid $(C_{10}H_{18}NOCl)_2$ erwies sich als nicht ganz einheitlich. Beim Umkrystallisieren aus Aceton oder Methylalkohol erhält man neben relativ schwer löslichen, bei 95—96°

1) Ber. **26**, 2270 (1893).

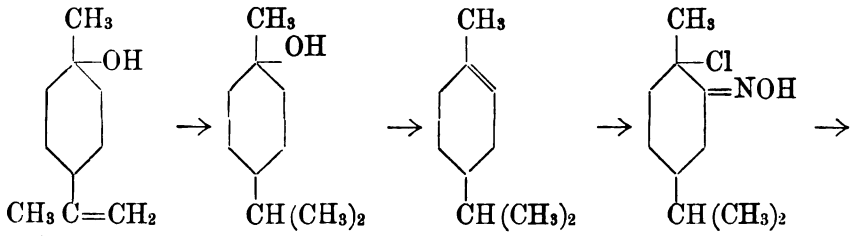
Digitized by Google

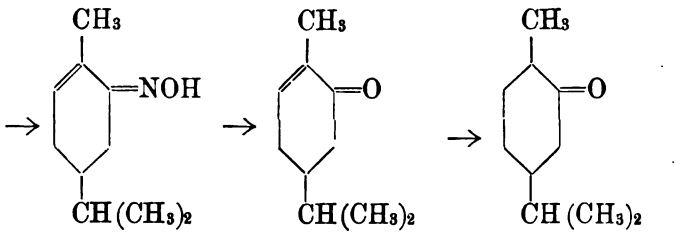
schmelzenden Krystallen auch niedriger (bei 75° beginnend) schmelzende Anteile. Zur weiteren Verarbeitung kam zunächst das bei 95° schmelzende Produkt. Es liefert mit Piperidin ein in Methylalkohol ziemlich schwerlösliches in Nadeln krystallisierendes bei 159° schmelzendes Nitrolpiperidid. Durch Chlorwasserstoff-Entziehung (mit Natriumacetat in Eisessiglösung) kommt man zu einem festen Oxim. Aus diesem wurde das Keton regeneriert und in das Semicarbazon verwandelt. Die erhaltene gut krystallisierte Verbindung schmolz nach dem Umkrystallisieren bei 177—178°.

Das aus dem reinen Semicarbazon nochmals regenerierte Keton wurde durch Erwärmen mit einer methylalkoholischen Lösung von Hydroxylamin oximiert. Das Oxim schmolz bei 93—94° und gab mit Carvotanacetoxim gemischt keine Schmelzpunktsdepression.

Es liegt also in dem aus Carvomenthen erhaltenen Keton i-Carvotanaceton vor und damit eine neue Synthese dieses Ketons.

Die Abwandlung des β-Terpineols in Carvotanaceton schließt auch eine Ueberführung des tertiären Alkohols in Tetrahydrocarvon ein, zu dem Carvotanaceton bekanntlich leicht reduzierbar ist[1]). Der Verlauf des Vorgangs erhellt aus folgenden Formelbildern:



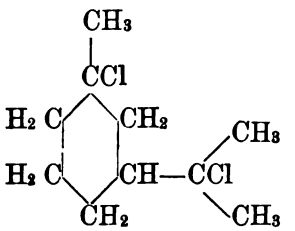


1) Ber. 28, 1960 (1895).

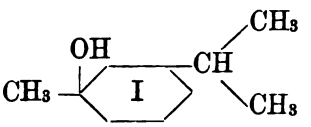
Digitized by Google

3) Reduktion des Sylveterpineols.

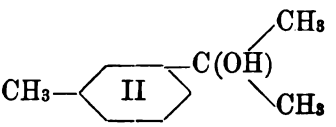
Die Konstitution des Sylveterpineols, das man aus Sylvestrenbihydrochlorid leicht erhalten kann[1]), ist noch nicht festgestellt. Giebt man dem Ausgangskörper die Formel:



so sind, was die Stellung des Hydroxyls betrifft, 2 Möglichkeiten gegeben, während für die Lage der Doppelbindung im ungesättigten tertiären Alkohol mehrere vorhanden sind. Für das hydrierte Sylveterpineol kommen aber nur die beiden Formeln



und



in Betracht. Zwischen beiden wird die weitere Untersuchung leicht eine Entscheidung zu treffen erlauben[2]). Vorläufig sei hier nur erwähnt, daß das Sylveterpineol auch leicht Wasserstoff aufnimmt und daß das Bihydrosylveterpineol (m-Menthanol) folgende Eigenschaften aufweist:

Siedepunkt 206—208°, $d_{18} = 0.9090$, $n_D = 1.4645$ bei 18°

Berechnet für $C_{10}H_{19}OH$	Gefunden
M 47.55	47.40.

Das Phenylurethan des gesättigten Alkohols bildet sich langsam und ist sehr löslich. Nach dem Umkrystallisieren aus verdünntem Methylalkohol schmilzt es bei 71—74°. Beim Erwärmen mit Chlorzink spaltet der Alkohol leicht Wasser ab und es entsteht ein m-Menthen von folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt 168—169°, $d_{20} = 0.8180$, $n_D = 1.4556$

Berechnet für $C_{10}H_{18}$	Gefunden
M 45.63	45.82

1) Annal. **357**, 74 (1907).

2) Allerdings ist im Auge zu behalten, daß auch ein Gemisch beider Isomerer vorliegen kann.

Digitized by Google

Analyse:

0.1026 gr gaben 0.3278 CO_2 und 0.1215 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{18}$	Gefunden
C 86.87	87.13
H 13.13	13.25.

Bemerkenswert ist, daß dieser Kohlenwasserstoff der Meta-Reihe niedriger siedet als die auf analogem Wege entstehenden Para-Verbindungen.

Dies m-Menthen ist schwerlich einheitlich. Seine erhöhte Molekularrefraktion deutet auf die Anwesenheit eines Kohlenwasserstoffs mit semicyklischer Bindung hin.

Bei der Einwirkung von Nitrosylchlorid entsteht langsam ein Nitrosochlorid.

4) Reduktion des Pinolhydrats.

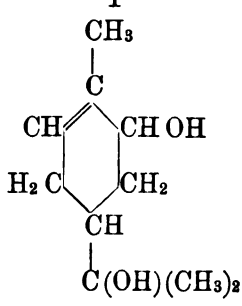
Das i-Pinolhydrat (Schmelzpunkt 131°), $C_{10}H_{18}O_2$, nimmt außerordentlich leicht Wasserstoff auf und verwandelt sich dabei in eine bei 139—140° schmelzende Verbindung $C_{10}H_{20}O_2$.

1) 0.3409 gr gaben 0.8662 CO_2 und 0.3568 H_2O
2) 0.1884 gr gaben 0.4803 CO_2 und 0.1996 H_2O

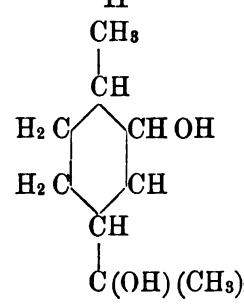
Berechnet für $C_{10}H_{20}O_2$	Gefunden	
	1	2
C 69.71	69.30	69.53
H 11.71	11.71	11.85.

Für das Pinolhydrat nimmt man auf Grund eingehender Experimentaluntersuchungen[1]) die Formel I an und der hydrierten Verbindung sollte man demnach die Formel II zuerkennen

I



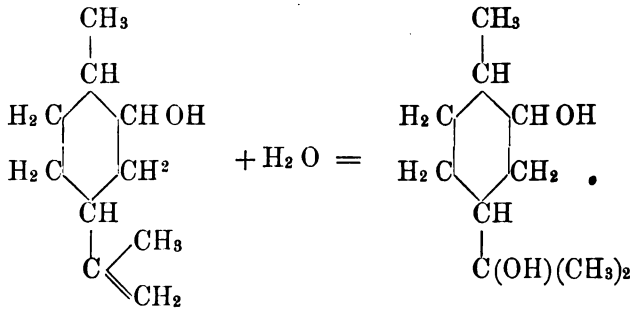
II



1) Annal. **291**, 358 (1896).

Digitized by Google

Formel II ist nun identisch mit der Verbindung, die als Hydratisierungsprodukt des Bihydrocarveols erhalten werden kann



Bihydrocarveol 2.8 Menthandiol

Letztere Verbindung ist von Rupe und Schloschoff[1]) durch Schütteln von Bihydrocarveol mit 35 %iger Schwefelsäure gewonnen. Ich habe dann gefunden, daß sie viel glatter entsteht, wenn man ganz verdünnte Säure für den Zweck verwendet[2]). Während nämlich bei der Verwendung der konzentrierten Säure ein großer Teil des Produkts verharzt, erhält man die Verbindung sogleich ganz rein und in vorzüglicher Ausbeute, wenn man Bihydrocarveol eine Reihe von Tagen mit etwa 3 %iger Schwefelsäure schüttelt.

Das Glycol ist optisch aktiv und von Rupe und Schloschoff in der Rechts-Modifikation dargestellt. Ich habe außer der Rechts- auch die Links-Modifikation gewonnen. Beide schmelzen glatt bei 112—113° und sieden unzersetzt bei 265—270° (unc.). Baeyer und Henrich[3]), die die Verbindung aus Bihydrocarveolhydrobromid darstellten, geben als Schmelzpunkt 110,5—112° an. Eine zweite, in Benzol schwerer lösliche, bei 103—104° schmelzende Modifikation, wie sie Rupe und Schloschoff beobachteten, habe ich bei dem von mir eingehaltenen Darstellungsverfahren nicht aufgefunden. Nur in den letzten Mutterlaugen von der Krystallisation der Substanz aus wässriger Lösung fanden sich kleine Mengen niedriger schmelzender Anteile, die aber vorläufig zur näheren Untersuchung nicht ausreichten. Man kann nämlich das Bioxyterpan sehr gut aus Wasser umkrystallisieren, in dem es nicht ganz leicht löslich ist. Man benutzt zur Lösung zweckmäßig auf 1 Teil Glycol 15 Teile kochendes Wasser. Nimmt man weniger Lösungsmittel, so entsteht beim Erwärmen ein Oel,

1) Ber. **38**, 1722 (1905).
2) Annal. **360**, 102 (1908).
3) Ber. **28**, 1589 (1895).

Digitized by Google

das sich nicht klar löst. Die Drehungsintensität ist für die d-Modifikation von Rupe und Schloschoff bestimmt und zwar $[\alpha]_D = +20{,}55^0$ gefunden.

Eine Bestimmung des Werts für die l-Modifikation ergab Folgendes:

S = 0.9694, L (Alkohol) = 8,9144, d = 0,813, p = 9,81 %
t = 18°, l = 1 dm, $\alpha = -1^0 41'$
$[\alpha]_D = -21{,}07^0$

Die Uebereinstimmung ist also eine gute. Nun wurden gleiche Mengen der d- und l-Modifikation des Bioxyterpans in alkoholischer Lösung vermischt und krystallisieren gelassen, in der Erwartung, es würde auf diese Weise das bei 139—140° schmelzende Produkt erhalten werden, das durch Reduktion von i-Pinolhydrat entsteht. Das Resultat entsprach aber nicht dieser Erwartung. Das bei Vermischung gleicher Moleküle der d- und l-Verbindung erhaltene Produkt schmolz bei etwa 108—109° und war erheblich löslicher in Wasser als die inaktive Verbindung aus Pinolhydrat. Damit ist die oben gegebene Formel für Pinolhydrat noch keineswegs als unzulässig erwiesen, denn die Verbindung enthält zwei asymmetrische Kohlenstoffatome und kann daher in mehreren inaktiven Modifikationen existenzfähig sein. Immerhin bedarf der Gegenstand einer weiteren Untersuchung, die u. a. auch auf die Reduktionsprodukte des aktiven Pinolhydrats (Sobrerols) erstreckt werden soll.

Vorläufig sei noch erwähnt, daß an Pinol selbst sich gleichfalls leicht Wasserstoff addieren läßt. Das so entstehende Bihydropinol ist aber noch nicht näher untersucht worden.

II. Reduktion ungesättigter Ketone [1]).

5) Reduktion von Carvon und Eucarvon.

Zur Verwendung kam d-Carvon, das durch Schütteln mit Natronlauge von beigemengtem Carvacrol befreit war. Das Keton absorbiert mit größter Lebhaftigkeit Wasserstoff und zwar 4 Atome. Als Endprodukt der Reaktion erhält man l-Tetrahydrocarvon. Das gegen Permanganat beständige Präparat zeigte folgende Konstanten:

Siedepunkt 220—220,5° $d_{20} = 0.9045$, $n_D = 1.4553$.

Diese Werte zeigen vollkommene Uebereinstimmung mit denen, welche früher von mir gefunden sind [2]).

1) Man vergleiche dazu auch die Versuche von Skita, B. **41**, 2938 (1908) und **42**, 1627 (1909).

2) Ann. **277**, 135 (1893).

Digitized by Google

Dasselbe gilt für den Schmelzpunkt des Semicarbazons (Schmelzp. 186—189°). Das Oxim erwies sich dagegen als nicht ganz einheitlich. Nach dem Umkrystallisieren aus Alkohol wies es, neben Prismen von richtigem Schmelzpunkt, schwerer lösliche Nadeln von etwas niedrigerem Schmelzpunkt auf. Die Ursache für diese Erscheinung bleibt noch aufzuklären.

Bemerkenswert ist, daß (ebenso wie das Dihydrocarvon auch das Tetrahydrocarvon, das aus dem Rechts-Carvon direkt entsteht, links drehend ist. Für das auf dem neuen Wege dargestellte Präparat wurde gefunden (l = 1 dm)

$$\alpha = -22°\,31', \quad \text{woraus } [\alpha]_D = -24{,}88.$$

Die Untersuchung einer alkoholischen Lösung ergab etwas höhere Werte:

S = 1.5538, L (Methylalkohol) = 11,355, p = 11,76 %
d = 0.806, t = 19°, l = 1 dm, $\alpha = -2°\,39'$
$[\alpha]_D = -27{,}95°$.

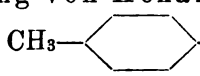
Selbstverständlich wird man unter Anwendung von l-Carvon zum d-Tetrahydrocarvon gelangen. Während bisher die aktiven Modifikationen des Tetrahydrocarvons nur auf mühevollem Umwege (durch das Phellandrennitrit oder Carvotanaceton hindurch) gewonnen werden konnten, steht nun eine sehr bequeme und elegante Darstellungsweise direkt aus Carvon zu Gebote.

Von praktischem Wert ist weiter, daß auch Eucarvon sich mit Palladium-Wasserstoff glatt bis zum Tetrahydroeucarvon reduzieren läßt, das man bisher nur in sehr geringer Ausbeute und in schwer rein darzustellender Form aus Eucarvon gewinnen konnte. Das auf dem neuen Wege erhaltene Keton zeigte folgende Eigenschaften:

Siedep. 208—209°, $d_{18} = 0.9095$, $n_D = 1.4568$.

Der Geruch der Substanz, die nunmehr einer erneuten eingehenden Untersuchung unterworfen werden soll, ist dem des Menthon sehr ähnlich.

6) Darstellung von Hexahydro-p-acetyltoluol

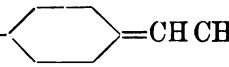


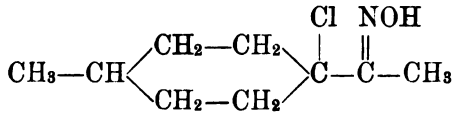
(Mitbearbeitet von F. Ritter.)

Zu dem vollkommen hydrierten Hexahydro-p-acetyltoluol kann man auf verschiedenen Wegen gelangen.

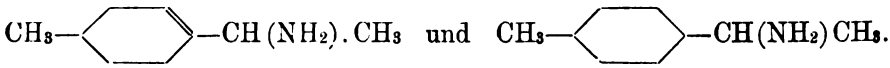
1) Man geht von dem leicht erhältlichen semicyklischen Kohlen-

Digitized by Google

wasserstoff  aus[1]), und addiert an diesen Nitrosylchlorid. Wenn man die entstehende Verbindung, die man in ihrer monomolekularen Form



schreiben kann, in Eisessiglösung mit Zink behandelt, so wird das Cl durch H ersetzt und das NOH durch Sauerstoff, indem, wie in anderen ähnlichen Fällen, ein Imin entsteht, das sich dann hydrolytisch spaltet. Gleichzeitig entsteht ein Gemenge gesättigter und ungesättigter Base, also

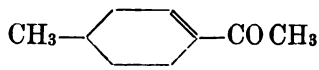


Das gesättigte Keton kann man leicht in Form seines Semicarbazons vom Schmelzpunkt 159° abtrennen und aus letzterem regenerieren.

Analyse des Semicarbazons:
0.1554 gr gaben 0.3485 CO_2 und 0.1256 H_2O

Berechnet für $C_9H_{16}N.NHCONH_2$	Gefunden
C 60.80	61.15
H 9.72	9.66.

2) Man kann aus dem erwähnten Nitrosochlorid das Oxim des Δ^3-Tetrahydro-p-Acetyltoluols gewinnen und das daraus darstellbare mehrfach schon besprochene ungesättigte Keton[2])



in alkoholischer oder ätherischer Lösung mit Natrium reduzieren. Man erhält dabei zunächst den zugehörigen Alkohol, den man dann zum Keton oxydiert.

3) Zu viel besseren Resultaten gelangt man, wenn man das ungesättigte Δ^3-Tetrahydro-p-acetyltoluol mit Wasserstoff bei Gegenwart von Palladium reduziert. Man erhält dabei in so gut wie quantitativer Ausbeute direkt das gesättigte Keton.

Das Hexahydro-p-Acetyltoluol weist folgende Eigenschaften auf:

---

1) Ann. **360**, 52 (1908); **365**, 271 (1909); **374**, 202 (1910).
2) Annal. **374**, 206 (1910).

Digitized by Google

Siedepunkt: 195—197°, $d_{18} = 0.9055$, $n_D = 1.4509$ bei 18°

Berechnet für $C_9H_{16}O$	Gefunden
M 41.61	41.62

Analyse: 0.1057 gr gaben 0.2982 CO_2 und 0.1057 H_2O

Berechnet für $C_9H_{16}O$	Gefunden
C 77.08	76.94
H 11.51	11.61

Das Oxim des Ketons, $C_9H_{16}NOH$, schmilzt bei 57—59°

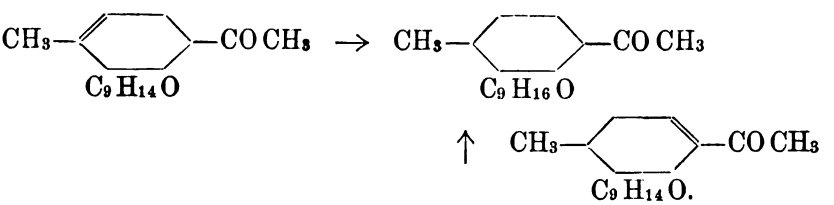
0.1953 gr gaben 0.4975 CO_2 und 0.1924 H_2O

Berechnet für $C_9H_{17}NO$	Gefunden
C 69.60	69.50
H 11.04	11.02.

4) Man geht von dem Δ^1-Tetrahydro-p-Acetyltoluol aus, das man als Abbauprodukt aus dem β-Terpineol (Schmelzp. 32°) erhalten kann[1]) und reduziert es nach der eben angegebenen Methode.

Dieser Weg ist wegen der Zugänglichkeit des Ausgangsmaterials der bei weitem bequemste.

Die beiden isomeren ungesättigten Ketone mit verschiedener Lage der Doppelbindung[2]) lassen sich gleich vollständig reduzieren, auch die Dauer des Reduktionsprozesses scheint keine wesentlich verschiedene zu sein, wenn auch genaue Versuche nach dieser Richtung noch anzustellen bleiben. Jedenfalls steht das wichtige Resultat fest, daß die Reaktionen leicht im Sinne des Schema's verlaufen:



Es wird voraussichtlich gelingen (die dahin zielenden Versuche sind noch nicht abgeschlossen), aus dem gesättigten Keton $C_9H_{16}O$ das oben (unter Versuch 1) besprochene p-Menthanol (8) zu synthe-

1) Ann. **324**, 89. (1902).

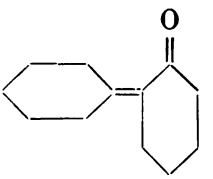
2) Vergleich der Eigenschaften s. Ann. **374**, 206.

Digitized by Google

tisieren. Dann würde die Darstellung dieses tertiären Alkohols nicht nur von α-Terpineol, sondern auch vom β-Terpineol als Ausgangsmaterial aus verwirklicht sein. Das gesättigte Keton bietet ferner ein vorzügliches Ausgangsmaterial für Gewinnung der Hexahydro-p-Toluylsäure.

7) Ueber Cyklohexenhexanon und seine Reduktionsprodukte.

Schon vor längerer Zeit wurde der Nachweis geführt[1]), daß bei der Selbstkondensation cyklischer Ketone bi- und tricyklische Verbindungen entstehen. Es ist angenommen worden, daß die Kondensation in normaler Weise verläuft und daß die bei der Kondensation sich herstellende Kohlenstoffdoppelbindung benachbart zum Karbonyl tritt. Für das aus Cyclohexanon entstehende Cyclohexenhexanon ergibt sich bei dieser Voraussetzung die Formulierung



Diese Auffassung, obgleich sie die nächstliegende und nach aller Analogie als richtig zu betrachtende war, bedurfte aber doch einer experimentellen Prüfung, zumal da gelegentlich von Arbeiten, die schon seit längerer Zeit in Gang sind, und an denen sich die Herren Alexander Wacker[2]) und Fr. Pauly[3]) beteiligt haben, Tatsachen ermittelt worden sind, die mit der bisherigen Annahme über die Konstitution des Cyclohexenhexanons nicht wohl vereinbar zu sein schienen.

Zunächst fällt auf, daß die Molekularrefraktion des Cyklohexenhexanons nicht diejenige Erhöhung aufweist, die infolge der angenommenen benachbarten Lage der Doppelbindung zum Carbonyl zu erwarten war. Für ein durch sorgfältige Fraktionierung gereinigtes, bei 273—275° siedendes Präparat wurden folgende Werte ermittelt:

1) $d_{18} = 1.005$, $n_D = 1.5082$ bei 18°.

---

1) Wallach, Terpene und Campher, 102, 428.
2) Inaug. Dissertation, Göttingen 1908.
3) Inaug. Dissertation, Göttingen 1910.

Digitized by Google

Außerdem wurde ein Präparat untersucht, das aus dem reinen, bei 179—181° schmelzenden Semicarbazon des bicyklischen Ketons frisch regeneriert war. Dieses zeigte mit dem vorigen sehr gute Uebereinstimmung, nämlich

2) $d_{20} = 1.004$, $n_D = 1.5062$ bei 20°

Berechnet für $C_{12}H_{18}O$	Gefunden	
	1	2
M 52.92	52.81	52.69

Es stellte sich weiter heraus, daß bei der Reduktion des Ketons mit metallischem Natrium jedenfalls in der Hauptsache ein ungesättigter Alkohol entsteht.

Dieser Alkohol ist nicht ganz leicht zu reinigen, deshalb konnten die ersten Analysen noch Zweifel an seiner Zusammensetzung lassen[1]). Die später mit einem aus einer größeren Substanzenmenge herausgereinigten Präparat vorgenommenen Analysen, ferner die Analysen des Phenylurethans, sowie endlich das Verhalten des Alkohols bei der Oxydation stellten es jedoch außer Zweifel, daß dem Reduktionsprodukt des Ketons $C_{12}H_{18}O$ die Formel $C_{12}H_{20}O$ zukommt.

Der reine Alkohol, das Cyklohexenhexanol, siedet bei 272—273° und schmilzt bei 34—35°.

Ferner wurde ermittelt:

1) $d_{37} = 0.974$, $n_D = 1.5007$ bei 37°

und für die Verbindung im Ueberschmelzungszustand:

2) $d_{19} = 0.989$, $n_D = 1.5071$ bei 19°. Daraus

Berechnet für $C_{12}H_{19}OH$	Gefunden	
	1	2
M 54.26	54.41	54.17

1) 0.1192 gr gaben 0.3497 CO_2 und 0.1234 H_2O

2) 0.1948 gr gaben 0.5672 CO_2 und 0.1922 H_2O

Berechnet für		Gefunden	
$C_{12}H_{22}O$	$C_{12}H_{20}O$	1	2
C 79.09	79.93	80.01	79.42
H 12.17	11.19	11.58	11.03

1) Ber. **40**, 70; Wallach, Terpene und Campher 428.

Digitized by Google

Dabei ist zu bemerken, daß dem festen, krystallisierten Alkohol hartnäckig flüssige Anteile anhaften, die schwer ganz zu entfernen sind und das Krystallisieren des Präparats verhindern können. Es ist ferner anzuführen, daß man zu demselben Alkohol, der bei der Reduktion von fertigem Cyklohexenhexanon entsteht, auch kommen kann, wenn man in Cyklohexanon, das in dem doppelten Volum Toluol gelöst ist, bei der Temperatur des siedenden Toluols allmählich metallisches Natrium einträgt (am besten in einer Wasserstoff-Atmosphäre).

Das Phenylurethan des krystallisierten Alkohols schmilzt nach dem Umkrystallisieren aus Methylalkohol bei 118—119°. Die Analysen dieses Präparats lassen gar keinen Zweifel darüber, daß man es mit einer ungesättigten Verbindung zu tun hat:

1) 0.1347 gr gaben 0.3765 CO_2 und 0.1022 H_2O
2) 0.1128 „ „ 0.3148 „ „ 0.0859 „
3) 0.1778 „ „ 0.4976 „ „ 0.1364 „
4) 0.1707 „ „ 0.4789 „ „ 0.1252 „

Berechnet für		Gefunden			
$C_{19}H_{27}O_2N$	$C_{19}H_{25}O_2N$	1	2	3	4
C 75.74	76.25	76.23	76.11	76.32	76.50
H 9.03	8.42	8.49	8.52	8.58	8.20

Bei vorsichtiger Oxydation mit Chromsäure und Schwefelsäure geht der krystallisierte Alkohol in Cyklohexenhexanon zurück. Bei der Oxydation des Alkohols mit Permanganat entstehen zwei charakteristische Produkte, nämlich 1) ein Glycerol und 2) eine ungesättigte Ketosäure.

Um das Glycerol zu erhalten, schüttelt man eine Auflösung von 20 gr Alkohol in 10 gr Benzol mit einer 2 %igen Lösung von 12 gr Permanganat bei 0°, bis zur Entfärbung, bläst dann Benzol und unveränderten Alkohol mit Wasserdampf ab, filtriert den Kolbenrückstand, dampft unter Einleiten von Kohlendioxyd auf ein kleines Volum ein und schüttelt mehrfach mit Chloroform aus. In das Lösungsmittel geht eine unter 10 mm zwischen 202—205° siedende Substanz, die in der Vorlage glasartig erstarrt und erst nach monatelangem Stehen Ansätze zur Krystallisation zeigte. Die Analyse der nicht genügend zu reinigenden Substanz deutet darauf hin, daß ein Glycerol vorliegt.

0.2490 gr gaben 0.6235 CO_2 und 0.2251 H_2O

Berechnet für $C_{12}H_{19}(OH)_3$	Gefunden
C 67.29	68.29
H 10.36	10.11

Digitized by Google

Neben dem Glycerol entsteht als Hauptprodukt der Oxydation eine

Ketosäure $C_{12}H_{18}O_3$.

Diese Säure isoliert man am besten, indem man die aus den bei der Oxydation des Alkohols entstehenden Kalisalze durch Schwefelsäure zerlegt, die Säure mit Aether aufnimmt, sie mit Calciumchlorid trocknet und in Vakuum destilliert. Unter 14 mm geht zwischen 205—215° ein etwas gelblich gefärbtes Oel über, das schnell erstarrt[1]). Die abgepreßte Verbindung wird beim Umkrystallisieren aus Benzol in gelblich gefärbten Nadeln vom Schmelzpunkt 74—75° erhalten. Man kann sie auch aus der Benzollösung durch Zusatz von Ligroïn ausfällen.

1) 0.1823 gr gaben 0.4551 CO_2 und 0.1448 H_2O.
2) 0.1286 „ „ 0.3241 „ „ 0.0995 „

Berechnet für $C_{10}H_{18}O_3$	Gefunden	
C 68.53	68.08	68.67
H 8.63	8.89	8.65

Die Säure ist in Wasser kaum, in Aether und Eisessig nicht ganz leicht löslich, bei vorsichtigem Erhitzen im offenen Glasrohr sublimiert sie ohne Zersetzung.

Analyse des in Wasser unlöslichen Silbersalzes:

1) 0.1473 gr gaben 0.2446 CO_2 und 0.0696 H_2O.
2) 0.2518 „ „ 0.0882 Ag
3) 0.1930 „ „ 0.0652 „

Berechnet für $C_{12}H_{17}O_3Ag$	Gefunden		
C 45.42	45.28	—	—
H 5.40	5.28	—	—
Ag 34.03	—	33.87	33.77

Die Ketosäure läßt sich sehr leicht in ein Semicarbazon verwandeln, das nach dem Umkrystallisieren aus Methylalkohol, je nach der Art des Erhitzens in den Grenzen zwischen 190—200° schmilzt.

0.1182 gr gaben 0.2526 CO_2 und 0.0880 H_2O.

Berechnet für $C_{12}H_{21}O_3N$	Gefunden
C 58.69	58.28
H 7.90	8.32

1) Aus den höheren Fraktionen scheidet sich allmählich eine feste Säure aus, die sich als Adipinsäure erwies.

Digitized by Google

Der ungesättigte Charakter der Ketosäure ergibt sich u. a. aus ihrer Additionsfähigkeit zu Chlorwasserstoff. Leitet man in eine Eisessiglösung der Säure trockenes Chlorwasserstoffgas ein, läßt einige Tage stehen und gießt dann in Wasser, so fällt eine zunächst dunkel gefärbte Verbindung aus, die nach dem Umkrystallisieren aus Ligroïn in weißen zwischen 48—51° schmelzenden Blättern erhalten wird.

0.1060 gr gaben 0.0587 Ag Cl.

Berechnet für $C_{12}H_{19}O_3Cl$	Gefunden
Cl 14.41	13.69

Mit Hypobromit läßt sich die Ketosäure nicht glatt aboxydieren. Man darf daraus schließen, daß sie nicht Acetyl-CO CH_3 enthält, sondern daß das Carbonyl an schwerer angreifbarer Stelle des Molekuls sich befindet.

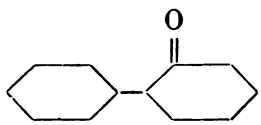
Besonders muß noch hervorgehoben werden, daß sich die Ketosäure $C_{12}H_{18}O_3$ zwar reichlich aus dem ungesättigten Alkohol $C_{12}H_{19}OH$ bildet, daß es bisher aber auf keine Weise gelingen wollte, die Säure durch Oxydation des Cyklohexenhexanons $C_{12}H_{18}O$ mit Permanganat zu erhalten.

Die ungesättigte Ketosäure entsteht aber auch, wenn man Cyklohexenhexanonoxim (Schmelzpunkt, je nach der Art des Erhitzens 146—151°) reduziert und die dabei entstehende ungesättigte Base, $C_{12}H_{19}NH_2$, das Bicyclohexenhexylamin mit Permanganat oxydiert. Diese Base ist beiläufig eine feste, mit Wasserdampf ziemlich schwer flüchtige, bei 33—35° schmelzende Verbindung. Beim Einleiten von trocknem Chlorwasserstoffgas in ihre ätherische Lösung fällt ein weißes krystallinisches Monochlorhydrat.

0.1986 gr gaben 0.1322 Ag Cl.

Berechnet für $C_{12}H_{22}NCl$	Gefunden
Cl 16.49	16.46

Reduktion des Cyklohexenhexanons (nach Paal)

Cyklohexylhexanon 

Die Reduktion verläuft in Methylalkoholischer Lösung leicht und gut. Das entstehende gesättigte Keton $C_{10}H_{20}O$ zeigt folgende Eigenschaften:

Digitized by Google

Siedep. 137° unter 12 mm

$d_{18} = 0.978$. $n_D = 1.4887$ bei 18°

Berechnet für $C_{12}H_{20}O$	Gefunden
M 53.31	53.09

0.1560 gr gaben 0.4576 CO_2 und 0.1551 H_2O

Berechnet für $C_{12}H_{20}O$	Gefunden
C 79.92	80.00
H 11.19	11.12

Das Semicarbazon des gesättigten Ketons schmilzt bei 203° (unscharf), das Oxim bei 100°.

Analyse des Oxims:

0.1523 gr gaben 9.80 ccm N bei 16° und 743 mm

Berechnet für $C_{12}H_{21}ON$	Gefunden
N 7.19	7.28

Charakteristisch ist für das Keton auch die auf bekannte Weise erhältliche Benzyliden-Verbindung, die nach dem Umkrystallisieren aus Aethylalkohol oder aus Methylalkohol (in dem sie schwerer löslich ist), bei 100° schmelzende, atlasglänzende Blätter bildet

0.1400 gr gaben 0.4362 CO_2 und 0.1146 H_2O.

Berechnet für $C_{19}H_{24}O$	Gefunden
C 85.02	84.98
H 9.02	9.16

Das Cyklohexylhexanon läßt sich mit Chromsäure in essigsaurer Lösung gut zu einer Ketosäure $C_{12}H_{20}O_3$ oxydieren, deren Semicarbazon aus Methylalkohol in bei 172—173° schmelzenden Nadeln krystallisiert. Schwefelsäure scheidet aus dem reinen Semicarbazon die freie Säure als schnell erstarrendes Oel ab. Die Säure schmilzt bei 58°.

0.1595 gr gaben 0.3958 CO_2 und 0.1357 H_2O

Berechnet für $C_{12}H_{20}O_3$	Gefunden
C 67.88	67.68
H 9.50	9.52

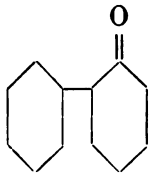
Zu derselben gesättigten Ketosäure kann man nun auch gelangen, wenn man die erst beschriebene, ungesättigte, bei 74—75° schmelzende Ketosäure, $C_{12}H_{18}O_3$, mit Wasserstoff bei Gegenwart von Palladium reduziert.

Digitized by Google

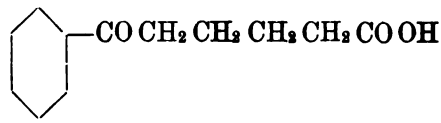
0.1514 gr gaben 0.3777 CO_2 und 0.1266 H_2O

Berechnet für $C_{12}H_{20}O_3$	Gefunden
C 67.88	68.04
H 9.50	9.35

Was nun die Konstitution der im Vorstehenden besprochenen Verbindungen betrifft, so kommen für das gesättigte bicyclische Keton und die daraus erhältliche Ketosäure zunächst nur die Formeln:



Cyclohexyl(1)-hexanon(2)

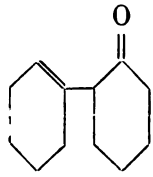


δ-Hexahydrobenzoyl-n-Valeriansäure

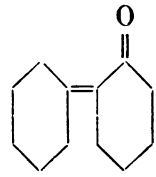
in Betracht. Beide Verbindungen haben von verschiedenen Gesichtspunkten aus Interesse und werden augenblicklich von Herrn Stud. Walter Ost (der auch die obigen Analysen dieser Verbindungen ausgeführt hat) einer näheren Untersuchung unterzogen. Der ungesättigten Ketosäure aus Cyklohexenhexanol kann nur die Formel:

zugeschrieben werden. Die Folgerung, daß demnach auch für das Cyclohexenhexanon $C_{12}H_{18}O$ die Formel I mit der Bindung im Ring und nicht Formel II mit semicyclischer Bindung in Anspruch zu nehmen sei, kann nichts destoweniger aus den vorliegenden Tatsachen noch nicht endgültig gezogen werden.

I



II

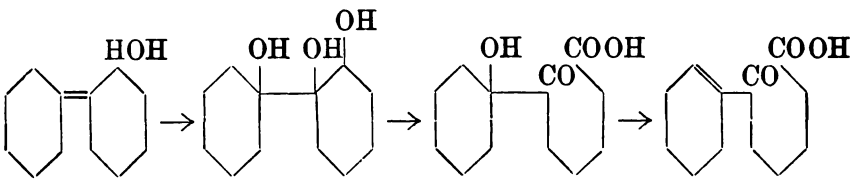


Die Frage warum das Keton $C_{12}H_{18}O$ bei der Oxydation überhaupt keine Ketosäure mit 12C-Atomen liefert, sondern nur der zugehörige Alkohol es tut, ist nach den vorliegenden Erfahrungen nicht schwer zu beantworten, namentlich wenn man für das Keton Formel II annimmt. Es wird nämlich die Oxydation zwischen dem Carbonyl und der Aethylenbindung einsetzen und,

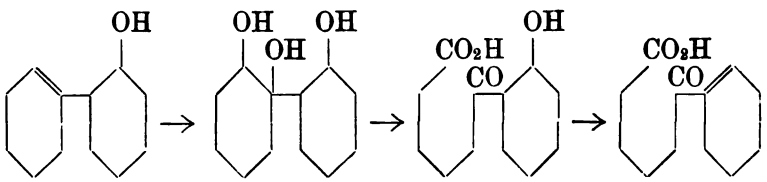
Digitized by Google

nachdem Hydrolyse eingetreten ist, das bicyclische System in zwei monocyklische zerfallen, die ihrerseits für sich der Oxydation anheimfallen. Wird dagegen die Carbonylgruppe, ehe man die Oxydation einleitet, reduziert, so wird das System vor leicht eintretender Hydrolyse geschützt und die Oxydation setzt normal an der Aethylenbindung ein. In diesem Fall ist die Entstehung einer Ketosäure $C_{12}H_{18}O_3$ aus einer Verbindung von Formel II gut zu deuten:

Der Vorgang könnte sich nämlich im Sinne der folgenden Formelbilder abspielen:

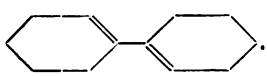


Unmöglich ist die Ableitung einer ungesättigten Ketosäure auch bei Annahme von Formel I nicht. Man könnte folgenden Reaktionsverlauf annehmen:



Dabei wäre es aber sehr auffallend, wenn ein sekundär gebundenes Hydroxyl unter den vorliegenden Versuchsbedingungen leichter in Form von H_2O austreten als sich zur Ketogruppe oxydieren lassen würde.

Der jedenfalls sehr merkwürdige und für den u. U. verwickelten Verlauf von Permanganatoxydationen lehrreiche Vorgang bedarf eben noch eingehenderer Untersuchung.

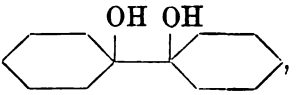
8) Ueber $\Delta^{1,1'}$-Bicyklohexen  .

(Mitbearbeitet von Friedrich Pauly.)

Dieser Kohlenwasserstoff wurde namentlich von dem Gesichtspunkt aus dargestellt, um zu untersuchen, ob ein System konjugierter Doppelbindungen, wie es in einer Verbindung obiger Formel vorliegt, normale oder anormale Refraktionswerte aufweisen würde.

Digitized by Google

Als Ausgangsmaterial diente das Cyklohexanonpinakon



das bei der Reduktion von Cyklohexanon mit Natrium in feuchter ätherischer Lösung neben Cyklohexanol[1]) entsteht.

Dies Pinakon, Bicyklohexyldiol (1,1') ist schon von Zelinsky, Nanjetkin und Schilow erhalten[2]) und schmilzt bei 128—129°. Wird das Pinakon mit verdünnter Schwefelsäure am Rückflußkühler 1—2 Stunden erhitzt, so spaltet es Wasser ab. Destilliert man nun mit Wasserdampf, so geht ein leichtes Oel über, das nach dem Trocknen mit metallischem Natrium unter 15 mm zwischen 120—125° destilliert, unter Atmosphärendruck bei 250—253°.

1) 0.2082 gr gaben 0.6756 CO_2 und 0.2102 H_2O.
2) 0.2370 „ „ 0.7721 „ „ 0.2402 „

Berechnet für $C_{12}H_{18}$	Gefunden	
C 88.88	88.50	88.73
H 11.20	11.29	11.33

Weiter wurde gefunden:

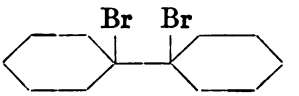
$$d_{20} = 0.9485. \quad n_D = 1.5287 \text{ bei } 20°.$$

Berechnet für $C_{12}H_{18}$ F 2	Gefunden
M 52.34	52.65

Die Molekularrefraktion des Kohlenwasserstoffs weist also eine deutliche Erhöhung über den berechneten Wert auf.

Das Bi-cyklohexen addiert in Berührung mit Eisessigbromwasserstoff 2 Mol. BrH.

Das Bibromhydrat, dem man die Formel



wird zuerteilen dürfen, ist fest und liefert beim Umkrystallisieren

1) Was das Cyklohexanol $C_6H_{11}OH$ anlangt, so mag an dieser Stelle erwähnt werden, daß der Alkohol leicht Verbindung mit trockenem Calciumchlorid eingeht. Diese feste, mit wenig Aether auf der Vakuumpumpe gut auswaschbare Verbindung kann sowohl zur Reindarstellung des Alkohols dienen, als auch kann man ihre Entstehung verwerten, um käufliches Cyklohexanon von darin enthaltenem Cyklohexanol zu befreien.

2) Ber. **38**, 2801 (1901).

Digitized by Google

aus Methylalkohol schöne weiße Nadeln vom Schmelzpunkt 68—69°.

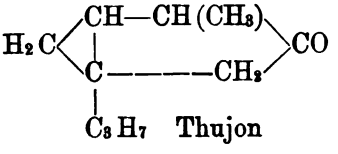
0.1816 gr gaben 0.2065 AgBr.

Berechnet für $C_{12}H_{20}Br_2$	Gefunden
Br 49.09	48.40

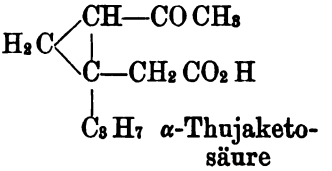
Das höhere Homologe, Dimethyl-dicyklohexen, erhält man bei analoger Umformung des 1.3-Methylcyklohexanons als einen zwischen 265—267° siedenden Kohlenwasserstoff.

9) Versuche in der Thujonreihe.

Das Thujon selbst und ebenso die α-Thujaketosäure, also die beiden gesättigten Verbindungen in denen ein Trimethylen-Ring enthalten ist



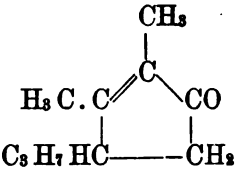
Thujon



α-Thujaketosäure

zeigten sich mit Wasserstoff beladenem Palladium gegenüber indifferent.

Das Isothujon



ließ sich unter denselben Bedingungen aber zu Thujamenthon reduzieren. Die Reduktion verlief unter den eingehaltenen Bedingungen (ohne Anwendung eines Verdünnungsmittels) aber ziemlich träge und ging nicht zu Ende, sodaß nach Abbrechen des Versuchs eine erhebliche Menge vorhandener ungesättigter Substanz durch Schütteln mit Permanganat fortgenommen werden mußte. Das zurückbleibende, nur durch Abtreiben mit Wasserdampf, sonst aber garnicht gereinigte, gegen Permanganat beständige Material zeigte folgende Konstanten:

Siedepunkt 215—218°, $d_{19} = 0.905$, $n_D = 1.4541$.

[Dagegen zeigt das ungesättigte Ausgangsketon:

Siedepunkt 231—232°, $d = 0.927$, $n_D = 1.4822$.]

Das aus dem gesättigten Keton bereitete Oxim zeigte nach dem

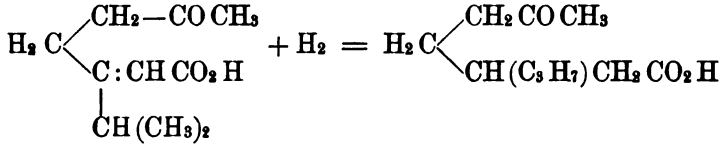
Digitized by Google

Umkrystallisieren den richtigen Schmelzpunkt des Thujamenthons, nämlich 95°.

Sehr günstige Resultate ergab die Reduktion der β-Thujaketosäure und der aus ihr durch CO_2-Abspaltung bekanntlich entstehenden Thujaketons.

Bihydrothujaketosäure.

Die bei 78—79° schmelzende β-Thujaketosäure wurde in Form ihres Natriumsalzes der Reduktion unterworfen. Die Wasserstoff-Addition erfolgte schnell und sehr vollständig. Der Vorgang kann nur im Sinne der Gleichung verlaufen:



Man hat es in dem Reduktionsprodukt also mit einer δ-Acetyl-β-isopropyl-Valeriansäure zu tun. Die Säure wurde bisher nur in flüssigem Zustand erhalten. Ihr Semicarbazon schmilzt um 140° (unscharf wie die meisten derartigen Verbindungen), also etwa 50° niedriger als das der β-Thujaketosäure. Mit Hypobromit reagiert die Säure sehr schnell unter Bromoform-Abscheidung und es entsteht β-Isopropyladipinsäure $HCO_2 . CH_2 CH_2 CH(C_3H_7) CH_2 CO_2H$ vom Schmelzp. 80—84°.

Aus dieser Säure ließ sich auf bekanntem Wege das β-Isopropylpentanon erhalten. Schmelzpunkt des Semicarbazons 187—188°.

Bihydrothujaketon $(CH_3)_2 CH CH(CH_3) CH_2 CH_2 CO CH_3$. In dieses Keton geht das Thujaketon $(CH_3)_2 CH C(=CH_2)—CH_2 CH_2 CO CH_3$ mit bemerkenswerter Leichtigkeit bei der Reduktion über. Das direkt ohne Anwendung eines Lösungsmittels erhaltene Präparat wurde mit Permanganat bis zum Bestehenbleiben der Farbe durchgeschüttelt.

Das Keton riecht wie Amylacetat und ist völlig farblos, während das Thujaketon etwas gelblich gefärbt ist. Von Konstanten des rohen Präparats wurde ermittelt:

Siedepunkt 183—185°, $d_{20} = 0.8335$,

$n_D = 1.4264$ bei 20°. Daraus M = 43,69 (ber. 43.71).

0.1387 gr gaben 0.3878 CO_2 und 0.1577 H_2O.

Digitized by Google

Berechnet für $C_9H_{18}O$	Gefunden
C 76.06	76.28
H 12.67	12.62

Das Semicarbazon des Ketons entsteht sehr schnell und schmilzt nach dem Umkrystallisieren bei 152—153°.

Analyse: 0.1398 gr gaben 0.3093 CO_2 und 0.1372 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{21}ON_3$	Gefunden
C 60.24	60.37
H 10.62	10.87

Mit einer eingehenderen Untersuchung der besprochenen Verbindungen der Thujon-Reihe ist Herr F. Challenger beschäftigt.

10) Reduktion von Methylheptenon zu Methylheptanon $(CH_3)_2CH\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CO\,CH_3$.

(Isoamylaceton.)

Die Reduktion verläuft außerordentlich schnell und energisch, auch ohne Anwendung eines Verdünnungsmittels. Das entstehende, ähnlich wie die ungesättigte Verbindung riechende Keton zeigt folgende Eigenschaften:

Siedepunkt sehr konstant bei 164—165°, $d_{19} = 0.8165$, $n_D = 1.4144$ bei 19°.

Berechnet für $C_8H_{16}O$	Gefunden
M 39.11	39.21

Das gesättigte Keton unterscheidet sich von dem zugehörigen ungesättigten durch seine geringe Neigung zur intramolekularen Kondensation. Während das Methylheptenon beim Erwärmen mit Chlorzink so leicht in m-Xylol und hydriertes m-Xylol sich überführen läßt, zeigt unter denselben Bedingungen das Methylheptanon keine Umwandlungsfähigkeit in Tetrahydroxylol.

Das Semicarbazon des gesättigten Ketons löst sich leicht in Methylalkohol, aus dem es in glänzenden Blättchen krystallisiert und schmilzt bei 157—158°. (Semicarbazon des Methylheptenons Smp. 136—138°). Das Isoamylaceton ist übrigens schon aus Isoamylacetessigester von H. A. Anden, W. H. Perkin jun. und J. L. Rose[1]) synthetisch erhalten, aber nicht näher untersucht worden. Der Siedepunkt des auf diesem Wege dargestellten Präparats wird zu 162—163° angegeben.

1) Journ. Chem. Soc. 75. 909 (1899).

Digitized by Google

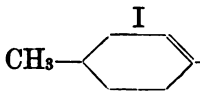
11) Reduktion einiger ungesättigter Säuren.

Da freie Säure kolloïdales Palladium ausflockt, so müssen die Reduktionen in schwach alkalischer Lösung vorgenommen werden. Aber auch dann zeigte sich bei den Versuchen nicht selten die Neigung zur Ausflockung des Katalysators und zwar wurde beobachtet, daß die größere oder geringere Neigung zur Wasserstoff-Aufnahme mehr als in den vorher beschriebenen Fällen von der Lage der Doppelbindung im Molekül abhängig zu sein scheint. Das Beobachtungsmaterial muß aber noch wesentlich erweitert werden, ehe man sichere Gesetze ableiten kann.

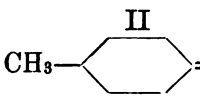
Zunächst wurden Versuche mit α- und β-Fencholensäure angestellt, die zu dem Resultat führten, daß die α-Fencholensäure dabei in eine von Mahla zuerst dargestellte Bihydrofencholensäure übergeht, während sich β-Fencholensäure in Fencholsäure verwandelte. Bequemer wie die freien Säuren lassen sich die zugehörigen Amide reduzieren. An die α-Fencholensäure läßt sich nun viel leichter Wasserstoff anlegen als an die β-Säure. Diese Versuche werden an anderer Stelle ausführlicher besprochen werden. Hier kommt es nur darauf an, daß die β-Fencholensäure, welche eine semicyclische Bindung enthält, weniger leicht reduziert wird als die α-Fencholensäure.

Aehnliche Unterschiede zeigten sich bei der Reduktion einiger aus cyclischen Ketonen gewonnener isomerer Säuren, welche die Aethylenbindung entweder im Ring oder semicyclisch enthalten.

Von den beiden Säuren[1]):



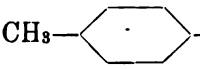
(Smp. 42—43°) und



(Smp. 63—64°),

die beide mit derselben Leichtigkeit Halogenwasserstoff addieren, nahm I sehr viel leichter (in Form des Natriumsalzes) Wasserstoff auf als II.

In beiden Fällen wurde aber die gesättigte 1,4-Methylcyklohexylessigsäure



1) Ueber diese Säuren und ihre Darstellung s. Annal. **365**, 264, 266 (1909).

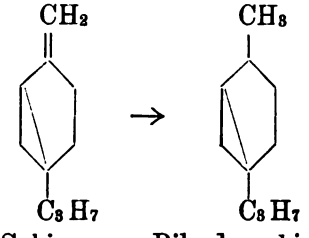
Digitized by Google

vom Schmelzpunkt 73—74° erhalten, wie W. H. Perkin ihn für die Verbindung angibt[1]).

12) Reduktion von Sabinen.

Kohlenwasserstoffe sind bei Gegenwart von Metallen als Katalysatoren in neuerer Zeit schon mehrfach zur Reduktion gebracht. Z. B. hat Peter Lipp[2]) kürzlich aus Camphen auf diesem Wege Isocamphan erhalten. Es scheint nun möglich zu sein, auf dem vorgezeichneten Wege auch gesättigte Kohlenwasserstoffe mit intracyclischer Bindung aus ungesättigten zu erhalten.

Käufliches Sabinen nimmt z. B. leicht 2 H-Atoms auf, sodaß man die entstehende Verbindung, $C_{10}H_{18}$, als gesättigtes Bihydrosabinen betrachten muß, das nach dem Vorgang entsteht:



Sabinen Bihydrosabinen

Der Kohlenwasserstoff zeigt folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 156—157°, $\alpha_D = -2°\,2'$

$d_{20} = 0.8120$, $n_D = 1.4484$ bei 20°

Berechnet für $C_{10}H_{18}$	Gefunden
M 45.63	45.54

0.2330 gr gaben 0.7427 CO_2 und 0.2754 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{18}$	Gefunden
C 86.87	86.93
H 13.13	13.22.

1) s. Wallach, Terpene und Campher, 453. Die früher von mir durch Reduktion aus der gebromten Verbindung erhaltene Säure schmolz (wohl infolge noch geringer Verunreinigungen) etwas zu niedrig.

2) Inaug.-Diss. München 1910.

Digitized by Google

Konzentrationsänderungen der Lösung eines magnetisierbaren Salzes in einem inhomogenen Magnetfeld.

Nach Beobachtungen von C. Statescu.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung der Kgl. Gesellschaft vom 26. November 1910.

1) Die Aenderungen der Dichtigkeit eines Gases in einem elektrischen Feld von variabler Intensität, welche die Theorie (entgegen manchen erhobenen Einwänden bestimmt) verlangt, bieten dem experimentellen Nachweis beträchtliche Schwierigkeiten. Ihre erstmalige Feststellung gelang bekanntlich Herrn Gans[1]). Versuche der Beobachtung des magnetischen Analogons dieser Erscheinung sind meines Wissens nicht bekannt geworden; sie dürften wohl auch noch größeren Schwierigkeiten begegnen. Unter diesen Umständen schien es mir lohnend, zuzusehen, ob es nicht gelänge, in Lösungen magnetischer Salze — bei denen für die gelöste Substanz in Annäherung die Gasgesetze gelten, — durch die Einwirkung eines Magnetfeldes Konzentrationsänderungen von merklichem Betrage hervorzubringen. Bei der großen Empfindlichkeit der Töplerschen Schlierenmethode gab eine Beobachtung mit ihrer Benutzung relativ günstige Aussichten. Herr Dr. Statescu hat im hiesigen Institut eine derartige Untersuchung nach meinem Vorschlage durchgeführt, — zunächst mehr zur Orientierung über die Größenverhältnisse, die bei dem betr. Vorgang auftreten, als zu exakten Messungen bestimmt, — und dabei die gesuchte Erscheinung trotz vielleicht nicht ganz erstklassiger Hilfsmittel mit voller Sicherheit festzustellen vermocht.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **11**, 797, 1903.

Digitized by Google

Da die Untersuchung aus äußeren Gründen jetzt eine Unterbrechung erfahren muß, so will ich hier über die Anordnung und die Resultate der Versuche kurz berichten. Eine Fortsetzung der Beobachtung, bei denen die Erreichung genauerer Zahlwerte anzustreben ist, bleibt vorbehalten. Ebenso eine Anwendung der Methode auf ein Gemisch von zwei Dielektrika von möglichst verschiedenen Dielektrizitätskonstanten bei Einwirkung eines elektrischen Feldes, wo die Verhältnisse ziemlich aussichtsvoll liegen, wenn es nur gelingt eine störende elektrische Leitung auszuschließen.

2) Was zunächst die Theorie der Konzentrationsänderungen im Magnetfeld angeht, so ist daran zu erinnern, daß die allgemeinen Gesetze der Magneto- oder Elektrostriktion sich bei einem Gas dahin vereinfachen, daß die auf die Volumeneinheit wirkende Kraft K gegeben wird durch

$$K = -\operatorname{grad} \Theta, \tag{1}$$

wobei

$$\Theta = \frac{\mu' H^2}{8\pi}, \qquad \mu' = \frac{\partial \mu}{\partial \delta}$$

ist, und H die Feldstärke, μ die Permeabilität, δ die räumliche Dilatation bezeichnet [1]).

Da man für unsern Fall kleiner Dichtigkeitsänderungen die Magnetisierungszahl

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi} = \varkappa_0 (1 - \delta)$$

setzen kann, so ist

$$\frac{\partial \mu}{4\pi \, \partial \delta} = -\varkappa_0,$$

oder bei Vernachlässigung des sehr kleinen δ neben Eins auch $= -\varkappa$. Man erhält sonach

$$\Theta = -\tfrac{1}{2} \varkappa H^2$$

und

$$K = \tfrac{1}{2} \varkappa \operatorname{grad} H^2, \tag{2}$$

d. h. ebenso, als wenn es sich um die Bewegung diskreter magnetisierbarer Teilchen im Raume handelte. Da $\varkappa$ mit der Dichte ϱ proportional ist, so kann man dafür auch $k\varrho$ setzen und schreiben

$$K = \varrho K' = \tfrac{1}{2} k \varrho \operatorname{grad} H^2. \tag{2'}$$

1) S. z. B. W. Voigt, Kompendium der Theor. Phys. II, p. 140 u. 202 Leipzig 1896.

Digitized by Google

Handelt es sich, wie bei uns, um schwach magnetisierbare Körper, so darf deren Selbstinfluenz vernachlässigt, also H mit dem gegebenen äußern Magnetfeld identifiziert werden. Diese Formeln wollen wir nun auf das in einer Lösung vorhandene magnetisierbare Salz anwenden.

Es mag die Feldstärke nur in der Richtung der z-Axe variieren und auch die ganze Bewegung (mit der Geschwindigkeit w) nur parallel dieser Axe stattfinden. Wir können dann die Bewegungsgleichung schreiben

$$\varrho \frac{\partial w}{\partial t} = \varrho K' - \frac{\partial P}{\partial z} - q\varrho w; \tag{3}$$

hierin bezeichnet P den osmotischen Druck in der Lösung, q mißt den Reibungswiderstand, der der Bewegung der gelösten Substanz entgegenwirkt; P kann in Annäherung mit ϱ proportional, d. h. $= p\varrho$ gesetzt werden. Dazu tritt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho w}{\partial z} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

3) Die Lösung des Problemes ist sehr einfach für den ersten Teil des Vorganges, wo die Aenderung des osmotischen Druckes mit dem Ort noch unmerklich ist; dann wird (3) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung, deren Integral ist

$$w = K' t e^{-qt}. \tag{5}$$

Ist etwa das Gesetz für die Wirkung des Magnetfeldes durch

$$H = \frac{a}{b^2+z^2}, \text{ resp. durch } K' = -\frac{2\mu^2 kz}{(b^2+z^2)^2} \tag{6}$$

gegeben — wie dies einem Maximum des Feldes bei $z = 0$ und einem Verschwinden bei $z = \pm\infty$ entspricht, — so macht man sich leicht eine Vorstellung von der ersten Entwicklung der Konzentrationsänderung.

Das Gesetz der Verschiebung ist z. B., wenn $w = \partial\xi/\partial t$ gesetzt wird,

$$\xi = \frac{K'}{q^2}(1-(1+qt)\,e^{-qt}); \tag{7}$$

für $t = 0$ ist dabei, wie w, so auch ξ verschwindend angenommen. Für die räumliche Dilatation $\delta = \partial\xi\,\partial z$ aber folgt

$$\delta = \frac{1}{q^2}\frac{dK'}{dz}(1-(1+qt)\,e^{-qt}), \tag{8}$$

Digitized by Google

und hieraus ergibt sich die Dichte ϱ gemäß der Formel

$$\varrho = \varrho_0 (1 - \delta),$$

unter ϱ_0 die Anfangsdichte verstanden. Der Ansatz (6) liefert hierfür

$$\frac{dK'}{dz} = -2a^2 k \frac{b^2 - 5z^2}{(b^2+z^2)^4}. \tag{9}$$

Für die Beobachtung nach der Schlierenmethode ist, wie wir sehen werden, der Wert von

$$\frac{\partial \varrho}{\partial z} = -\varrho_0 \frac{\partial \delta}{\partial z}$$

wesentlich; für ihn kommt nach (6) zur Anwendung, daß

$$\frac{d^2 K'}{dz^2} = \frac{12a^2 kz\,(3b^2 - 5z)}{(b^2+z^2)^5}. \tag{10}$$

$\partial\varrho/\partial z$ ist hiernach für $z = 0$, wie für $z = \pm\infty$ gleich Null und besitzt für ein gewisses positives z ein Minimum, für das entsprechende negative ein Maximum.

4) Außer dem Beginn der Bewegung infolge der Erregung des Magnetfeldes bestimmt sich theoretisch noch besonders leicht der definitive stationäre Zustand, für welchen nach (3) gilt

$$O = \varrho K' - p \frac{d\varrho}{dz}. \tag{11}$$

Da ϱ nur sehr wenig mit z variiert, kann man das Integral schreiben

$$\text{Konst} = \tfrac{1}{2} k\varrho_0 H^2 - p\varrho;$$

ist also in einem Bereiche verschwindender Feldstärke ϱ merklich $= \varrho_0$, so gilt Konst $= -p\varrho_0$, also

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 + \frac{kH^2}{2p}\right) \tag{12}$$

und

$$\frac{d\varrho}{dz} = \frac{\varrho_0 k}{2p} \frac{dH^2}{dz} = \frac{\varrho_0}{p} K'. \tag{13}$$

5) In einem Trog der die Lösung eines (magnetisierbaren) Salzes mit in der vertikalen z-Richtung variierender Konzentration, also ebenso variierendem Brechungsindex n enthält, erleiden nahezu horizontal einfallende Lichtstrahlen eine Ablenkung nach einem

Digitized by Google

Kreisbogen vom Radius R, gegeben durch

$$\frac{1}{R} = \frac{d\ln(n)}{dz}. \tag{14}$$

Hat der Trog die Dicke D, so erhalten hiernach die einfallenden Strahlen beim Durchtritt eine Ablenkung

$$\alpha = \frac{D}{R} = D\frac{d\ln(n)}{dz}. \tag{15}$$

Nimmt man zwischen dem Brechungsindex und der Dichte des gelösten Salzes die (angenäherte) Beziehung an

$$n^2 = n_0^2 + f\varrho, \tag{16}$$

wobei f eine Konstante bezeichnet, so ergibt sich

$$\alpha = \frac{Df}{2n^2}\frac{d\varrho}{dz}. \tag{17}$$

Die Kombination mit (13) liefert schließlich bei Einführung der Magnetisierungszahl $\varkappa$ und der Differenz $n^2 - n_0^2$ der Brechungsindexquadrate für die benutzte Lösung und das reine Lösungsmittel, sowie der Beziehung $p = B\vartheta$ für den Parameter des osmotischen Druckes,

$$\alpha = \frac{D\varkappa(n^2 - n_0^2)}{4n^2\varrho B\vartheta}\frac{dH^2}{dz}; \tag{18}$$

hierin ist B die Boylesche Konstante für die (dem Gasgesetz unterworfen gedachte) gelöste Substanz.

6) Für die Anwendung der Schlierenmethode stand ein achromatisches Objektiv von Heele-Berlin zur Verfügung, das eigens für solche Zwecke (nämlich für Anwendung auf gleiche Objekt- und Bilddistanz) korrigiert hergestellt war. Seine Brennweite betrug ca. 70 cm. Als Lichtquelle diente ein durch eine Nernst-Lampe mit rotem oder gelben Glas beleuchteter feiner horizontaler Spalt, als Schirm vor dem Objektiv des Beobachtungsfernrohres entweder ein berußter horizontaler Draht von solcher Dicke, daß er das Bild des Spaltes gerade auffangen konnte, oder auch ein breiterer geradlinig begrenzter Streifen schwarzen Kartons, auf dessen einen Rand das Bild eingestellt wurde. In dem einen, wie dem andern Falle war der Schirm vertikal und horizontal (im Sinne der auffallenden Lichtstrahlen) mikrometrisch verschiebbar.

Die Lösung des magnetisierbaren Salzes befand sich in einem

Digitized by Google

kleinen Trog, der beiderseits mit einer guten planen Glasplatte verschlossen war, im Felde eines Elektromagneten dicht vor dem Heele-Objektiv, auf der Seite des Beobachters. Der Querschnitt des Troges besaß etwa 0,5 cm Breite und 2 cm Höhe; die Dicke der Flüssigkeitsschicht betrug 2,2 cm.

Der mit seinen Schenkeln vertikal stehende Magnet trug Polschuhe, die nach dem Troge hin in stumpfe Schneiden von ca. 2,5 cm Länge ausliefen. Die (horizontal gestellten) Schneiden wurden einander soweit genähert, daß sie noch 1—2 mm von den Außenwänden des Troges abstanden. Bei Erregung des Elektromagneten entstand dann in der Flüssigkeit ein Feld, das in Annäherung als nur mit der vertikalen z-Koordinate variierend betrachtet werden konnte.

7) Das Gesetz des Quadrates der magnetischen Feldstärke (H^2) innerhalb des Flüssigkeitstroges wurde durch Beobachtung der Widerstandsänderung in einem dünnen Wismutdraht bestimmt. Dieser Draht war in die Gestalt eines Rechteckes von $2{,}5 \times 0{,}4$ cm Seiten gebogen und auf einem Hartgummistreifen befestigt. Das Drahtrechteck wurde in horizontaler Lage an einem Schraubenmikrometer befestigt und so an die Stelle des Troges zwischen die Magnetpole gebracht. Die Beobachtung des galvanischen Widerstandes geschah in einer Reihe von Positionen mit der Höhendifferenz vom 1 mm. Gemäß der gewählten Gestalt der Polschuhe war das Feld mit der Höhe sehr variabel, wie das im Interesse der beabsichtigten Beobachtungen auch sein mußte. Zur Graduierung wurden die Angaben des Drahtrechteckes in einem homogenen Felde mit denjenigen einer Wismutspirale von Hartmann und Braun-Frankfurt verglichen.

Auf diese Weise erhielt man nahezu die Mittelwerte von H^2 für die einzelnen horizontalen Querschnitte des Troges. An der Stelle, wo die definitiven Beobachtungen stattfanden, ergab sich H etwa 7000 Gauß, dH^2/dz etwa gleich 10^8.

8) War der dunkle Schirm des Schlierenapparates auf die empfindliche Position eingestellt, erschien also das Bild des Troges im Beobachtungsfernrohr im wesentlichen gleichförmig dunkel, so entstand nach Erregung des Feldes binnen wenigen Minuten eine deutliche begrenzte Aufhellung, und zwar, wie die Theorie es verlangt, bei Benutzung des schmalen Schirmes sowohl oberhalb als unterhalb der Axe des Magnetfeldes, bei Benutzung des breiten Schirmes nur oberhalb oder nur unterhalb.

Um den vollen Beweis zu liefern, daß es sich hierbei um die gesuchte Wirkung des inhomogenen Feldes auf die Konzentration

Digitized by Google

der Lösung handelte, wurde versucht, eine ungefähre Messung des Effektes vorzunehmen und deren Größenordnung mit der Aussage der Theorie zu vergleichen.

Diese Messung, die Herr Dr. Statescu (und zwar absichtlich ohne vorhergehende Befragung der Theorie) ausgeführt hat, bot einige Schwierigkeit, denn eine Wirkung, die sich infolge der großen Empfindlichkeit der Schlierenmethode durch eben diese deutlich sichtbar machen läßt, ist darum noch keineswegs scharf meßbar.

Die gegebene und demnach auch benutzte Messungsmethode war: die durch das Magnetfeld bewirkte Aufhellung durch eine mikrometrische Auf- oder Abwärtsbewegung des benutzten dunkeln Schirmes aufzuheben. Aber die Verschiebungen, die zu dieser Aufhebung notwendig waren, hielten sich in allen Fällen unterhalb 0,01 mm, eine Tatsache, die die bekannte große Empfindlichkeit der Schlierenmethode zahlenmäßig anschaulich ausdrückt. Die vertikale Schraube des Doppelmikrometers, welches nach § 6 den dunkeln Schirm trug, hatte eine Ganghöhe von ca. 0,25 mm Höhe; man hätte mit ihr also an sich 0,001 mm noch gut ablesen können. Aber die Unbestimmtheit des Zustandes, auf den eingestellt werden mußte (Auslöschung der Aufhellung an einer bestimmten Stelle des Troges), gestattete nicht, diese Genauigkeit zu erreichen. Dazu kommen noch einige wichtige Fehlerquellen, die daraus entspringen, daß die Messungen erst nach längerer Einwirkung des Feldes gemacht werden durften.

An sich bietet nach dem in § 3 Ausgeführten die erste Entwicklung der Erscheinung für die Beobachtung gewisse Vorteile; aber das für diese Periode geltende und in (5) angegebene Gesetz enthält den Parameter q des Widerstandes, den die Salzteile bei ihrer Bewegung in der Flüssigkait finden, und dieser konnte nicht als bekannt gelten. Seine Bestimmung hätte vielmehr umständliche Diffusionsbeobachtungen verlangt, die vorbehalten werden mußten. Auch zeigte sich, daß die Gültigkeit der Formel (5) offenbar auf sehr kurze Zeiten beschränkt ist; wenigstens wiesen die Beobachtungen darauf hin, daß bereits etwa innerhalb einer Minute die Aufhellung an der Stelle, welche die Erscheinung am kräftigsten zeigte, (ca. 1,5 mm von der Mittelfläche des Feldes) ein Maximum erreichte und von da an langsam abnahm.

9) So wählten wir nach manchen Versuchen für die Messungen schließlich einen späteren Zustand, der infolge sehr langsamer

Digitized by Google

Aenderungsgeschwindigkeit als dem stationären mindestens naheliegend erschien.

Vermutlich stellt sich die Inhomogenität innerhalb der Lösung bei Erregung des Magnetfeldes so her, daß zunächst die der Axe des Feldes nahen Salzteile den dort wirkenden starken Kräften relativ schnell folgen, hierdurch nahe der Axe ein Gefälle der Konzentration nach außen hin entsteht und dieses im Laufe der Zeit durch die gegen den Reibungswiderstand bei schwächerem Antrieb langsamer folgenden ferneren Teile wieder herabgesetzt wird. Die definitiven Messungen wurden 10—20 Minuten nach Einschaltung des Feldes vorgenommen. Das lange Zeitintervall, welches hiernach die beiden zu vergleichenden Zustände trennte, brachte die Notwendigkeit mit sich, störende thermische und mechanische Veränderungen des beobachteten Systemes sorgsam zu vermeiden.

Um erstere Wirkungen herabzusetzen, wurde der Magnet mit so schwachem Strom betrieben, daß er sich kaum merklich erwärmte; außerdem wurden die Polschuhe dauernd durch Wasser gekühlt, welches sie in einer U-förmigen Bohrung durchfloß. Endlich wurde der mit einem Glasdeckel verschlossene Trog mit Watte umhüllt, eine dünne Schicht dieses Materiales auch zwischen den Trog und die Schneiden der Polschuhe gelegt.

Um etwaige mechanische Verschiebungen unschädlich zu machen, wurde den Messungen an der Mikrometerschraube als Nullpunkt je diejenige Stellung der Trommel zu Grunde gelegt, bei der das optische Feld direkt über dem Trog bei Verschiebung des dunkeln Schirmes eben verdunkelt wurde. Indem die bezügliche Einstellung erst vor Einschaltung des Magnetfeldes und dann 10—20 Minuten später nochmals vorgenommen wurde, konnte eine etwaige kleine Verschiebung in dem System als eliminiert gelten.

10) Trotz aller Vorsicht zeigten die Resultate nur geringe Uebereinstimmung; immerhin kann die Größenordnung der untersuchten Wirkung als festgestellt gelten. Es mag genügen, eine in einer Eisenchloridlösung (20 gr $FeCl_3$ auch 100 gr H_2O) ausgeführte Messung, welche als Mittelwert der beobachteten Verschiebungen 0,005 mm lieferte, mit der Aussage der Theorie zu vergleichen. Da der Abstand des Troges vom Schirm ca. 138 cm war, so ergibt sich der beobachtete Wert der Ablenkung α zu $3{,}5 \cdot 10^{-6}$.

Mit diesem Wert ist das Ergebnis der Formel (18) zu vergleichen, nach der für den stationären Zustand gilt

Digitized by Google

$$\alpha = \frac{D\varkappa\,(n^2 - n_0^2)}{4n^2\,\varrho B\vartheta} \cdot \frac{dH^2}{dz^2}.$$

Hierin ist $D = 2{,}2$ cm, $\varkappa$ ist nach vorhandenen Beobachtungen (s. die Tabellen von Landolt-Börnstein) auf $16{,}4.10^{-6}$ zu schätzen; $n^2 - n_0^2$ ist durch besondere Beobachtungen auf 0,135 bestimmt, dH^2/dz durch die in § 7 beschriebenen Messungen zu 10^8. Weiter ist $n^2 = 1{,}912$, ϱ bei der hier zulässigen Annahme, daß die Lösung des Salzes keine Volumenänderung bedingt, $= 0{,}20$; endlich ist B unter vorläufiger Vernachlässigung der Dissoziation in der Lösung $= 8{,}32.10^7/368$, und außerdem $\vartheta = 290$.

Aus diesen Zahlen folgt rund

$$\alpha = 5.10^{-6}.$$

Berücksichtigt man, daß in der 20%-Lösung jedenfalls ein Teil der Fe_2Cl_6-Moleküle dissoziiert, also B zu groß angenommen ist, so kommt man mit dem berechneten Wert von α der Beobachtung von $3{,}5.10^{-6}$ so nahe, als bei der Schwierigkeit der Beobachtung nur irgend erwartet werden konnte. Messungen an einer dreißigprozentigen Lösung führten zu ganz analogen Resultaten.

Die beschriebenen Beobachtungen haben sonach die Konzentrationsänderungen einer Lösung von Eisenchlorid im inhomogenen magnetischen Felde in angenäherter quantitativer Uebereinstimmung mit den Aussagen der Theorie nachgewiesen.

Göttingen, Anfang November 1910.

Digitized by Google

Untersuchungen über die Kreisteilungskörper und den letzten Fermat'schen Satz.

Erste Mitteilung [1]).

Von

Ph. Furtwängler in Bonn.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 10. Dezember 1910.

E. Kummer hat zuerst bewiesen, daß drei zu der ungeraden Primzahl l relativ prime ganze rationale Zahlen x, y, z, die der Gleichung

$$x^l + y^l + z^l = 0$$

genügen, auch zu je zweien die Kongruenzen befriedigen:

$$(1) \quad B_{\frac{l-i}{2}} \cdot \left[\frac{d^i \log(x + e^v y)}{(dv)^i}\right]_{v=0} \equiv 0 \ (l) \quad (i = 3, 5, \ldots l-2),$$

wo die B die Zähler der Bernouilli'schen Zahlen bedeuten. Ist also der Zähler der $\left(\frac{l-i}{2}\right)^{\text{ten}}$ Bernouilli'schen Zahl nicht durch l teilbar, so ist notwendig

$$\left[\frac{d^i \log(x + e^v y)}{(dv)^i}\right]_{v=0} \equiv 0 \ (l). \quad (i = 3, 5, \ldots l-2).$$

Im Folgenden soll die Annahme über die Bernouilli'schen Zahlen

1) Die Untersuchungen dieser Mitteilung und ein Teil der folgenden sind bereits vor Ausschreibung des Wolfskehl-Preises angestellt. Da neuerdings im Zusammenhang mit diesem Preise das Interesse an diesen Untersuchungen lebhafter geworden ist, publiziere ich meine bisherigen Ergebnisse in dieser und den folgenden Mitteilungen, obwohl die Untersuchungen noch nicht in allen Teilen zu einem für mich befriedigenden Abschluß gelangt sind.

Digitized by Google

durch eine andere, die sich unmittelbar auf den Körper der l^{ten} Einheitswurzeln $k(\zeta)$ bezieht, ersetzt werden und zugleich soll die Betrachtung allgemein für drei zu l prime Zahlen α, β, γ des Körpers $k(\zeta)$, die der Gleichung:

$$\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$$

genügen, durchgeführt werden. Die Entwicklungen selbst gestalten sich, obwohl sie weiter reichen, relativ elementarer als die Kummer's, der zur Herleitung der obigen Kongruenzen eine allgemein für die Ideale des Körpers $k(\zeta)$ gültige Aequivalenz benutzt.

Ich gebe zunächst eine Definition, um mich im Folgenden bequemer ausdrücken zu können. Es sei $\varkappa$ eine zum Ideal $\mathfrak{l} = (\zeta-1) = (\lambda)$ prime Zahl aus $k(\zeta)$, die l^{te} Potenz eines Ideals $\mathfrak{q}$ aus $k(\zeta)$ ist, also

$$(\varkappa) = \mathfrak{q}^l.$$

Ich kann dann die Zahl $\varkappa$ mit einer beliebigen Einheit aus $k(\zeta)$ multiplizieren, ohne daß sie aufhört, das Ideal $\mathfrak{q}^l$ darzustellen. Ich denke mir nun $\varkappa$ so gewählt, daß es nach einer möglichst hohen Potenz von $\mathfrak{l}$ einer rationalen Zahl kongruent wird. Ist diese Potenz $\mathfrak{l}^n$, so will ich sagen, daß das Ideal $\mathfrak{q}$ nach dem Modul $\mathfrak{l}$ zum Exponenten n gehört oder auch kurz, daß es zum Exponenten n gehört. Ich gebe also folgende

Definition: Ein zu $\mathfrak{l} = (\zeta-1)$ primes Ideal des Körpers der l^{ten} Einheitswurzeln $k(\zeta)$, dessen l^{te} Potenz in der Hauptklasse liegt, gehört nach dem Modul $\mathfrak{l}$ zum Exponenten n, wenn sich die Zahl

$$(\varkappa) = \mathfrak{q}^l$$

so wählen läßt, daß

$$\varkappa \equiv r_1 \cdot (\mathfrak{l}^n),$$

und wenn es keine Einheit η in $k(\zeta)$ gibt, so daß

$$\eta\varkappa \equiv r_2 \ (\mathfrak{l}^{n+1}),$$

wo r_1 und r_2 rationale Zahlen bedeuten.

Das Resultat, das wir nun im Folgenden herleiten wollen, lautet so:

Satz I: Es seien α, β, γ drei zu $\mathfrak{l} = (\zeta-1)$ prime Zahlen des Körpers der l^{ten} Einheitswurzeln $k(\zeta)$, welche die Gleichung

(3) $$\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$$

Digitized by Google

befriedigen, und es sei

$$\alpha \equiv a, \quad \beta \equiv b, \quad \gamma \equiv c \ (l), \tag{4}$$

wo a, b, c rationale Zahlen bedeuten. Existiert dann in $k(\zeta)$ kein Ideal, das im Sinne der vorstehenden Definition nach dem Modul l zu dem ungeraden Exponenten $2j+1$ gehört, $\left(j \leqq \frac{l-3}{2}\right)$, so müssen je zwei der Zahlen a, b, c die Kongruenz befriedigen:

$$\left[\frac{d^{2j+1} \log (x + e^v y)}{(dv)^{2j+1}}\right]_{v=0} \equiv 0 \ (l). \tag{5}$$

Sind α, β, γ drei Zahlen, wie sie im vorstehenden Satz erwähnt sind, so folgen bekanntlich die Gleichungen:

$$\alpha + \zeta^i \beta = \mathfrak{q}_i \mathfrak{a} \quad (i = 0, 1, \ldots l-1); \tag{6}$$

darin bedeuten die $\mathfrak{q}_i$ Ideale aus $k(\zeta)$ und $\mathfrak{a}$ den größten gemeinsamen Idealteiler von α, β, γ. Setzt man nach D. Hilbert[1]):

$$\alpha + \zeta^{i-1} \beta = \varrho \tag{7}$$

und

$$\frac{\alpha}{\varrho} = \alpha^*, \quad \frac{\beta}{\varrho} = \beta^*, \tag{8}$$

so folgt:

$$\alpha^* + \zeta^i \beta^* = \varepsilon_i \varkappa_i \quad (i = 0, 1, \ldots l-1). \tag{9}$$

Hier bedeuten die ε_i Einheiten und die $\varkappa_i$ l^{te} Potenzen von Idealquotienten, deren Nenner zu l prim sind. Da es sich im Folgenden nur um Kongruenzen mod l^n handelt, können die Idealquotienten wie ganze Ideale behandelt werden und sollen der Kürze halber auch so bezeichnet werden.

Um den Grundgedanken des Beweises von Satz I besser hervortreten zu lassen, betrachten wir zunächst für sich den niedrigsten Fall $j = 1$, d. h. wir nehmen an, daß im Körper $k(\zeta)$ kein Ideal existiert, das zum Exponenten 3 gehört. In den Ausgangsgleichungen (9) lassen wir außerdem der einfachen Schreibweise wegen die Sterne wieder fort und schreiben:

$$\alpha + \zeta^i \beta = \varepsilon_i \varkappa_i \quad (i = 0, 1, \ldots l-1). \tag{10}$$

Verstehen wir jetzt unter r eine Primitivwurzel nach l und unter s die Substitution $\zeta \mid \zeta^r$ und bilden die symbolische Potenz:

1) Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Bericht, p. 519.

Digitized by Google

$$(\alpha + \zeta^i \beta)^{(s-r)(s-r^2)}$$

so ist leicht zu erkennen, daß die Kongruenz gilt

$$(11) \qquad (\alpha + \zeta^i \beta)^{(s-r)(s-r^2)} \equiv a_0 \ (\mathfrak{l}^4) \qquad (i = 0, 1, \ldots l-1),$$

wo a_0 eine rationale Zahl bedeutet. Gehört nämlich ein Ideal $\mathfrak{q}$ zum Exponenten n, so gehört, wie man durch eine einfache Rechnung zeigt, $\mathfrak{q}^{(s-r^m)}$ mindestens zum Exponenten $n+1$. Da aber in $k(\zeta)$ kein zum Exponenten 3 gehöriges Ideal existieren soll, muß die Kongruenz (11) nicht nur für den Modul $\mathfrak{l}^3$, sondern auch für $\mathfrak{l}^4$ gelten.

Entsprechende Kongruenzen wie (11) gelten offenbar auch, wenn wir α und β resp. durch konjugierte Körperzahlen ersetzen, weil mit dem Bestehen der Gleichung

$$\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$$

auch das Bestehen der Gleichung

$$(s\alpha)^l + (s\beta)^l + (s\gamma)^l = 0$$

verbunden ist. Wir können dies dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir α und β als Funktionen von ζ hinschreiben. Wir erhalten dann:

$$(12) \quad [\alpha(\zeta^m) + \zeta^i \beta(\zeta^m)]^{(s-r)(s-r^2)} \equiv a_0 (\mathfrak{l}^4) \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots l-1 \\ m = 1, 2, \ldots l-1 \end{pmatrix}.$$

Denken wir uns i festgehalten, so muß die letzte Kongruenz für $m = 1, 2, \ldots l-1$ erfüllt sein. Setzt man aber $\zeta = 1 + \lambda$ und denkt sich nach Potenzen λ bis λ^3 einschließlich entwickelt, so ergibt sich für festes i eine Kongruenz von der Gestalt:

$$(13) \qquad A_0(m) + A_1(m)\,\lambda + A_2(m)\,\lambda^2 + A_3(m)\,\lambda^3 \equiv a_0 \ (\mathfrak{l}^4)$$

wo die $A(m)$ ganze ganzzahlige Funktionen von m bedeuten, die den dritten Grad nicht übersteigen. Aus der letzten Kongruenz folgt dann:

$$(14) \qquad A_1(m) \equiv 0, \quad A_2(m) \equiv 0, \quad A_3(m) \equiv 0 \ (l).$$

Da diese Kongruenzen höchstens vom Grade 3 in m sind und $l-1$ Wurzeln besitzen, müssen sie für $l \geqq 5$ identisch in m erfüllt sein, also auch die Wurzel $m = 0$ haben. Setzt man aber in (12) $m = 0$, so folgt:

$$(15) \qquad (a + \zeta^i b)^{(s-r)(s-r^2)} \equiv a_0 (\mathfrak{l}^4) \qquad (i = 0, 1, \ldots l-1),$$

wenn

$$\alpha \equiv a, \qquad \beta \equiv b \ (\mathfrak{l})$$

und a, b rationale Zahlen bedeuten.

Digitized by Google

Aus (15) folgt nun, wenn man wieder $\zeta = 1 + \lambda$ setzt und nach Potenzen von λ entwickelt:

$$(16) \qquad \left[\frac{d^n (a+\zeta^i b)^{(s-r)(s-r^2)}}{(d\zeta)^n}\right]_{\zeta=1} \equiv 0\ (l) \qquad \begin{matrix}(n = 1, 2, 3)\\ (i = 0, 1, \ldots l-1).\end{matrix}$$

Demnach ist auch

$$(17) \qquad \left[\frac{d^3 \log (a+\zeta^i b)^{(s-r)(s-r^2)}}{(d\zeta)^3}\right]_{\zeta=1} \equiv 0\,(l) \quad (i = 0, 1, \ldots l-1),$$

da die dritte Ableitung des hingeschriebenen Logarithmus mod l eine ganze ganzzahlige Funktion der in (16) auftretenden Ableitungen ist.

Die Kongruenz (17) ist in i vom dritten Grade; da sie mehr Wurzeln besitzt als ihr Grad beträgt, muß sie identisch in i erfüllt sein. Es genügt daher, nur die Glieder mit der höchsten Potenz von i als Faktor zu berücksichtigen. Dies geschieht am einfachsten, wenn man in (17) ζ^i durch e^{iv} ersetzt und die dritte Ableitung nach v für $v = 0$ bildet, also

$$(18) \qquad \frac{d_0^3 \log (a+e^{iv}b)^{(s-r)(s-r^2)}}{(dv)^3} \equiv 0\,(l),$$

wobei der Index Null an **d** anzeigen soll, daß nach der Differentiation $v = 0$ zu setzen ist; ferner bedeutet die Substitution s jetzt die Vertauschung $e^{iv} \mid e^{riv}$.

Beachtet man nun, daß einerseits:

$$(19) \qquad \frac{d^n s(e^{iv})}{(dv)^n} = r^n \frac{d^n e^{iv}}{(dv)^n},$$

weil

$$(20) \qquad s(e^{iv}) = e^{riv} \qquad \text{ist},$$

und daß andererseits:

$$(21) \qquad \frac{d^n \log f_1(e^{iv}) f_2(e^{iv})}{(dv)^n} = \frac{d^n \log f_1(v)}{(dv)^n} + \frac{d^n \log f_2(v)}{(dv)^n},$$

so erkennt man, daß man für (18) schreiben kann:

$$(22) \qquad (r^3-r)(r^3-r^2)\frac{d_0^3 \log (a+e^{iv}b)}{(dv)^3} \equiv 0\,(l).$$

Da die ersten beiden Faktoren zu l prim sind, so folgt:

$$23) \qquad \frac{d_0^3 \log (a+e^{iv}b)}{(dv)^3} \equiv 0\,(l),$$

also genau die erste Kummer'sche Kongruenz, die abgesehen von

Digitized by Google

unwesentlichen Faktoren auf $a \equiv b(l)$ hinausläuft. Man kommt auf Grund derselben in bekannter Weise zu einem Widerspruch, wenn man noch die Zahlenpaare a, c; b, c heranzieht. Ist die Klassenzahl des Körpers $k(\zeta)$ zu l prim, so genügen die vorstehenden Entwicklungen bereits, um die Unmöglichkeit der Gleichung $\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$ in dem angegebenen Umfange darzutun. Unsere Entwicklungen reichen aber weiter, denn sie zeigen, daß die angeführte Gleichung unmöglich ist, sobald in $k(\zeta)$ kein zum Exponenten 3 gehöriges Ideal existiert, mag auch die Klassenzahl von $k(\zeta)$ durch eine beliebige Potenz von l teilbar sein.

Wir gehen jetzt zum allgemeinen Beweise des aufgestellten Satzes über, der der vorstehenden Entwicklung so analog ist, daß wir uns dabei kurz fassen können. Es werde also angenommen, daß in $k(\zeta)$ kein Ideal existiert, das zum Exponenten $2j+1$ $\left(j \leqq \frac{l-3}{2}\right)$ gehört. Setzt man dann:

$$g(s) = (s-r)\,(s-r^2)\,\ldots\,(s-r^{2j}), \tag{24}$$

so ergeben sich die Kongruenzen:

$$(\alpha + \zeta^i \beta)^{\sigma(s)} \equiv a_0\,(l^{2j+2}), \qquad (i = 0, 1, \ldots l-1) \tag{25}$$

wo a_0 eine rationale Zahl bedeutet. Da diese Kongruenzen bestehen bleiben, wenn darin α und β durch ein Paar konjugierter Körperzahlen ersetzt werden, so folgt analog wie oben, daß es gestattet ist, in (25) für α und β ihre rationalen Reste mod l a und b zu setzen:

$$(a + \zeta^i b)^{\sigma(s)} \equiv a_0\,(l^{2j+2}) \qquad (i = 0, 1, \ldots l-1). \tag{26}$$

Aus (26) ergibt sich dann durch Entwicklung nach Potenzen von λ:

$$\left[\frac{d^n (a+\zeta^i b)^{\sigma(s)}}{d\zeta^n}\right]_{\zeta = \tau 1} \equiv 0\,(l) \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots 2j+1 \\ i = 0, 1, \ldots l-1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

und daraus folgt wieder:

$$\left[\frac{d^{2j+1} \log (a+\zeta^i b)^{\sigma(s)}}{(d\zeta)^{2j+1}}\right]_{\zeta = 1} \equiv 0\,(l) \qquad (i = 0, 1, \ldots l-1). \tag{28}$$

Die letzte Kongruenz ist für i vom Grade $2j+1$ und muß daher, weil sie mehr Wurzeln hat als ihr Grad beträgt, identisch in i bestehen. Um den Koeffizienten der höchsten Potenz von i in (28) zu berechnen, genügt es für ζ^i e^v zu setzen, nach v zu differentiiren und nach der Differentiation $v = 0$ zu setzen. Man erhält so:

Digitized by Google

$$\frac{d_0^{2j+1}\log(a+e^v b)^{\varphi(l)}}{(dv)^{2j+1}} \equiv 0\,(l); \tag{29}$$

die Substitution s bedeutet in (29) die Vertauschung $e^v \mid e^{vr}$. Auf Grund der beiden Gleichungen (19) und (21) folgt dann aus (29):

$$g(r^{2j+1}) \cdot \frac{d_0^{2j+1}\log(a+e^v b)}{(dv)^{2j+1}} \equiv 0\,(l). \tag{30}$$

Da der erste Fakter $g(r^{2j+1})$ zu l prim ist, so ist damit der aufgestellte Satz bewiesen, wenn man noch beachtet, daß die rationalen Reste mod $\mathfrak{l}$ von α^* und β^* in (9) dieselben Multiplen der rationalen Reste von α und β in (6) sind.

Die Untersuchungen von Kummer und Mirimanoff[1]) haben nun ergeben, daß die Kongruenzen (5) in den Fällen $j = 1, 2, 3, 4$ nicht befriedigt werden können. Daraus ergibt sich der folgende

Satz II: Gibt es im Körper $k(\zeta)$ nicht zu jedem der Exponenten 3, 5, 7, 11 mod $\mathfrak{l}$ zugehörige Ideale, so läßt sich die Gleichung

$$\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$$

durch zu l prime Zahlen aus $k(\zeta)$ nicht befriedigen.

Wir wollen noch einige Folgerungen aus dem vorstehenden Satze ziehen. Es sei die Klassengruppe von $k(\zeta)$:

$$d_1^{x_1} \ldots d_e^{x_e}\, c_1^{y_1} \ldots c_f^{y_f} \qquad \begin{pmatrix} x_i = 0, 1, \ldots l^{m_i}-1 \\ y_i = 0, 1, \ldots l^{n_i}-1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

wobei alle Klassen mit zu l primen Exponenten als Einheitselement der Gruppe gewählt sind und die Bezeichnung so getroffen sei, daß die d-Klassen Ideale aus $k'(\zeta+\zeta^{-1})$ enthalten, die c-Klassen aber nicht. Es seien ferner $\mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_e$ Ideale aus $d_1, \ldots d_e$, die in k' liegen, und $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_f$ Ideale aus $c_1, \ldots c_f$. Wir setzen dann:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_i^{l^{m_i-1}} &= \mathfrak{r}_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots e) \\ \mathfrak{q}_i^{l^{n_i-1}} &= \mathfrak{q}_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots f) \end{aligned} \tag{32}$$

und weiter:

$$\mathfrak{r}_i^{*l} = \varrho_i, \quad \mathfrak{q}_i^{*l} = \varkappa_i. \tag{33}$$

Die Ideale $\mathfrak{r}_i^*$ gehören mod $\mathfrak{l}$ zu geraden Exponenten und kommen daher für Satz II nicht in betracht. Unter dem System der Ideale:

1) Journ. für reine und angew. Math. Bd. 128. S. 45.

Digitized by Google

(34) $\qquad \mathfrak{q}_1^{*\,z_1} \ldots \mathfrak{q}_f^{*z_f} \qquad (z_i = 0, 1, \ldots l-1)$

müssen sich mindestens e unabhängige finden, deren l^{te} Potenz als primäre Zahl darstellbar ist. Denn zu jeder der Untergruppen von (31):

$$x_i \equiv 0 \,(l) \qquad (i = 1, 2, \ldots e)$$

gehört nach der Theorie des Klassenkörpers eine singuläre Primärzahl, die weder eine Einheit noch eine l^{te} Potenz eines Ideals aus k' sein kann. Denn gehört etwa π_1 zu der durch die Kongruenz

$$x_1 \equiv 0 \,(l)$$

definierten Untergruppe von (31), so muß gelten:

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}_1}\right) = \zeta^m \neq 1.$$

Wendet man jetzt die Substitution $s' : \zeta \mid \zeta^{-1}$ an, so würde folgen, wenn π_1 eine Einheit oder l^{te} Potenz eines Ideals aus k' wäre:

$$\left(\frac{s'\pi_1}{s'\mathfrak{r}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}_1}\right) = \zeta^{-m} = \zeta^m.$$

Das ist unmöglich, weil $m \not\equiv 0 \,(l)$ ist. Es kann daher π_1 weder eine Einheit noch eine l^{te} Potenz eines Ideals aus k' sein und kann deshalb als l^{te} Potenz eines Ideals des Systems (34) angenommen werden. In diesem System sind also mindestens e unabhängige Ideale vorhanden, die mod $\mathfrak{l}$ zum Exponenten l oder einem höheren gehören und die daher im Sinne des Satzes II nicht in Frage kommen. Ist daher $f-e \leqq 3$, so können offenbar die Bedingungen, die Satz II für die Lösbarkeit der Gleichung $\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$ in $k(\zeta)$ enthält, nicht erfüllt werden. Es ergibt sich daraus das folgende Resultat:

Satz III. Ist die Anzahl der Klassenverbände von $k(\zeta)$: l^{e+f} und von $k'(\zeta+\zeta^{-1})$: l^e und ist:

$$f-e \leqq 3,$$

so ist die Gleichung:

$$\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$$

durch zu l prime Zahlen aus $k(\zeta)$ nicht zu lösen[1]).

1) Herr E. Hecke hat kürzlich (Gött. Nachr. 1910) einen Teil des Satzes III bewiesen, nämlich den Fall $f-e = 0$. Er hat auch gezeigt, daß stets $f-e \geqq 0$ ist, was in analoger Weise aus den obigen Entwicklungen folgt. Ich werde in der folgenden Mitteilung noch näher auf die Struktur der Klassengruppe von $k(\zeta)$ eingehen.

Digitized by Google

Bei einem Vergleich der Sätze III und II ist zu beachten, daß Satz II der weiter reichende ist. Es kann sehr wohl Werte l geben, für die sich die Unmöglichkeit der Gleichung $\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$ auf Grund von Satz III nicht nachweisen läßt, während dies mit Hülfe von Satz II möglich ist. Noch spezieller als Satz III ist der folgende, dessen Richtigkeit ohne weiteres aus Satz II folgt:

Satz IV: Ist die Klassenzahl des Körpers $k(\zeta)$ höchstens durch l^2 teilbar, so ist die Gleichung:

$$\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$$

durch zu l prime Zahlen in $k(\zeta)$ nicht zu lösen.

Digitized by Google

Dreiparametrige Randwertaufgaben.

Von

Jitsuo Yoshikawa.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 10. Dez. 1910

In meiner vorhergehenden Mitteilung[1]) habe ich eine Oscillationsaufgabe mit zwei Parametern behandelt, indem ich die Stetigkeit[2]) der Eigenwerte zugrunde legte. Derselbe Gedanke läßt sich naturgemäß auf das entsprechende Problem mit drei Parametern anwenden, wovon die vorliegende Arbeit handelt. Zunächst betrachte ich eine Randwertaufgabe unter einer Voraussetzung (5). Anstatt dieser führe ich im 4. Paragraphen alle möglichen Voraussetzungen gewisser Art ein und zeige, daß sich im allgemeinen drei verschiedene Fälle durch meine Methode lösen lassen. Ueberdies füge ich im 3. Paragraphen eine weitere Bedingung (13) hinzu, um das Oscillationstheorem zu beweisen. Die letzten zwei Paragraphen beschäftigen sich mit einer Anwendung meiner Methode auf die Lamésche Differentialgleichung mit vier singulären Stellen im Endlichen.

§ 1.

Es seien drei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorgelegt für u als Funktion von x, für v als Funktion von y und für w als Funktion von z von der Gestalt

$$(1) \qquad \frac{d\left(p\frac{du}{dx}\right)}{dx} + (\lambda a + \mu b + \nu c)\,u = 0 \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2),$$

1) „Zweiparametriges Oscillationstheorem", Gött. Nachr. 1911.

2) Hilbert, Gött. Nachr. 1910, pag. 384.

Digitized by Google

$$(2)\qquad \frac{d\left(q\frac{dv}{dy}\right)}{dy}+(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}+\nu\bar{c})v = 0 \qquad (y_1 \leqq y \leqq y_2),$$

$$(3)\qquad \frac{d\left(r\frac{dw}{dz}\right)}{dz}+(\lambda\bar{\bar{a}}+\mu\bar{\bar{b}}+\nu\bar{\bar{c}})w = 0 \qquad (z_1 \leqq z \leqq z_2),$$

worin p, a, b, c Funktionen der unabhängigen Variabeln x und $q, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ Funktionen der unabhängigen Variabel y und $r, \bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{c}}$ Funktionen der unabhängigen Variabeln z bedeuten; diese Funktionen mögen sämtlich der Kürze halber als regulär analytisch angenommen werden und sie mögen überdies die Bedingungen erfüllen:

$$(4)\qquad \begin{cases} p(x) > 0 & (x_1 \leqq x \leqq x_2), \\ q(y) > 0 & (y_1 \leqq y \leqq y_2), \\ r(z) > 0 & (z_1 \leqq z \leqq z_2), \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} a(x) > 0, \quad b(x) > 0, \quad c(x) > 0 & (x_1 \leqq x \leqq x_2) \\ \bar{a}(y) > 0, \quad \bar{b}(y) > 0, \quad \bar{c}(y) < 0 & (y_1 \leqq y \leqq y_2) \\ \bar{\bar{a}}(z) < 0, \quad \bar{\bar{b}}(z) > 0, \quad \bar{\bar{c}}(z) > 0 & (z_1 \leqq z \leqq z_2). \end{cases}$$

(Die Bedingungen (5) werde ich später durch verschiedene andere[1]) ersetzen.)

Unser Problem ist nun die Parameter λ, μ, ν in der Weise zu bestimmen, daß es ein Lösungstripel $u(x), v(y), w(z)$ gibt, welche die Eigenschaft hat, daß

$$(6)\qquad \begin{cases} u(x) = 0 & \text{für } x = x_1 \text{ und } x = x_2, \\ v(y) = 0 & \text{„ } y = y_1 \text{ „ } y = y_2, \\ w(z) = 0 & \text{„ } z = z_1 \text{ „ } z = z_2. \end{cases}$$

Wir schreiben nun die erste Gleichung in der Form:

$$\left\{\frac{d\left(p\frac{du}{dx}\right)}{dx}+(\mu b+\nu c)u\right\}+\lambda a u = 0,$$

und denken uns, daß μ und ν irgend welche feste Werte haben. Dann gibt es nach der Hilbertschen Theorie[2]) der orthogonalen Integralgleichungen unendlich viele, lediglich im Unendlichen sich

1) Siehe pag. 13—15.

2) Hilbert, Gött. Nachr. 1904, pag. 225.

Digitized by Google

häufende Parameterwerte $\lambda = \lambda_i$, für welche die Differentialgleichung je eine den Randbedingungen (6) genügende Lösung besitzt.

Diese ausgezeichneten Parameterwerte, die Eigenwerte, $\lambda = \lambda_i$ sind sämtlich einfach. Von ihnen fällt nur eine endliche Anzahl negativ aus; bedeutet also $C_{\mu\nu}$ eine gewisse positive Konstante, so gilt

$$-C_{\mu\nu} \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots.$$

Insbesondere sind sie alle positiv, falls $\mu = 0$, $\nu = 0$ ist.

Nun sind unsere Eigenwerte λ_i stetige Funktionen[1]) von μ und ν für alle Werte von diesen. Wie ändern sich dann diese Funktionen $\lambda_i(\mu, \nu)$ bei variierenden Argumenten?

Es seien für die gewissen Werte μ, ν der i-te Eigenwert $\lambda_i(\mu, \nu)$ und die zugehörige Eigenfunktion $u_i(\mu, \nu)$. Es sind dann

$$(7) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \left[p \left(\frac{du_i}{dx} \right)^2 - (\mu b + \nu c) u_i^2 \right] dx = \lambda_i,$$

$$(8) \qquad \int_{x_1}^{x_2} a u_i^2 \, dx = 1.$$

Wenn ferner für $\mu + \delta\mu$, $\nu + \delta\nu$ der i-te Eigenwert $\lambda_i + \delta\lambda_i$ und die zugehörige Eigenfunktion $u_i + \delta u_i$ ist, so gelten auch

$$(7a) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \left[p \left(\frac{d(u_i + \delta u_i)}{dx} \right)^2 - \{(\mu + \delta\mu) b + (\nu + \delta\nu) c\} (u_i + \delta u_i)^2 \right] dx = \lambda_i + \delta\lambda_i,$$

$$(8a) \qquad \int_{x_1}^{x_2} a (u_i + \delta u_i)^2 \, dx = 1.$$

Substrahiert man (7) aus (7a) und (8) aus (8a), so erhält man, indem man die Größen höherer Ordnung vernachlässigt,

$$(9) \qquad \delta\lambda_i = 2 \int_{x_1}^{x_2} p \frac{du_i}{dx} \frac{d\delta u_i}{dx} \, dx - 2 \int_{x_1}^{x_2} (b\mu + c\nu) u_i \delta u_i \, dx - \int_{x_1}^{x_2} (b\delta\mu + c\delta\nu) u_i^2 \, dx,$$

$$(10) \qquad 0 = \int_{x_1}^{x_2} a u_i \delta u_i \, dx.$$

Integriert man partiell das erste Integral in (9) und berücksichtigt

1) Hilbert, Gött. Nachr. 1910, pag. 384.

Digitized by Google

man dabei, daß u_i für λ_i, μ, ν der Differentialgleichung (1) genügt, so hat man endlich [1]) nach (10)

$$\delta\lambda_i = -B\delta\mu - C\delta\nu, \tag{11}$$

worin gesetzt wird

$$\begin{cases} B = \int_{x_1}^{x_2} b u_i^2 \, dx \quad \text{(positiv)}, \\ C = \int_{x_1}^{x_2} c u_i^2 \, dx \quad \text{(positiv)}. \end{cases}$$

Aus dieser Grundrelation (11) folgen zunächst

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial\mu} = -B \quad \text{(negativ)}, \tag{A}$$

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial\nu} = -C \quad \text{(negativ)}. \tag{B}$$

Denkt man sich ferner, wie $\delta\mu$ und $\delta\nu$ sich verhalten damit, daß $\lambda_i(\mu, \nu)$ einen konstanten Wert beibehalten soll, so erhält man für $\delta\lambda_i = 0$

$$\frac{d\mu}{d\nu} = -\frac{C}{B} \quad \text{(negativ)}. \tag{C}$$

Diese Verhältnisse kann man geometrisch im dreidimensionalen Raume ganz deutlich auffassen. In Bezug auf die rechtwinkligen Koordinatensysteme $(\lambda\mu\nu)$ repräsentiert nämlich die Gleichung

$$\lambda = \lambda_i(\mu, \nu)$$

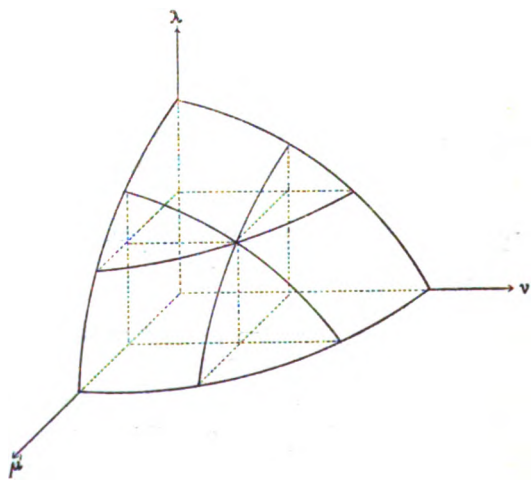


Fig. 1.

1) „Zweiparametriges Oscillationstheorem“ vom Verfasser, Gött. Nachr.. 1911

Digitized by Google

eine Fläche, welche die λ-Achse auf der positiven Halbachse trifft. Sie ist von jeder Ebene $\lambda =$ konst. in einer Kurve geschnitten, die wegen (C) monoton abnehmend ist. Auch wegen (B) ist sie von jeder Ebene $\mu =$ konst. in einer monoton abnehmenden Kurve, und endlich wegen (A) von jeder Ebene $\nu =$ konst. in einer ebenso monoton abnehmenden Kurve geschnitten. Sie hat also gegen die Koordinatenachsen eine etwa in der Figur 1 gezeichnete Lage.

Nun betrachten wir die zweite Differentialgleichung

$$\left\{ \frac{d\left(q\frac{dv}{dy}\right)}{dy} + (\mu\bar{b} + \nu\bar{c})\, v \right\} + \lambda\bar{a}v = 0,$$

wo

$$\bar{a} > 0, \quad \bar{b} > 0, \quad \bar{c} < 0.$$

Sie hat unendlich viele Eigenwerte $\bar{\lambda}_j$, die ebenso sämtlich einfach sind und von denen nur eine endliche Anzahl negativ ausfällt, nämlich

$$-\bar{C}_{\mu\nu} \leqq \bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \cdots,$$

wo $\bar{C}_{\mu\nu}$ eine positive Konstante bedeutet. Insbesondere sind sie alle positiv, falls $\mu = 0$, $\nu = 0$ ist.

Setzt man ferner

$$\begin{cases} \bar{B} = \int_{y_1}^{y_2} \bar{b} v_j^2\, dy & \text{(positiv)}, \\ \bar{C} = \int_{y_1}^{y_2} \bar{c} v_j^2\, dy & \text{(negativ)}, \end{cases}$$

worin v_j die zu $\bar{\lambda}_j$ gehörige Eigenfunktion ist, so schließt man über die stetige Funktion $\bar{\lambda}_j(\mu, \nu)$ folgende Beziehungen:

(11a) $$\delta\bar{\lambda}_j = -\bar{B}\delta\mu - \bar{C}\delta\nu$$

(Aa) $$\frac{\partial\bar{\lambda}_j}{\partial\mu} = -\bar{B} \quad \text{(negativ)},$$

(Ba) $$\frac{\partial\bar{\lambda}_j}{\partial\nu} = -\bar{C} \quad \text{(positiv)},$$

und für $\delta\bar{\lambda}_j = 0$

(Ca) $$\frac{d\mu}{d\nu} = -\frac{\bar{C}}{\bar{B}} \quad \text{(positiv)}.$$

Die Fläche

$$\lambda = \bar{\lambda}_j(\mu, \nu)$$

Digitized by Google

trifft die λ-Achse in der positiven Halbachse und schneidet jede Ebene $\lambda =$ konst. in einer monoton wachsenden, jede Ebene $\mu =$ konst. in einer ebenso monoton wachsenden, dagegen jede Ebene $\nu =$ konst. in einer monoton abnehmenden Kurve. Sie hat ungefähr solche Lage gegen die Koordinatenachsen wie in der Figur 2.

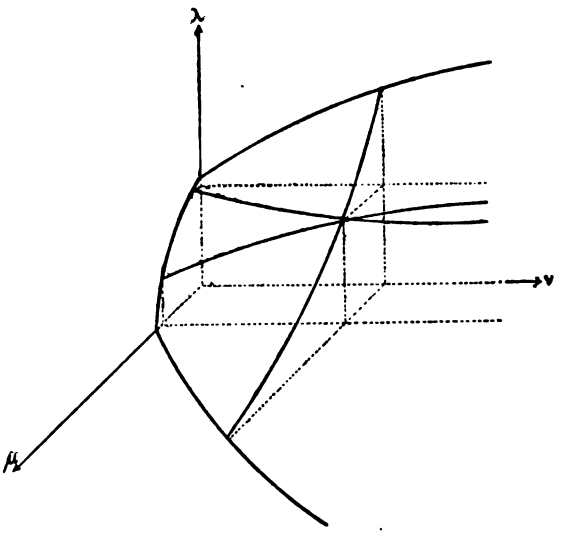


Fig. 2.

Endlich nehmen wir die dritte Differentialgleichung

$$\left\{ \frac{d\left(r\frac{dw}{dz}\right)}{dz} + (\mu\bar{\bar{b}} + \nu\bar{\bar{c}})\, w \right\} + \lambda\bar{\bar{a}}w = 0,$$

wo

$$\bar{\bar{a}} < 0, \quad \bar{\bar{b}} > 0, \quad \bar{\bar{c}} > 0.$$

Berücksichtigen wir nun, daß in diesem Falle der Koeffizient von λ negativ ist, so schließen wir folgendermaßen:

Die dritte Differentialgleichung hat unendlich viele Eigenwerte $\bar{\bar{\lambda}}_\varkappa$, die ebenso sämtlich einfach sind und von denen nur eine endliche Anzahl positiv ausfällt, nämlich

$$\bar{\bar{C}}_{\mu\nu} \geqq \bar{\bar{\lambda}}_1 > \bar{\bar{\lambda}}_2 > \bar{\bar{\lambda}}_3 > \cdots,$$

worin $\bar{\bar{C}}_{\mu\nu}$ eine positive Konstante bedeutet. Insbesondere sind sie sämtlich negativ, falls $\mu = 0$, $\nu = 0$ ist.

Digitized by Google

Setzt man weiter

$$\begin{cases} \overline{\overline{B}} = \int_{z_1}^{z_2} \overline{\overline{b}} w_\varkappa^2 dz & \text{(positiv)}, \\ \overline{\overline{C}} = \int_{z_1}^{z_2} \overline{\overline{c}} w_\varkappa^2 dz & \text{(positiv)}, \end{cases}$$

worin $w_\varkappa$ die zu $\overline{\overline{\lambda}}_\varkappa$ gehörige Eigenfunktion bedeutet, so hat man von der stetigen Funktion $\overline{\overline{\lambda}}_\varkappa(\mu, \nu)$ folgende Beziehungen:

(11 b) $$\delta \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa = \overline{\overline{B}} \delta\mu + \overline{\overline{C}} \delta\nu,$$

(A b) $$\frac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa}{\partial \mu} = \overline{\overline{B}} \quad \text{(positiv)},$$

(B b) $$\frac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa}{\partial \nu} = \overline{\overline{C}} \quad \text{(positiv)},$$

und für $\delta \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa = 0$

(C b) $$\frac{d\mu}{d\nu} = -\frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{B}}} \quad \text{(negativ)}.$$

Die Fläche

$$\lambda = \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa(\mu, \nu)$$

trifft die λ-Achse in der negativen Halbachse und schneidet jede Ebene $\lambda =$ konst. in einer monoton abnehmenden, dagegen jede Ebene $\mu =$ konst. in einer monoton wachsenden und jede Ebene $\nu =$ konst. in einer ebenso monoton wachsenden Kurve. Diese Verhältnisse veranschaulicht die Figur 3.

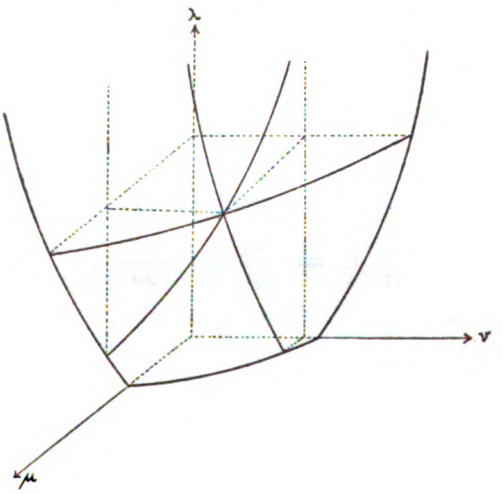


Fig. 3.

Digitized by Google

§ 2.

Wir fragen nun: Können die beiden ersten Flächen sich schneiden? Wenn dies wirklich geschieht, dann fragen wir weiter: Kann diese Schnittkurve die dritte Fläche treffen?

Betrachten wir erstens die Parallelebenen $\lambda = \text{konst.}$ Auf jeder von diesen gibt die erste Fläche eine monoton abnehmende, dagegen die zweite Fläche eine monoton wachsende Kurve. Die beiden Kurven erstrecken sich von $-\infty$ bis $+\infty$ in Bezug auf die beiden Koordinaten und kreuzen sich daher gewiß in einem und nur in einem Punkt. Insbesondere auf der $\mu\nu$-Ebene ($\lambda = 0$) schneiden sich die beiden Flächen in einem Punkt L, welcher auf der vordern Seite ($\mu > 0$) der ν-Achse fällt.

Nehmen wir dann die Parallelebenen $\mu = \text{konst.}$ Auf jeder dieser Ebenen gibt die erste Fläche eine monoton abnehmende, dagegen die zweite Fläche eine monoton wachsende Kurve, welche beide sich gewiß in einem und nur einem Punkt kreuzen. Insbesondere auf der $\nu\lambda$-Ebene schneiden sich die beiden Flächen in einem Punkt M, welcher auf der oberen Seite ($\lambda > 0$) der ν-Achse fällt.

Auf einer der Parallelenebenen $\nu = \text{konst.}$ geben unsere beiden Flächen zwei abnehmenden Kurven. Von diesen Kurven kann man doch nicht ohne weiteres sagen, daß sie einen einzigen Punkt bestimmen. Es ist wohl möglich, daß sie keinen, einen oder sogar mehrere Schnittpunkte liefern[1]).

Nachdem ich so doppelterweise die Existenz der Schnittkurve der beiden ersten Flächen erkannt habe, betrachte ich nun ihre Tangentialrichtung. Die Schnittkurve ist dargestellt durch die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_i(\mu, \nu) \\ \lambda = \bar{\lambda}_j(\mu, \nu). \end{cases}$$

Bedeutet nun $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ den zu λ, μ, ν benachbarten Kurvenpunkt, so bestehen zwischen den Differentialen

$$\begin{cases} d\lambda = \dfrac{\partial \lambda_i}{\partial \mu} d\mu + \dfrac{\partial \lambda_i}{\partial \nu} d\nu \\ d\lambda = \dfrac{\partial \bar{\lambda}_j}{\partial \mu} d\mu + \dfrac{\partial \bar{\lambda}_j}{\partial \nu} d\nu \end{cases}$$

oder nach (A), (B), (A a), (B a)

$$\begin{cases} d\lambda + B\,d\mu + C\,d\nu = 0 \\ d\lambda + \bar{B}\,d\mu + \bar{C}\,d\nu = 0. \end{cases}$$

1) Vgl. pag. 21.

Digitized by Google

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Verhältnisse der Differentiale bestimmen, nämlich

$$\frac{d\lambda}{B\bar{C}-\bar{B}C} = \frac{d\mu}{C-\bar{C}} = \frac{d\nu}{\bar{B}-B}. \tag{12}$$

(neg.) (pos.) (?)

Es ist also $\frac{d\lambda}{d\mu}$ stets negativ.

Die Resultate fasse ich jetzt folgendermaßen auf: Die Schnittkurve der beiden ersten Flächen erstreckt sich von einem Punkt $\lambda = \infty$, $\mu = -\infty$ (oben, hinten) nach einem Punkt $\lambda = -\infty$, $\mu = \infty$ (unten, vorn). Unterwegs trifft sie erstens die $\lambda\nu$-Ebene im Punkt M (oben) und dann die $\mu\nu$-Ebene im Punkt L (vorn). Ihre Projektion auf der $\lambda\mu$-Ebene ist monoton absteigend und trifft die positive λ-Achse und die positive μ-Achse.

Nun wenden wir uns an die dritte Fläche. Der Schnitt dieser Fläche mit jeder Ebene $\nu = \text{konst.}$ trennt die letztere in zwei Teile, nämlich den oberen und den unteren; so trennt die Fläche selbst den ganzen Raum in zwei Teile: den Oberraum und den Unterraum. Es ist im Oberraum $\lambda > \bar{\bar{\lambda}}_x$, auf der Fläche selbst $\lambda = \bar{\bar{\lambda}}_x$ und im Unterraum $\lambda < \bar{\bar{\lambda}}_x$.

Denken wir uns dann eine Ebene $\nu = \text{konst.}$ durch einen sehr hinteren ($\mu = -\infty$) Punkt H unserer Raumkurve $(\lambda_i \bar{\lambda}_j)$ gelegt. H hat die Koordinaten

$$\nu = \nu, \quad \mu = -\infty, \quad \lambda = +\infty.$$

Diese Ebene ist durch die dritte Fläche in einer monoton wachsenden Kurve geschnitten, die den Punkt enthält:

$$\nu = \nu, \quad \mu = -\infty, \quad \bar{\bar{\lambda}}_x = -\infty.$$

H liegt also im Oberraum. Wenn wir uns dagegen eine Ebene $\nu = \text{konst.}$ durch einen sehr vorderen ($\mu = +\infty$) Kurvenpunkt V gelegt denken, so ist $\lambda = -\infty$ für diesen Kurvenpunkt, während $\bar{\bar{\lambda}}_x = +\infty$ für den entsprechenden Punkt der dritten Fläche ist. V liegt also im Unterraum.

Unsere stetige Schnittkurve läuft demnach einmal im Oberraum und das andere Mal im Unterraum. Infolgedessen muß sie die dritte Fläche wenigstens einmal treffen ($\lambda = \bar{\bar{\lambda}}_x$). Die Koordinaten dieses Treffpunktes seien nun λ^*, μ^*, ν^*. Es ist ein Schnittpunkt der drei Flächen, nämlich

$$\lambda^* = \lambda_i(\mu^*, \nu^*) = \bar{\lambda}_j(\mu^*, \nu^*) = \bar{\bar{\lambda}}_x(\mu^*, \nu^*).$$

Und die zu diesen Parameterwerten λ^*, μ^*, ν^* gehörigen Eigen-

Digitized by Google

funktionen der drei Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} u = u_i^*(x) \\ v = v_j^*(y) \\ w = w^*(z) \end{cases}$$

bilden ein Lösungssystem der gewünschten Art.

Nun denken wir uns drei Flächensysteme

$$\lambda = \lambda_i(\mu, \nu) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$\lambda = \bar{\lambda}_j(\mu, \nu) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$\lambda = \bar{\bar{\lambda}}_\varkappa(\mu, \nu) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots).$$

Zwei Flächen desselben Systems schneiden sich nie, weil zum Beispiel $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ ist. Aber drei beliebige Flächen, von denen keine zwei demselben System gehören, bestimmen sicher einen Treffpunkt λ^*, μ^*, ν^*. Es existieren also unendlich viele solcher Treffpunkte. Diese Tatsache fasse ich nun in einen Satz auf:

Satz 1. Ist ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Gestalt (1), (2), (3) vorgelegt, für welche die Bedingungen (4), (5) erfüllt sind, so existieren unendlich viele Systeme von Werten λ, μ, ν, für welche die Differentialgleichungen solche simultane Lösungen $u_i(x)$, $v_j(y)$, $w_\varkappa(z)$ haben, daß $u_i(x)$ an den Enden und nicht überall im Innern des Intervalles $x_1 x_2$, $v_j(y)$ an den Enden und nicht überall im Innern des Intervalles $y_1 y_2$ und $w_\varkappa(z)$ an den Enden und nicht überall im Innern des Intervalles $z_1 z_2$ verschwindet. Weiter aus der Oscillationseigenschaft der Eigenwerten folgt es:

Satz 2. Es existiert wenigstens ein Lösungstripel u_i, v_j, $w_\varkappa$ unseres Gleichungssystems von der Art, daß $u_i(x)$ genau $i-1$mal im Innern des Intervalles $x_1 x_2$, $v_j(y)$ genau $j-1$mal im Innern des Intervalles $y_1 y_2$ und $w_\varkappa(z)$ genau $\varkappa-1$mal im Innern des Intervalles $z_1 z_2$ verschwindet, und daß $u_i(x) = 0$ für $x = x_1$ und $x = x_2$, $v_j(y) = 0$ für $y = y_1$ und $y = y_2$, und $w_\varkappa(z) = 0$ für $z = z_1$ und $z = z_2$ ist.

§ 3.

Der Satz 2 behauptet nur die Existenz eines Lösungssystems beliebiger Oscillationen, aber nichts von der Eindeutigkeit solches Lösungssystems. Man kann wohl erwarten, daß die Raumkurve $(\lambda_i \bar{\lambda}_j)$ die dritte Fläche $(\bar{\bar{\lambda}}_\varkappa)$ in zwei oder sogar mehreren Punkten

Digitized by Google

trifft und demgemäß zwei oder mehrere Lösungssysteme gewisser bestimmter Oscillationen entstehen.

Nun nehmen wir an, daß die Raumkurve $(\lambda, \bar{\lambda})$ die dritte Fläche in zwei Punkten treffe, nämlich

$$(\lambda^*, \mu^*, \nu^*), \quad (\lambda^{**}, \mu^{**}, \nu^{**}).$$

Ich behaupte dann, daß es sicher

$$\lambda^* \neq \lambda^{**},$$
$$\mu^* \neq \mu^{**},$$
$$\nu^* \neq \nu^{**}$$

ist. Denn wäre zum Beispiel $\nu^* = \nu^{**}$, so hätten die beiden Differentialgleichungen (1) und (3) für $\nu = \nu^*$:

$$\left\{ \frac{d\left(p \frac{du}{dx}\right)}{dx} + \nu^* c u \right\} + (\lambda a + \mu b) u = 0,$$

$$\left\{ \frac{d\left(r \frac{dw}{dz}\right)}{dz} + \nu^* \bar{c} w \right\} + (\bar{\lambda} \bar{a} + \bar{\mu} \bar{b}) w = 0$$

zwei Parameterbestimmungen λ^*, μ^* und λ^{**}, μ^{**} für eine $i-1$ mal oscillierende u-Lösung und eine $k-1$ mal oscillierende w-Lösung, was nicht möglich ist [1]). Dasselbe gilt für λ und μ.

Es sei demnach etwa

$$\lambda^* < \lambda^{**}.$$

Erstens haben wir dann, da die beiden Punkte auf unserer Raumkurve liegen.

$$\mu^* > \mu^{**}.$$

Und dann schließen wir weiter, da die Punkte auf der dritten Fläche liegen,

$$\nu^* < \nu^{**}.$$

Diese Ungleichung ist sicher dann unmöglich, wenn für die Raumkurve $\frac{d\lambda}{d\nu}$ stets negativ ist, d. h. nach (12)

$$\int_{x_1}^{x_2} b u^2 dx < \int_{y_1}^{y_2} \bar{b} v_j^2 dy. \tag{13}$$

1) Diese zweiparametrige Aufgabe ist wesentlich dieselbe wie die meiner ersten Note.

Digitized by Google

Wenn diese Ungleichung besteht, dann gibt es nur einen Treffpunkt der Raumkurve und der dritten Fläche, und so folgt das Oscillationstheorem:

Satz 3. Wenn die weitere Bedingung (13) erfüllt ist, dann lassen sich die Parameter λ, μ, ν in eindeutiger Weise so bestimmen, daß es ein solches Lösungssystem $u_i(x), v_j(y), w_\varkappa(z)$ unserer Gleichungen gibt, welche an den Enden und bezw. $i-1$mal, $j-1$mal, $\varkappa-1$mal im Innern des betreffenden Intervalles verschwindet.

Nun ist die Bedingung (13) zum Beispiel im Falle erfüllt, daß

$$(14)\qquad \begin{cases} b(x) = f(x)\,a(x) & (x_1 \leqq x \leqq x_2), \\ \overline{b}(y) = \overline{f}(y)\,\overline{a}(y) & (y_1 \leqq y \leqq y_2) \end{cases}$$

und daß für jedes x des Intervalles $x_1 x_2$ und für jedes y des Intervalles $y_1 y_2$ die Ungleichung gilt:

$$(14\,a)\qquad f(x) < \overline{f}(y).$$

Nämlich sei F der größte Wert von $f(x)$ im Intervalle $x_1 x_2$ und $\overline{F}$ der kleinste von $\overline{f}(y)$ im Intervalle $y_1 y_2$, dann gelten

$$f(x) \leqq F < \overline{F} \leqq \overline{f}(y).$$

Und

$$\int_{x_1}^{x_2} b u_i^2\,dx \leqq F \int_{x_1}^{x_2} a u_i^2\,dx = F,$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \overline{b} v_j^2\,dy \geqq \overline{F} \int_{y_1}^{y_2} \overline{a} v_j^2\,dy = \overline{F}.$$

Da $F < \overline{F}$ ist, so ist die Bedingung (13) erfüllt.

Die letzte Ueberlegung werde ich später [1]) bei der Behandlung der Laméschen Differentialgleichung anwenden.

§ 4.

In den bisherigen Entwicklungen haben wir über die neun Funktionen

$$\begin{array}{lll} a(x), & b(x), & c(x), \\ \overline{a}(y), & \overline{b}(y), & \overline{c}(y), \\ \overline{\overline{a}}(z), & \overline{\overline{b}}(z), & \overline{\overline{c}}(z) \end{array}$$

die Voraussetzung (5) gemacht, nämlich sind die Koeffizienten von

1) Siehe pag. 21.

Digitized by Google

$$\begin{array}{lc} & \lambda,\ \mu,\ \nu \\ \text{in der 1. Gleichung bezw.} & +++ \\ \text{in der 2. Gleichung bezw.} & ++- \\ \text{in der 3. Gleichung bezw.} & -++. \end{array} \qquad \text{(I)}$$

Denkt man sich nun anstatt ν $-\nu$ als den dritten Parameter eingeführt, so sieht man, daß der Fall

$$\left.\begin{array}{l} ++- \\ +++ \\ -+- \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

auch schon erledigt ist.

In diesem Paragraphen werde ich untersuchen, welche Fälle noch durch unsere Methode auflösbar sind.

Bevor ich nun die verschiedenen Vorzeichenkombinationen der obigen Art abzähle, bemerke ich folgendes:

1) Die erste Horizontalreihe kann stets als

$$+++$$

angenommen werden. Denn andernfalls wird dies erreicht durch Einführung entgegengesetzter Parameter.

2) Zwei Horizontalreihen müssen von einander verschieden sein. Denn andernfalls sei zum Beispiel

$$\left.\begin{array}{l} +++ \\ +-- \\ +-- \end{array}\right\}$$

Es ist dann für die Eigenwerte $\overline{\lambda}_j(\mu, \nu)$ und $\overline{\overline{\lambda}}_\varkappa(\mu, \nu)$ bezw.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{\lambda}_j}{\partial \mu} = + \\ \dfrac{\partial \overline{\lambda}_j}{\partial \nu} = + \\ \dfrac{d\mu}{d\nu} = -, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa}{\partial \mu} = + \\ \dfrac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa}{\partial \nu} = + \\ \dfrac{d\mu}{d\nu} = -. \end{array}\right.$$

Die beiden zugehörigen Flächen schneiden jede Ebene $\lambda =$ konst. in zwei monoton abnehmenden, jede Ebene $\mu =$ konst. in zwei monoton wachsenden und jede Ebene $\nu =$ konst. ebenso in zwei monoton wachsenden Kurven. Man kann daher nicht ohne weitere Bedingungen behaupten, daß die beiden Flächen eine Schnittkurve bestimmen.

Digitized by Google

Dies in Rücksicht genommen, schreibe ich nun alle möglichen Kombinationen wie folgt:

+	+	+		+	+	+		+	+	+				+	+	+		+	+	+			
+	+	−		+	+	−		+	−	−				+	−	−		−	−	−			
+	−	+		+	−	−		−	+	+				−	+	+		+	−	−			
+	+	+		+	+	+		+	+	+		+	+	+		+	+	+		+	+	+	
+	+	−		+	+	−		+	−	−		+	−	−		−	−	−		−	−	−	
−	−	+		−	−	−		+	+	−		+	+	−		+	−	−		+	−	−	
														−	+	−							
														+	+	+							
														+	−	−							
														−	−	−							

Unter diesen Kombinationen sind nur sechs von einander wesentlich verschieden, wie die gleichen Kombinationen in der Tabelle mit demselben Index gekennzeichnet sind.

Nun betrachten wir die Kombination (VI):

$$\left.\begin{matrix} + + + \\ - - - \\ + - - \end{matrix}\right\}$$

In diesem Falle haben wir für die Eigenwerte λ_i und $\bar{\lambda}_j$ bezw.

$$\left\{\begin{matrix} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mu} = - \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial \nu} = - \\ \frac{d\mu}{d\nu} = -, \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} \frac{\partial \bar{\lambda}_j}{\partial \mu} = - \\ \frac{\partial \bar{\lambda}_j}{\partial \nu} = - \\ \frac{d\mu}{d\nu} = -. \end{matrix}\right.$$

Folglich können wir hier auch nicht behaupten, daß die λ_i-Fläche und die $\bar{\lambda}_j$-Fläche sich schneiden.

Ebenso muß die Kombination (V) ausgeschlossen werden.

Für den Fall (IV):

$$\left.\begin{matrix} + + + \\ + - - \\ - + + \end{matrix}\right\}$$

Digitized by Google

haben wir für die Eigenwerte $\bar{\lambda}_j$ und $\bar{\bar{\lambda}}_\varkappa$ bezw.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\bar{\lambda}_j}{\partial\mu} = + \\ \frac{\partial\bar{\lambda}_j}{\partial\nu} = + \\ \frac{d\mu}{\partial\nu} = -, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\bar{\bar{\lambda}}_\varkappa}{\partial\mu} = + \\ \frac{\partial\bar{\bar{\lambda}}_\varkappa}{\partial\nu} = + \\ \frac{d\mu}{d\nu} = -. \end{array}\right.$$

Auch ist dieser Fall auszuschließen.

Nun kommen wir zur Kombination (III):

$$\left.\begin{array}{l} +++ \\ +-- \\ -+- \end{array}\right\} \qquad \text{(III)}$$

In diesem Falle erhalten wir für die drei Arten Eigenwerte

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\lambda_i}{\partial\mu} = - \\ \frac{\partial\lambda_i}{\partial\nu} = - \\ \frac{d\mu}{d\nu} = -, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\bar{\lambda}_j}{\partial\mu} = + \\ \frac{\partial\bar{\lambda}_j}{\partial\nu} = + \\ \frac{d\mu}{d\nu} = -, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\bar{\bar{\lambda}}_\varkappa}{\partial\mu} = + \\ \frac{\partial\bar{\bar{\lambda}}_\varkappa}{\partial\nu} = - \\ \frac{d\mu}{d\nu} = +, \end{array}\right.$$

und für die Schnittkurve der beiden ersten Flächen

$$\frac{d\lambda}{(?)} = \frac{d\mu}{(+)} = \frac{d\nu}{(-)}.$$

Durch ganz ähnliches Verfahren wie im § 2 können wir also schließen, daß dieser Fall wirklich auflösbar ist.

Die Kombinationen (I) und (II) sind schon erledigt, wie es am Anfang dieses Paragraphen erwähnt ist.

Zusammenfassend: Unsere Auflösungsmethode läßt sich im allgemeinen nur auf die drei Fälle anwenden, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} +++ \\ ++- \\ -++ \end{array}\right\} \text{(I)} \qquad \left.\begin{array}{l} +++ \\ ++- \\ +-- \end{array}\right\} \text{(II)} \qquad \left.\begin{array}{l} +++ \\ +-- \\ --+ \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Zum Schluß bemerke ich noch, daß sich viele anderen Fälle, wenn weitere Bedingungen von der Art (13) erfüllt sind, durch neuer Methode lösen lassen, wie es gleich gezeigt wird.

Digitized by Google

§ 5.

Die unten zu behandelnden speziellen Fälle sind nicht in den oben allgemein erledigten enthalten. Trotzdem lassen sie sich wegen Erfüllung weiterer Bedingungen durch unsere Methode lösen. Die Probleme entstehen aus der Laméschen Differentialgleichung mit vier reellen singulären Stellen im Endlichen:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-e_1}+\frac{1}{t-e_2}+\frac{1}{t-e_3}+\frac{1}{t-e_4}\right)\frac{du}{dt} + \frac{\mathfrak{A}t^2+\mathfrak{B}t+\mathfrak{C}}{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)(t-e_4)}u = 0. \tag{15}$$

Die vier Punkte e_1, e_2, e_3, e_4, der Größe nach geordnet, trennen die ganze t-Achse in fünf Teile, nämlich

$$\begin{aligned} &1)\quad -\infty \leqq t < e_1,\\ &2)\quad e_1 \leqq t < e_2,\\ &3)\quad e_2 \leqq t < e_3,\\ &4)\quad e_3 \leqq t < e_4,\\ &5)\quad e_4 \leqq t \leqq \infty. \end{aligned}$$

1), 3) und 5) nennen wir kurz die R-Teile und 2) und 4) die J-Teile.

Nun fassen wir ein Intervall im Innern eines dieser Teile ins Auge und bringen die Differentialgleichung (15) in die Form einer sich selbst adjungierten und zwar so, falls das Intervall im R-Teile liegt,

$$\frac{d\left(R\frac{du}{dt}\right)}{dt}+\frac{\mathfrak{A}t^2+\mathfrak{B}t+\mathfrak{C}}{R}u = 0 \tag{16}$$

$$R = \sqrt{(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)(t-e_4)},$$

falls dagegen es im J-Teile liegt,

$$\frac{d\left(J\frac{du}{dt}\right)}{dt}-\frac{\mathfrak{A}t^2+\mathfrak{B}t+\mathfrak{C}}{J}u = 0. \tag{17}$$

$$J = \sqrt{-(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)(t-e_4)}.$$

Dann wählen wir einen Punkt α außerhalb des Intervalls und führen die neue unabhängige Variable folgendermaßen ein:

1) Wenn α rechts des Intervalls liegt, dann setzen wir

$$t = \alpha - x,$$

sodaß x stets positiv im Intervalle bleibt.

Digitized by Google

2) Wenn α links des Intervalles liegt, dann setzen wir

$$t = \alpha + \xi,$$

sodaß ξ ebenso stets positiv im Intervalle ausfällt.

Durch diese zwei Arten Transformationen gehen die Gleichungen (16) und (17), wenn wir endlich

$$\begin{cases} \alpha^2 \mathfrak{A} + \alpha \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \nu, \\ 2\alpha \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \lambda, \\ \mathfrak{A} = \mu \end{cases}$$

setzen, über in

$$\frac{d\left(R \frac{du}{dx}\right)}{dx} + \frac{\nu - \lambda x + \mu x^2}{R} u = 0$$

$$\frac{d\left(R \frac{du}{d\xi}\right)}{d\xi} + \frac{\nu + \lambda \xi + \mu \xi^2}{R} u = 0$$

$$\frac{d\left(J \frac{du}{dx}\right)}{dx} - \frac{\nu - \lambda x + \mu x^2}{J} u = 0$$

$$\frac{d\left(J \frac{du}{d\xi}\right)}{d\xi} - \frac{\nu + \lambda \xi + \mu \xi^2}{J} u = 0.$$

Wir haben also aus der Laméschen Gleichung einmal wegen der Lage des Intervalles und andererseits wegen der Wahl des Punktes α vier Sorten Gleichungen erhalten, in denen die Koeffizienten von λ, μ, ν bezw.

(18)
$$\begin{matrix} - + + \\ + + + \\ + - - \\ - - - \end{matrix}$$

im ganzen Intervalle sind.

Nun denken wir uns drei Intervalle, die nur der Einschränkung unterworfen sind, daß sie einander ausschließen und keinen der singulären Punkte enthalten. Wir wählen einen Punkt α außerhalb der drei Intervalle, und in jedem von diesen führen wir nach der oben erklärten Weise, indem wir dabei die Lage des betreffenden Intervalles und die relative Lage von α zu diesem berücksichtigen, die passende Transformation aus. Dann ergeben sich die drei Gleichungen von der Gestalt (1), (2), (3). Dieses Gleichungs-

Digitized by Google

system gehört aber zu keiner der Klassen (I), (II), (III) des letzten Paragraphen, sondern die Koeffizienten von λ, μ, ν im System bestehen aus einer Kombination mit Wiederholung von den vier Reihen (18). Also entstehen je nach der Lage unserer Intervalle und nach der Wahl des Punktes α viele verschiedene Gleichungssysteme. Die Anzahl aller möglichen Systeme dieser Art ist gleich der der Kombinationen von vier Dingen zu je dreien mit Wiederholung, also 20.

Die 20 verschiedenen Fälle lassen sich von zweierlei Standpunkten aus auf zwei Hauptfälle zurückführen.

Zunächst sieht man schon, daß jede der vier Reihen in (18) zu einer andern entgegengesetzt ist. Infolgedessen spalten sich unsere 20 Kombinationen in zwei Teile von je 10 Gliedern. Jedes Glied des einen Teiles hat sein entgegengesetzes Bild im andern Teile, z. B.

$$\left.\begin{matrix} -++ \\ +++ \\ +-- \end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix} +-- \\ --- \\ -++ \end{matrix}\right\}.$$

Zwei solche sich dual entsprechenden Kombinationen kann man als zu demselben Gleichungstripel gehörig auffassen, wenn man sich in diesem Tripel anstatt λ, μ, ν einmal $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ als Parameter eingeführt denkt. Wir brauchen demnach nur einen der beiden Teile zu betrachten, nämlich etwa

+++ a)	+++ b)	+++ c)	+++ d)
+++	+++	+++	+++
+++	−++	+−−	−−−
	+++ b′)	+++ e)	+++ e′)
	−++	−++	−++
	−++	+−−	−−−

−++ a′)	+++ c′)	−++ d′)
−++	+−−	−++
−++	+−−	+−−

Von diesen 10 Kombinationen gehören a) und a′) zu demselben Gleichungstripel, man braucht sich nur einmal λ und das andere Mal $-\lambda$ als Parameter eingeführt zu denken. Dasselbe gilt sowohl für b) und b′) als für d) und d′), als auch für e) und e′). Ebenso

Digitized by Google

sind c) und c') nicht zu unterscheiden. Es bleiben also nur fünf wesentlich verschiedene Fälle übrig, nämlich

+ + + a)	+ + + b)	+ + + c)	+ + + d)
+ + +	+ + +	+ + +	+ + +
+ + +	− + +	+ − −	− − −
		+ + + e)	
		− + +	
		+ − −	

Von einem andern Standpunkte aus lassen sich die fünf Fälle endlich in zwei Hauptfälle zusammenfassen.

Die zwei Fälle a) und b) entstehen, wenn die drei Intervalle sämtlich im R-Teile fallen, zum Beispiel

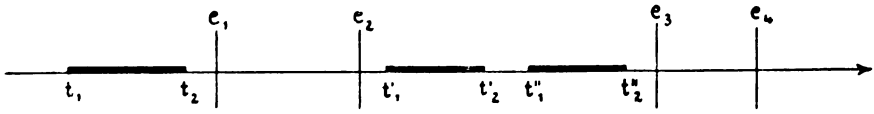


Fig. 4.

Wenn der Punkt α links von den allen Intervallen gewählt ist, so ergibt sich a). Wenn dagegen α zwischen dem ersten und dem zweiten Intervalle gewählt, dann ergibt sich der Fall b).

Die drei übrigen Fälle entstehen, wenn das erste Intervall im J-Teile und die zwei anderen im R-Teile fallen, zum Beispiel

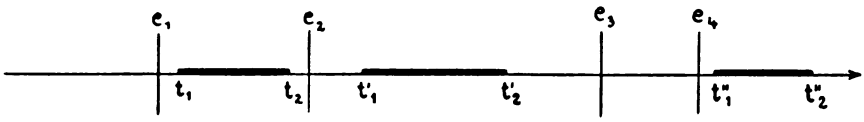


Fig. 5.

Der Fall c) entsteht, wenn α zwischen dem ersten und dem zweiten Intervalle liegt. Der Fall d) entsteht, wenn α links des ersten Intervalles liegt, und endlich e), wenn α zwischen dem zweiten und dem dritten Intervalle genommen ist.

Wir gelangen also durch geeignete Wahl des Punktes α an zwei verschiedene Hauptfälle, nämlich

+ + + b)	+ + + c)
+ + +	+ + +
− + +	+ − − ,

deren Erledigung das Problem des nächsten Paragraphen bildet.

Digitized by Google

§ 6.

Es seien drei Intervalle $t_1\ t_2$, $t_1'\ t_2'$, $t_1''\ t_2''$ so gegeben wie in der Figur 4, nämlich

$$\begin{cases} t_1 < t_2 < e_1 \\ e_2 < t_1' < t_2' < t_1'' < t_2'' < e_3. \end{cases}$$

Wir wählen einen zwischen t_2 und t_1' gelegenen Punkt α und setzen im Intervalle $(t_1'\ t_2')$

$$t = \alpha + x, \qquad (x_1 = t_1' - \alpha, \quad x_2 = t_2' - \alpha),$$

im Intervalle $(t_1''\ t_2'')$

$$t = \alpha + y, \qquad (y_1 = t_1'' - \alpha, \quad y_2 = t_2'' - \alpha)$$

und im Intervalle $(t_1\ t_2)$

$$t = \alpha - z, \qquad (z_1 = \alpha - t_2, \quad z_2 = \alpha - t_1).$$

Es entstehen dann aus der Laméschen Gleichung (15) die folgenden:

$$(1\,a) \qquad \frac{d\left(p\frac{du}{dx}\right)}{dx} + \frac{\lambda x + \mu x^2 + \nu}{p} u = 0 \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2),$$

$$(2\,a) \qquad \frac{d\left(q\frac{dv}{dy}\right)}{dy} + \frac{\lambda y + \mu y^2 + \nu}{q} v = 0 \qquad (y_1 \leqq y \leqq y_2),$$

$$(3\,a) \qquad \frac{d\left(r\frac{dw}{dz}\right)}{dz} + \frac{-\lambda z + \mu z^2 + \nu}{r} w = 0 \qquad (z_1 \leqq z \leqq z_2),$$

wo

$$p = \sqrt{(\alpha + x - e_1)\ (\alpha + x - e_2)\ (\alpha + x - e_3)\ (\alpha + x - e_4)},$$

$$q = \sqrt{(\alpha + y - e_1)\ (\alpha + y - e_2)\ (\alpha + y - e_3)\ (\alpha + y - e_4)},$$

$$r = \sqrt{(\alpha - z - e_1)\ (\alpha - z - e_2)\ (\alpha - z - e_3)\ (\alpha - z - e_4)}.$$

Wir setzen ferner

$$B = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{p} u_i^2\, dx, \qquad C = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{p} u_i^2\, dx,$$

$$\overline{B} = \int_{y_1}^{y^2} \frac{y^2}{q} v^2\, dy, \qquad \overline{C} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{q} v_j^2\, dy,$$

$$\overline{\overline{B}} = \int_{z_2}^{z_2} \frac{z^2}{r} w_\varkappa^2\, dz, \qquad \overline{\overline{C}} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{r} w_\varkappa^2\, dz.$$

Digitized by Google

Dann merken wir, daß

$$\begin{cases} B = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{x u_i^2}{p}\, dx < x_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{x u_i^2}{p}\, dx = x_2 \\ \overline{B} = \int_{y_1}^{y_2} y \cdot \frac{y v_j^2}{q}\, dy > y_1 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y v_j^2}{q}\, dy = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} \cdot \frac{x u_i^2}{p}\, dx > \frac{1}{x_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x u_i^2}{p}\, dx = \frac{1}{x_2} \\ \overline{C} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} \cdot \frac{y v_j^2}{q}\, dy < \frac{1}{y_1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{y v_j^2}{q}\, dy = \frac{1}{y_1}. \end{cases}$$

Wir erhalten also die folgenden Ungleichungen:

$$(19) \qquad \begin{cases} B < x_2 < y_1 < \overline{B}, \\ C > \frac{1}{x_2} > \frac{1}{y_1} > \overline{C}, \\ \frac{C}{B} > \frac{\overline{C}}{\overline{B}}. \end{cases}$$

Nun gelten für die zur Gleichung (1 a) gehörige λ_i-Fläche und die zu (2 a) gehörige $\overline{\lambda}_j$-Fläche bezw.

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mu} = -B \text{ (neg.)}, \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial \nu} = -C \text{ (neg.)}, \\ \frac{d\mu}{d\nu} = -\frac{C}{B} \text{ (neg.)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial \overline{\lambda}_j}{\partial \mu} = -\overline{B} \text{ (neg.)}, \\ \frac{\partial \overline{\lambda}_j}{\partial \nu} = -\overline{C} \text{ (neg.)}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \nu} = -\frac{\overline{C}}{\overline{B}} \text{ (neg.)}. \end{cases}$$

Jede Ebene $\nu =$ konst. ist durch die erste Fläche in einer monoton abnehmenden Kurve und durch die zweite ebenfalls in einer monoton abnehmenden geschnitten. Die letztere Kurve ist aber wegen (19) stets steiler als die erstere, und sie kreuzen sich daher in unserem Falle gewiß in einem Punkte, der zu der Durchdringungskurve der beiden Flächen gehört.

Die Tangentialrichtung dieser Raumkurve ist nach (19)

$$\underset{\text{(neg.)}}{\frac{d\lambda}{B\overline{C} - \overline{B}C}} = \underset{\text{(pos.)}}{\frac{d\mu}{C - \overline{C}}} = \underset{\text{(pos.)}}{\frac{d\nu}{\overline{B} - B}}$$

Dies steht aber zur dritten Fläche, für die es gelten:

Digitized by Google

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa}{\partial \mu} = + \overline{\overline{B}} \text{ (pos.)} \\ \dfrac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa}{\partial \nu} = + \overline{\overline{C}} \text{ (pos.)} \\ \dfrac{d\mu}{d\nu} = - \dfrac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{B}}} \text{ (neg.),} \end{cases}$$

in der genau im § 3 gewünschten Beziehung. Die Raumkurve trifft die dritte Fläche in einem und nur einem Punkt, und damit ist das Oscillationstheorem für diesen Fall bewiesen.

Wir gehen nun zum zweiten Hauptfalle. Es seien etwa wie in der Figur 5

$$\begin{cases} e_1 < t_1 < t_2 < e_2, \\ e_3 < t_1' < t_2' < e_3, \\ e_4 < t_1'' < t_2''. \end{cases}$$

Dann wählen wir einen Punkt α wieder zwischen t_2 und t_1' und führen die neuen unabhängigen Variabeln x, y, z ganz genau so wie im letzten Falle ein. Es entsteht ein Gleichungstripel, das sich vom letzten Tripel (1a) (2a) (3a) nur durch die dritte Gleichung unterscheidet. Diese lautet im jetzigen Falle

$$(3\,b) \qquad \frac{d\left(r\dfrac{dw}{dz}\right)}{dz} + \frac{\lambda z - \mu z^2 - \nu}{r} w = 0 \qquad (z_1 \leqq z \leqq z_2).$$

Es ist wieder für die dritte Fläche

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa}{\partial \mu} = - \overline{\overline{B}} \text{ (pos.),} \\ \dfrac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_\varkappa}{\partial \nu} = - \overline{\overline{C}} \text{ (pos.),} \\ \dfrac{d\mu}{d\nu} = - \dfrac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{B}}} \text{ (neg.).} \end{cases}$$

Die Beziehung der Durchdringungskurve der beiden ersten Flächen zu der dritten ist also genau dieselbe wie im letzten Hauptfalle, und damit ist das Oscillationstheorem auch hier bewiesen.

Die obigen Ergebnisse fassen wir in den folgenden **verallgemeinerten Kleinschen Oscillationssatz**[1]) auf:

1) Vgl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschatten, II A 7a. § 5. pag. 451 ff.

Digitized by Google

Satz 4. In der Laméschen Gleichung (15) kann man die Parameter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß sie drei Lösungen u_i, v_j, $w_\varkappa$ besitzt, derart, daß u_i an den Endpunkten und $i-1$mal im Innern eines Intervalles, v_j an den Enden und $j-1$mal im Innern eines zweiten Intervalles und $w_\varkappa$ an den Enden und $\varkappa-1$mal im Innern eines dritten Intervalles verschwindet, wobei die Intervalle nur der Einschränkung unterworfen sind, daß sie einander ausschließen und keinen der Punkte e_1, e_2, e_3, e_4 enthalten.

Göttingen, den 3. Dezember 1910.

Digitized by Google

Ein zweiparametriges Oscillationstheorem.

Von

Jitsuo Yoshikawa.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 10. Dezember 1910.

Es seien zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorgelegt für y als Funktion von x und für η als Funktion von ξ von der Gestalt

$$\frac{d\left(p\frac{dy}{dx}\right)}{dx}+(\lambda a+\mu b)y = 0 \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2) \tag{1}$$

$$\frac{d\left(\pi\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi}+(\lambda\alpha+\mu\beta)\eta = 0 \qquad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2) \tag{2}$$

worin p, a, b, Funktionen der unabhängigen Variabeln x und π, α, β Funktionen der unabhängigen Variabeln ξ bedeuten; diese Funktionen mögen sämtlich der Kürze halber als regulär analytisch angenommen werden und sie mögen überdies die Bedingungen erfüllen:

$$\begin{cases} p(x)>0 & (x_1 \leqq x \leqq x_2) \\ \pi(\xi)>0 & (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} a(x)>0, \quad b(x)>0, & (x_1 \leqq x \leqq x_2) \\ \alpha(\xi)<0, \quad \beta(\xi)>0\,^{1}), & (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2). \end{cases} \tag{4}$$

Unser Problem ist nun die Parameter λ, μ in der Weise zu bestimmen, daß es ein Lösungspaar $y(x)$, $\eta(\xi)$ gibt, welche die

1) Diese Bedingungen werde ich nachher etwas verallgemeinern.

Digitized by Google

Eigenschaft hat, daß

$$y(x) = 0 \quad \text{für } x = x_1 \text{ und } x = x_2, \tag{5}$$

$$\eta(\xi) = 0 \quad \text{für } \xi = \xi_1 \text{ und } \xi = \xi_2. \tag{6}$$

Wir schreiben die erste Gleichung in der Form:

$$L(y) + \lambda a y \equiv \left\{ \frac{d\left(p\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \mu b y \right\} + \lambda a y = 0 \tag{1a}$$

und denken uns, daß μ irgend welchen festen Wert habe. Dann gibt es nach der Hilbertschen Theorie der orthogonalen Integralgleichungen unendlich viele, lediglich im Unendlichen sich häufende Parameterwerte $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, die sogenannten Eigenwerte, für welche die Gleichung (1a) je eine den Randbedingungen (5) genügende Lösung besitzt. Ueber diese Eigenwerte bemerke ich folgendes:

1) Diese Eigenwerte sind alle einfach. Von ihnen fällt nur eine endliche Anzahl negativ aus[1]). Bedeutet also C eine gewisse positive Konstante, (die natürlich von μ abhängt) so gilt

$$-C \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots.$$

Insbesondere sind sie alle positiv, falls $\mu \leqq 0$ ist.

Nun hat Hilbert allgemein folgenden Satz[2]) aufgestellt:

Wenn die Koeffizienten des linearen Differentialausdrucks $L(y)$ für alle in einem Intervalle fallenden Werte von μ regulär analytische Funktionen eines Parameters μ sind, und wenn für eben diese Werte μ auch stets die Ungleichung $p(x) > 0$ gilt, so ist allemal der i-te Eigenwert λ_i eine stetige Funktion von μ.

Es gilt in unserem Falle:

2) Unsere Eigenwerte sind alle stetige Funktionen von μ für alle endlichen Werte von μ.

3) Diese stetige Funktionen $\lambda_1(\mu)$, $\lambda_2(\mu)$, $\lambda_3(\mu), \ldots$ sind alle monoton abnehmend.

Es seien nämlich für einen gewissen Wert μ der i-te Eigenwert $\lambda_i(\mu)$ und die zugehörige Eigenfunktion $y_i(\mu)$. Dann gelten aus der Variationstheorie des Dirichletschen Integrals[1]) folgende

1) Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 6. Mitteilung. Göttinger Nachrichten 1910, pag. 387.

2) Hilbert, Göttinger Nachrichten 1910, pag. 384.

Digitized by Google

Beziehungen:

$$(7) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \left[p \left(\frac{dy_i}{dx} \right)^2 - \mu b y_i^2 \right] dx = \lambda_i$$

$$(8) \qquad \int_{x_1}^{x_2} a y_i^2 \, dx = 1 \text{ [1]}.$$

Ferner seien für den Wert $\mu + \delta\mu$ der i-te Eigenwert $\lambda_i + \delta\lambda_i$ und die zugehörige Eigenfunktion $y_i + \delta y_i$. Es gelten dann:

$$(7\,a) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \left[p \left(\frac{d(y_i + \delta y_i)}{dx} \right)^2 - (\mu + \delta\mu) b (y_i + \delta y_i)^2 \right] dx = \lambda_i + \delta\lambda_i$$

$$(8\,a) \qquad \int_{x_1}^{x_2} a (y_i + \delta y_i)^2 \, dx = 1.$$

Subtrahiert man (7) von (7a) und (8) von (8a), so erhält man, indem man die Größen höherer Ordnung vernachlässigt,

$$(9) \qquad \delta\lambda_i = 2 \int_{x_2}^{x_1} p \frac{dy_i}{dx} \frac{d\delta y_i}{dx} \, dx - \int_{x_1}^{x_2} b (2\mu y_i \delta y_i + y_i^2 \delta\mu) \, dx.$$

$$(10) \qquad 0 = \int_{x_1}^{x_2} a y_i \delta y_i \, dx$$

Durch die partielle Integration geht das erste Integral von (9) über in

$$2 \left[p \frac{dy_i}{dx} \delta y_i \right]_{x_1}^{x_2} - 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\left(p \frac{dy_i}{dx} \right)}{dx} \delta y_i \, dx.$$

Wegen der Randbedingungen (5) für die Eigenfunktion y_i verschwindet das erste Glied. Das zweite Glied wird, weil y_i der Differentialgleichung (1) für $\mu = \mu$, $\lambda = \lambda_i$ genügt,

$$2 \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_i a + \mu b) y_i \delta y_i \, dx$$

und endlich wird dies nach (10)

---

1) Es gelten noch $i-1$ weitere Relationen, nämlich

$$\int_{x_1}^{x_2} a y_i y_k = 0,$$

für $k = 1, 2, \ldots, i-1$. Es ist doch bemerkenswert, daß unsere Beweisführung ganz unabhängig von diesen Nebenbedingungen geht.

Digitized by Google

$$2\int_{x_1}^{x_2} \mu b y_i \delta y_i \, dx.$$

Führt man diesen Wert für das erste Integral in die Gleichung (9) ein, so ergibt sich

$$\delta\lambda_i = -\delta\mu \int_{x_1}^{x_2} b y_i^2 \, dx$$

$$\frac{d\lambda_i}{d\mu} = -\int_{x_1}^{x_2} b y_i^2 \, dx. \tag{11}$$

Wegen (4) ist also $\frac{d\lambda_i}{du}$ stets negativ, nie null. w. z. b. w [1]).

Es sei endlich noch bemerkt, daß diese monotone Funktion $\lambda_i(\mu)$ bei dem unendlich wachsenden Argument μ ebenso unendlich abnimmt.

Aus diesen Tatsachen sieht man wohl, daß in der $\lambda\mu$-Ebene die Kurven

$$\lambda = \lambda_1(\mu)$$
$$\lambda = \lambda_2(\mu)$$
$$\lambda = \lambda_3(\mu)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

etwa so wie in der Figur laufen (stark gezeichnet). Die sämt-

---

1) Für die erste Funktion $\lambda_1(\mu)$ läßt sich der Beweis sehr einfach vorführen. Es seien nämlich für einen gewissen Wert μ der erste Eigenwert λ_1 und die zugehörige Eigenfunktion y_1. Dann nimmt das Dirichletsche Integral für diese Funktion y_1 einen Minimalwert λ_1 an:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[p\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 - \mu b y_1^2 \right] dx = \lambda_1 \qquad \left(\int_{x_1}^{x_2} a y_1^2 \, dx = 1 \right).$$

Ferner sei für $\mu + d\mu$ der erste Eigenwert $\lambda_1 + d\lambda_1$. Es gilt dann für die diesmal nicht minimale Funktion y_1

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[p \frac{dy_1}{dx} \right)^2 - (\mu + d\mu) b y_1^2 \Big] dx > \lambda_1 + d\lambda_1.$$

Durch Subtrahieren ergibt sich

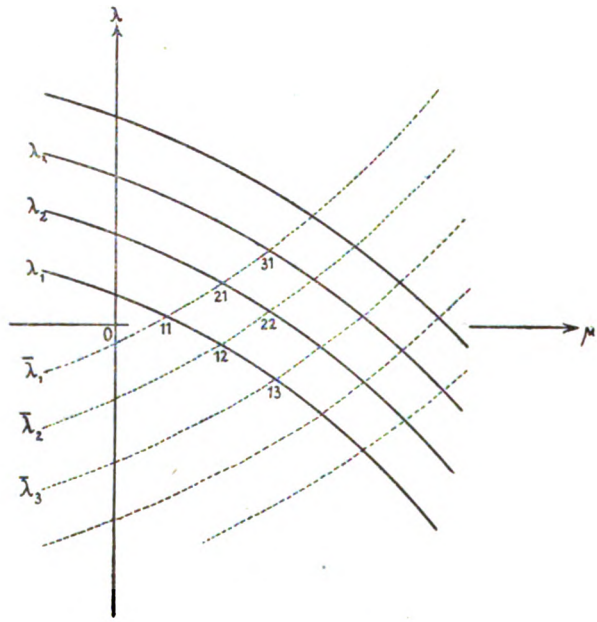
$$-d\mu \int_{x_1}^{x_2} b y_1^2 \, dx > d\lambda_1.$$

oder

$$\frac{d\lambda_1}{d\mu} < -\int_{x_1}^{x_2} b y_1^2 \, dx.$$

Digitized by Google

lichen Kurven $\lambda_1(\mu)$, $\lambda_2(\mu)$, $\lambda_3(\mu)$, ... schneiden die λ-Achse in der positiven Halbachse ($\lambda > 0$), und haben solche Lage, daß jede von ihnen oberhalb der vorangehenden liegt.



Schreibt man jetzt die zweite Differentialgleichung (2) in der Form

$$(2\,a) \qquad \Delta(\eta) + \lambda\alpha\eta \equiv \left\{ \frac{d\left(\pi \frac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi} + \mu\beta\eta \right\} + \lambda\alpha\eta = 0$$

und verfährt man damit ganz ähnlich wie oben, so schließt man gleich folgendes, indem man nur in Betracht zieht, daß der Koefficient von λ diesmal negativ ist:

1) Die Eigenwerte $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \ldots$ dieser Differentialgleichung sind alle einfach. Von ihnen fällt nur eine endliche Anzahl positiv aus. Bedeutet γ also eine gewisse positive Konstante, so gilt

$$\gamma \geqq \bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_3 > \ldots .$$

Insbesondere sind sie alle negativ, falls $\mu \gtrless 0$ ist.

2) Diese Eigenwerte sind alle stetige Funktionen von μ für alle endlichen Werte von μ.

3) Diese stetigen Funktionen $\bar{\lambda}_1(\mu)$, $\bar{\lambda}_2(\mu)$, $\bar{\lambda}_3(\mu)$, ... sind alle monoton wachsend.

Digitized by Google

Die sämtlichen Kurven (punktiert in der Figur)

$$\begin{aligned} \lambda &= \bar{\lambda}_1(\mu) \\ \lambda &= \bar{\lambda}_2(\mu) \\ \lambda &= \bar{\lambda}_3(\mu) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

in der $\lambda\mu$-Ebene schneiden die λ-Achse in der negativen Halbachse ($\lambda < 0$), und haben solche Lage, daß jede von ihnen unterhalb der vorangehenden liegt.

Betrachtet man nun die beiden Kurvensysteme

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_i(\mu) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \\ \lambda &= \bar{\lambda}_j(\mu) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

gleichzeitig, so sieht man, daß jede Kurve $\bar{\lambda}_j(\mu)$ des zweiten Systems der Reihe nach die sämtlichen Kurven $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ des ersten und ebenso jede Kurve $\lambda_i(\mu)$ des ersten Systems der Reihe nach die sämtlichen Kurven $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \ldots$ trifft, während zwei Kurven desselben Systems sich nie schneiden. Endlich fallen diese Schnittpunkte alle auf der rechten Seite der λ-Achse.

Die Figur veranschaulicht dieses Verhältnis. Es sind dort die sämtlichen Schnittpunkte zweckmäßig mit Doppelzahlen bezeichnet; es bedeutet, daß der Netzpunkt ij als Schnittpunkt der beiden Kurven $\lambda_i(\mu)$ und $\bar{\lambda}_j(\mu)$ entsteht.

Nun handelt es sich darum, wie unsere Netzpunkte zur Erledigung unseres Problems dienen. Das Resultat leuchtet schon ein, ich skizziere es kurz folgendermaßen:

Ich schreibe nochmal die beiden Differentialgleichungen:

$$\left\{\frac{d\left(p\,\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \mu b y\right\} + \lambda a y = 0$$

$$\left\{\frac{d\left(\pi\,\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{d\xi} + \mu\beta\eta\right\} + \lambda\alpha\eta = 0.$$

Es seien für einen gewissen Wert $\mu = \mu^*$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen der ersten Gleichung

$$\begin{cases} \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \ldots \\ y_1^*, y_2^*, y_3^*, \ldots \end{cases} \tag{12}$$

und die der zweiten

Digitized by Google

$$(13) \qquad \begin{cases} \bar{\lambda}_1^*, \bar{\lambda}_2^*, \bar{\lambda}_3^*, \dots \\ \eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*, \dots \end{cases}$$

Die Eigenwerte (12) sind im allgemeinen alle von den Eigenwerten (13) verschieden. Wenn aber μ^* die Abscisse eines unserer Netzpunkte ist, dann sicher und nur dann fallen einige von ihnen zusammen, etwa

$$\lambda_i^* = \bar{\lambda}_j^*.$$

Und die entsprechenden Eigenfunktionen

$$\begin{cases} y = y_i^*(x) \\ \eta = \eta_j^*(\xi) \end{cases}$$

bilden eins der gesuchten Lösungssysteme, das den Parameterwerten

$$\begin{cases} \mu = \mu^* \\ \lambda = \lambda_i^* = \bar{\lambda}_j^* \end{cases}$$

zugehört. Man schließt daher aus der Existenz unendlichvieler Netzpunkte folgenden Satz:[1])

Satz 1. Ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Gestalt (1), (2) vorgelegt, für welche die Bedingungen (3) und (4) erfüllt sind, so existieren unendlichviele Paare von Werten λ, μ, für welche die Differentialgleichungen solche simultanen Lösungen $y_i(x)$, $\eta_j(\xi)$ haben, daß $y_i(x)$ an den Enden und nicht überall im Innern des Intervalles $(x_1 x_2)$ und ebenso $\eta_j(\xi)$ an den Enden und nicht überall im Innern des Intervalles $(\xi_1 \xi_2)$ verschwindet.

Jetzt gehen wir einen Schritt weiter und betrachten naturgemäß die Oscillationseigenschaften. Ich entnehme dies einfach den Oscillationseigenschaften der Eigenfunktionen einer einparametrigen Differentialgleichung.

Bekanntlich[2]) verschwindet die i-te Eigenfunktion $y_i(x)$ der Differentialgleichung (1 a) genau $i-1$ mal im Innern des Intervalles $(x_1 x_2)$, und die j-te Eigenfunktion $\eta_j(\xi)$ genau $j-1$ mal im Innern des Intervalles $(\xi_1 \xi_2)$. Auf unserem Netz liest man also gleich:

---

1) Hilbert, Göttinger Nachrichten 1910, pag. 416.

2) Mason, Göttinger Dissertation 1903. Seite 60. Richardson, Jacobisches Kriterium und Oscillationseigenschaften. Math. Ann. Bd. 68. 1910. Seite 300.

Digitized by Google

Satz 2. Die Parameter λ, μ lassen sich in eindeutiger Weise so bestimmen, daß es ein Lösungspaar $y_i(x)$, $\eta_j(\xi)$ unseres Gleichungssystems gibt, von der Art, daß $y_i(x)$ genau $i-1$ mal im Innern des Intervalles $(x_1 x_2)$, $\eta_j(\xi)$ genau $j-1$ mal im Innern des Intervalles $(\xi_1 \xi_2)$ verschwindet, und daß $y_i(x) = 0$ für $x = x_1$ und $x = x_2$, $\eta_j(\xi) = 0$ für $\xi = \xi_1$ und $\xi = \xi_2$ ist.

Nachdem ich so die vorgelegte Aufgabe vollständig aufgelöst habe, wende ich mich zur Verallgemeinerung der darin enthaltenen Bedingungen (4).

Zunächst kann man statt (4) folgende Bedingung gelten lassen:

$$\begin{cases} a(x) > 0, & b(x) < 0, \quad (x_1 \leqq x \leqq x_2) \\ \alpha(\xi) < 0, & \beta(\xi) < 0, \quad (\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2). \end{cases}$$

Bei dieser Aenderung bleiben unsere Entwickelungen ganz dasselbe bis auf (11). In der Tat wird $\frac{d\lambda_i}{d\mu}$ dadurch stets positiv, und dann fallen die sämtlichen Netzpunkte auf der linken Seite der λ-Achse.

Ferner habe ich bis jetzt den einen Parameter λ bevorzugt. Das ist doch keineswegs nötig. Man kann natürlich dieselben Sätze erreichen, wenn man λ und μ ihre Plätze wechseln läßt.

Durch diese Ueberlegungen gelangt man an die allgemeineren Bedingungen wie folgt:

Die vier Funktionen behalten je dasselbe Vorzeichen in dem betreffenden Intervalle und zwar besitzt eins von ihnen entgegengesetztes Vorzeichen wie die drei anderen.

Zum Schluß betrachten wir die Lamésche Differentialgleichung mit drei singulären Stellen im Endlichen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-e_1} + \frac{1}{t-e_2} + \frac{1}{t-e_3}\right)\frac{dy}{dt} - \frac{At+B}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)} = 0.$$

Nach dem Hilbertschen Verfahren[1]) entstehen aus dieser Gleichung die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Gestalt (1) (2), welche die Bedingungen unseres Theoremes erfüllen, und damit ist das Kleinsche Oscillationstheorem bewiesen:

1) Hilbert, Göttinger Nachrichten 1910, pag. 416, 417.

Digitized by Google

Die Parameter A und B lassen sich in eindeutiger Weise so bestimmen, daß die Lamésche Gleichung eine Lösung y besitzt, die an den Endpunkten und i-mal im Innern eines gegebenen Intervalles $t_1 t_2$ verschwindet und zugleich eine solche, die an den Endpunkten und j-mal im Innern eines anderen Intervalles $\tau_1 \tau_2$ verschwindet. Dabei sind die Intervalle $t_1 t_2$ und $\tau_1 \tau_2$ nur der Einschränkung unterworfen, daß sie einander ausschließen und keinen der singulären Punkte e_1, e_2, e_3 enthalten.

In einer zweiten Mitteilung hoffe ich die entsprechende Aufgabe mit mehreren Parametern zu lösen. Ich möchte hier Herrn Prof. Hilbert und Herrn Dr. Weyl für ihre Anregung meinen herzlichen Dank aussprechen.

Göttingen, den 22. November 1910.

Digitized by Google

Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Mai 1910.

Sachlich geordnete Inhaltsübersicht der sechs Mitteilungen:

1. Mitteilung diese Nachr. 1904 S. 49—91.
2. „ „ „ 1904 S. 213—259.
3. „ „ „ 1905 S. 307—338.
4. „ „ „ 1906 S. 157—227.
5. „ „ „ 1906 S. 439—480.
6. „ „ „ 1910 S. 355—417.

Der gesamte in diesen sechs Mitteilungen behandelte Stoff gliedert sich in die folgenden Hauptabschnitte:

A. Theorie der Funktionen unendlichvieler Veränderlicher 1.)—7.).
B. Theorie der linearen Integralgleichungen 8.)—11.).
C. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen 12.)—19.).
D. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen 20.)—25.).
E. Anwendung auf die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln 26.)—28.).
F. Anwendung auf Variationsrechnung, Geometrie und Hydrodynamik 29.)—31.).

A. Theorie der Funktionen unendlichvieler Veränderlicher.

1) *Definition der Beschränktheit.* Eine Funktion von unendlichvielen Veränderlichen $F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ heißt beschränkt, wenn ihr n-ter Abschnitt $F(x_1, x_2, \ldots x_n, 0, 0, \ldots)$ dem absoluten Betrage nach für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots$, für die

Digitized by Google

$$\sum_{(p=1,2,\ldots)} x_p^2 \leqq 1$$

ist, unterhalb einer festen, von n unabhängigen Schranke M liegt.

Speziell ist eine Linearform

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots$$

dann und nur dann beschränkt, wenn

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots$$

konvergiert; eine Bilinearform

$$\sum_{(p,q=1,2,\ldots)} a_{pq} x_p y_q,$$

wenn

$$\left| \sum_{p,q=1,2,\ldots n} a_{pq} x_p y_q \right|$$

unterhalb einer von n unabhängigen Grenze M liegt[1]); eine lineare Transformation endlich

$$y_p = \sum_{(q=1,2\ldots)} a_{pq} y_q \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

heißt beschränkt, wenn die zugehörige Bilinearform

$$\sum_{(p,q=1,2,\ldots)} a_{pq} x_p y_q$$

beschränkt ist. Eine solche Transformation führt jedes Wertsystem mit konvergenter Quadratsumme in ein ebensolches über. (4. S. 176).

2) *Die Faltungssätze* besagen, daß die successive Ausführung, d. h. „Faltung", zweier oder mehrerer beschränkter Transformationen selbst wieder eine beschränkte lineare Transformation ergibt, (4. S. 179) und ferner, daß dieser Zusammensetzungsprozeß associativ ist (4. S. 180). Wendet man auf die Variabeln einer beschränkten linearen, quadratischen oder bilinearen Form eine beschränkte lineare Transformation an, so ist das Resultat eine beschränkte Form derselben Art.

3) Eine *orthogonale Transformation* ist eine solche lineare Transformation

---

1) Ein wichtiges Beispiel einer beschränkten quadratischen Form ist

$$\sum \frac{x_p x_q}{p+q};$$

meinen Beweis dafür siehe in der Inauguraldissertation von H. Weyl, Göttingen, 1908, S. 83.

Digitized by Google

$$y_p = \sum_{(q)} o_{pq} x_q, \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

die den beiden Bedingungen

$$\sum_{(r)} o_{pr}\, o_{qr} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$$

$$\sum_{(r)} o_{rp}\, o_{rq} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$$

genügt (4. S. 180). Zwei Linearformen

$$\sum_{(p)} a_p x_\mu, \quad \sum_{(p)} b_p x_p$$

heißen zueinander orthogonal, wenn

$$\sum_{(p)} a_p b_p = 0$$

ist. Unendlichviele Linearformen bilden ein vollständiges Orthogonalsystem, wenn ihr Koeffizientenschema dasjenige einer orthogonalen Transformation ist. Ein System von endlich oder unendlichvielen orthogonalen Linearformen kann durch Hinzufügung von endlich oder abzählbar vielen Linearformen zu einem vollständigen Orthogonalsystem ergänzt werden. (4. S. 193—195).

Die Faltung zweier Bilinearformen ist orthogonalen Transformationen gegenüber kovariant. (4. S. 181).

4) *Vollstetigkeit*[1]). Es seien

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

unendlichviele Wertsysteme, deren Quadratsumme kleiner als 1 ist und die die „Häufungsstelle“ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ besitzen in dem Sinne, daß

$$\underset{n=\infty}{L} x_p^{(n)} = x_p$$

ist; dann heißt eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ vollstetig, wenn für jede Folge solcher Wertsysteme

$$\underset{n=\infty}{L} F(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots)$$

st. (4. S. 200, 5. S. 439—442). Jede beschränkte Linearform ist

1) Diese hier beibehaltene Terminologie der Mitteilung 4 wird in der Mitteilung 5 aufgegeben, daselbst indem das Wort „Stetigkeit“ anstelle von „Vollstetigkeit“ tritt.

Digitized by Google

vollstetig, indessen nicht jede beschränkte quadratische oder bilineare Form; z. B. ist

$$\nu_1 x_1^2 + \nu_2 x_2^2 + \dots$$

dann und nur dann vollstetig, wenn

$$\underset{n=\infty}{L} \nu_n = 0,$$

während diese Form für

$$\nu_1 = 1,\ \nu_2 = 1, \dots$$

noch beschränkt bleibt. (4. S. 200). Die Bilinearform

$$\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

ist jedenfalls dann vollstetig, wenn

$$\sum_{(p,q)} a_{pq}^2$$

konvergiert (4. S. 203, 218).

Weitere hinreichende Kriterien für Vollstetigkeit beschränkter quadratischer Formen (4. S. 203. Satz VI).

Für vollstetige Funktionen gilt, wie bei endlicher Variabelnzahl, der Satz von der Existenz des Maximums (4. S. 200).

5) *Theorie der vollstetigen Formen.* Jede vollstetige quadratische Form läßt sich durch orthogonale Transformation ihrer Veränderlichen auf die Form bringen

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots,$$

wobei

$$\underset{n=\infty}{L} k_n = 0$$

ist; die k_n sind die reziproken Eigenwerte. (4. S. 201, Satz V). Direkter independenter Beweis dieses Satzes (4. S. 201—203).

Analoge Sätze gelten für die simultane Transformation zweier quadratischer Formen, deren eine vollstetig und definit ist, während die andere die Form $v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \dots$ hat — unter v_n die Werte ± 1 verstanden (4. S. 209—215 Satz VIII, VIII*), sowie über die Transformation der Hermiteschen und der schiefsymmetrischen Form auf eine Normalform. (4. S. 216—218. Satz IX).

6) *Vollstetige lineare Gleichungssysteme.* Ist

$$\sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

eine vollstetige Bilinearform, so hat das Gleichungssystem

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
(1+a_{11})\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \cdots &= a_1,\\
a_{21}\,x_1 + (1+a_{22})\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \cdots &= a_2,\\
a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + (1+a_{33})\,x_3 + \cdots &= a_3,\\
\cdots\cdots\cdots

deren Wert für jedes feste Wertsystem der ξ als Funktion von μ von 0 bis $\sum_{(p)} \xi_p^2$ monoton wächst und die die zu ihrer Charakterisierung hinreichenden Relationen

$$\sum_{(r)} \int_{(s)} u(\mu)\, d\sigma_{pr}(\mu) \int_{(s)} u(\mu)\, d\sigma_{rq}(\mu) = \int_{(s)} u(\mu)^2\, d\sigma_{pq}(\mu)$$

$$\int_{(s)} d\sigma(\mu; \xi) = \sum_{(p)} \xi_p^2$$

identisch für alle stetigen Funktionen $u(\mu)$ erfüllt. (**4.** S. 198, Satz III). Die aus dem Streckenspektrum, den Eigenwerten $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots$ d. h. dem „*Punktspektrum*“ (**4.** S. 169) und ihren Häufungsstellen bestehende Punktmenge heißt das *Spektrum* von $K(x)$ (**4.** S. 172); für jedes dem Spektrum nicht angehörige λ haben die aus der Form

$$\sum_{(p)} x_p^2 - \lambda K(x)$$

entspringenden inhomogenen Gleichungen

$$x_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, 2 \ldots)$$

für jedes Wertsystem y_p von konvergenter Quadratsumme eine eindeutig bestimmte Lösung $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme; diese wird mit Hilfe einer beschränkten quadratischen Form

$$\mathsf{K}(\lambda; x) = \sum_{(p,q)} \varkappa_{pq}(\lambda)\, x_p\, x_q = \sum_{p=1,2,\ldots} \frac{x_p'^2}{1-\lambda k_p} + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu; \xi)}{1-\frac{\lambda}{\mu}},$$

der „*Resolvente*“ von $K(x)$, dargestellt durch die Formeln

$$x_p = \sum_{(q)} \varkappa_{pq}(\lambda)\, y_q.$$

Für jedes Wertsystem der x ist $\mathsf{K}(\lambda; x)$ eine analytische Funktion von λ. (**4.** S. 189, Satz II). Die homogenen Gleichungen

$$x_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq} x_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

haben dann und nur dann eine Lösung von konvergenter Quadratsumme, wenn λ ein Eigenwert ist, und so viele unabhängige Lösungen, als dessen Vielfachheit angibt. (**4.** S. 199, Satz IV).

Ein Beispiel einer beschränkten Form mit Streckenspektrum (**4.** S. 204—209).

Die Resolvente gewisser nicht beschränkter Formen (**4.** S. 175, Satz I).

Digitized by Google

B. Theorie der linearen Integralgleichungen.

8) *Der Zusammenhang zwischen unendlichvielen Variabeln und Integralgleichungen* wird vermittelt durch ein vollständiges orthogonales Funktionensystem $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots$ für das Intervall $a \leqq s \leqq b$, d. h. ein System von abzählbar vielen Funktionen, die den Bedingungen genügen

$$\int_a^b \Phi_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases}, \quad (\textit{Orthogonalitätsrelationen})$$

$$\sum_{(p)} \left(\int_a^b u(s)\,\Phi_p(s)\,ds\right)^2 = \int_a^b u(s)^2\,ds, \quad (\textit{Vollständigkeitsrelation});$$

dabei muß die letztere Relation für jede stetige Funktion $u(s)$ gelten. (**5.** S. 443—445). Jeder endlichen und stetigen Funktion $f(s)$ sind inbezug auf dieses System unendlichviele Größen, ihre „*Fourierkoeffizienten*" a_p zugeordnet vermöge der Gleichungen

$$a_p = \int_a^b f(s)\,\Phi_p(s)\,ds \qquad (p = 1, 2, \ldots);$$

jeder endlichen und stetigen Funktion $K(s, t)$ von zwei Variabeln s, t zweifach unendlich viele Größen

$$a_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\,\Phi_p(s)\,\Phi_q(t)\,ds\,dt.$$

Die a_p sind Koeffizienten einer beschränkten Linearform, die a_{pq} Koeffizienten einer beschränkten und sogar vollstetigen Bilinearform (**5.** S. 446). Ist $K(s, t)$ symmetrisch, so sind $a_{pq} = a_{qp} = k_{pq}$ Koeffizienten einer vollstetigen quadratischen Form (**5.** S. 452).

9) *Lineare Integralgleichungen zweiter Art.* Setzt man

$$x_p = \int_a^b \Phi_p(s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

so liefert jede stetige Lösung der unhomogenen bezw. homogenen Integralgleichung mit dem „*Kern*" $K(s, t)$

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

bezw.

$$0 = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

Digitized by Google

eine und nur eine Lösung des inhomogenen bezw. homogenen Gleichungssystemes

$$\left.\begin{aligned} a_p &= x_p + \sum_{(q)} a_{pq} x_q \\ 0 &= x_p + \sum_{(q)} a_{pq} x_q. \end{aligned}\right\} \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

bezw.

Umgekehrt gehört zu jeder Lösung von konvergenter Quadratsumme der lezteren Gleichungen mit unendlichvielen Variabeln eine und nur eine stetige Lösung der obigen Integralgleichungen, nämlich:

$$\varphi(s) = f(s) - \sum_{(p)} x_p \int_a^b K(s,t)\, \Phi_p(t)\, dt;$$

demnach liefern die Sätze von 6) die Fredholmschen Sätze über die Auflösung der unhomogenen und homogenen Integralgleichung. (**5.** S. 445—451).

Ableitung der Lösungsformeln (Fredholmsche Formeln) unabhängig von der Theorie unendlichvieler Variabler durch Grenzübergang vom algebraischen Problem aus. (**1.** S. 57—62; **2.** S. 245).

Sätze über die aus K zusammengesetzten Kerne (**2.** S. 244—247).

Ausdehnung auf unstetige Kerne (**5.**. S. 472; **2.** S. 245).

Zusammenfassung zweier simultaner Integralgleichungen in eine Integralgleichung (**5.** S. 477).

10) *Orthogonale lineare Integralgleichung.* In gleicher Weise liefern die Sätze von 5) die Theorie der Integralgleichung mit stetigem *symmetrischen Kern* $K(s,t) = K(t,s)$ und einem Parameter λ (**5.** S. 452—462).

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Jeder nicht identisch verschwindende Kern $K(s,t)$ hat mindestens einen „*Eigenwert*“ λ, für den die zugehörige homogene Integralgleichung ($f = 0$) eine nicht identisch verschwindende Lösung die zugehörige „*Eigenfunktion*“ besitzt. (**5.** S. 460; zum ersten Male bewiesen **1.** S. 72[1]). Jeder Eigenwert hat endliche Vielfachheit, d. h. es gibt nur endlichviele zugehörige linear unabhängige

1) Dieser Satz von der Existenz eines Eigenwertes für jeden Kern bildet einen integrierenden Bestandteil meiner Theorie und ist, als ich meine Untersuchungen über Integralgleichungen begann, eines meiner frühesten Ergebnisse gewesen; in neueren Arbeiten findet sich — offenbar versehentlich — eine gegenteilige Behauptung ausgesprochen.

Digitized by Google

Eigenfunktionen. Falls der stetige Kern $K(s,t)$ nicht eine Summe von endlichvielen Produkten $\varphi_p(s)\varphi_p(t)$ ist, so gibt es unendlichviele Eigenwerte, die sich nur gegen ∞ häufen (**5.** S. 459; **1.** S. 72). Ist λ kein Eigenwert, so hat die homogene Integralgleichung keine, die unhomogene eine und nur eine Lösung, die sich durch eine, vom Parameter λ analytisch abhängende *„Resolvente"* $\mathsf{K}(s,t;\lambda)$ in der Form

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathsf{K}(s,t;\lambda) f(t)\, dt$$

ausdrückt (**1.** S. 62).

Das zugehörige *„Gaußsche" Variationsproblem*: das Maximum der Werte, die das Doppelintegral

$$J(u) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, u(s)\, u(t)\, ds\, dt,$$

die *„quadratische Integralform"*, für alle der Bedingung

$$\int_a^b (u(s))^2\, ds = 1$$

genügenden stetigen Funktionen u annimmt, ist gleich dem kleinsten positiven Eigenwert, die zugehörige Funktion u ist irgend eine der zum betreffenden Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen; die weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen erhält man, indem man zu diesem Variationsproblem noch successive lineare Nebenbedingungen hinzufügt. (**5.** S. 460; **1.** S. 78—81). Ist stets $J(u) > 0$, so heißt der Kern *definit*. Alle Eigenwerte sind dann positiv. (**1.** S. 79, 81).

Die sämtlichen Eigenfunktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... bilden ein orthogonales Funktionensystem (**5.** S. 454); unter Umständen ist es zugleich ein vollständiges (**5.** S. 461).

Jede durch Vermittelung einer stetigen Funktion g in der Gestalt

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt$$

darstellbare Funktion $f(s)$ läßt sich auf Fouriersche Weise in eine nach den Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ fortschreitende, gleichmäßig und absolut konvergente Reihe

Digitized by Google

$$f(s) = \sum_{(p)} c_p \varphi_p(s) = \sum_{(p)} \varphi_p(s) \int_a^b f(s)\, \varphi_p(s)\, ds$$

$$= \sum_{(p)} \frac{\varphi_p(s)}{\lambda_p} \int_a^b g(s)\, \varphi_p(s)\, ds$$

entwickeln. (**5.** S. 457). Speziellere Entwicklungssätze über „*abgeschlossene*" und „*allgemeine*" Kerne. (**1.** S. 73—78).

Die quadratische Integralform $J(u)$ gestattet für alle stetigen Funktionen $u(s)$ die Entwickelung

$$J(u) = \sum_{(p)} \frac{1}{\lambda_p} \left(\int_a^b u(s)\, \varphi_p(s)\, ds \right)^2;$$

dieselbe konvergiert für alle $u(s)$, für die $\int_a^b u'^2\, ds$ unterhalb einer Schranke bleibt, absolut und gleichmäßig. (**1.** S. 63—70).

Ableitung dieser Theorie unabhängig von der Theorie der Funktionen unendlichvieler Variabeln durch Grenzübergang vom entsprechenden algebraischen Problem aus (**1.** S. 62—78; das algebraische Problem: **1.** S. 52—57). Darstellung der Resolvente $K(s,t;\lambda)$ als Quotient zweier ganzer transcendenter Funktionen von λ, d. h. die *Fredholmschen Formeln* (**1.** S. 57—62). Ergänzung betreffend mehrfache Eigenwerte (**1.** S. 87—91).

Ausdehnung auf unstetige Kerne (**1.** S. 81—87; (**5.** S. 472).

Anwendung der Theorie auf die adjungierten Eigenfunktionen eines unsymmetrischen Kernes (**5.** S. 462).

11) *Polare lineare Integralgleichungen.*

Entwickelung der analogen Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie für die Integralgleichung

$$f(s) = V(s)\, \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt,$$

wo $V(s)$ stückweise $+1$ oder -1 ist und $K(s,t)$ einen symmetrischen positiv-definiten Kern bedeutet (**5.** S. 462—472).

C. Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

12) *Die Greensche Formel.*

Für die allgemeinste sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + qu = 0, \qquad (p > 0)$$

Digitized by Google

lautet die Greensche Formel, wie folgt (2, S. 214):

$$\int_a^b \{vL(u) - uL(v)\}dx = \left[\rho\left\{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right\}\right]_a^b$$

Die *Grundlösung* $\gamma(x,\xi)$ ist inbezug auf x zweimal stetig differenzierbar und genügt für alle von ξ verschiedenen Werte x innerhalb des Intervalles a bis b der Gleichung $L(u) = 0$; für $x = \xi$ ist $\gamma(x,\xi)$ stetig, während ihre erste Ableitung den Abfall -1 aufweist. Sind $u_1(x)$, $u_2(x)$ zwei unabhängige Lösungen von $L(u) = 0$, so stellt sich eine Grundlösung in der Gestalt dar:

$$\gamma(x,\xi) = -\tfrac{1}{2}\frac{|x-\xi|}{x-\xi}\,\frac{u_2(\xi)\,u_1(x) - u_1(\xi)\,u_2(x)}{u_2(\xi)\dfrac{du_1(\xi)}{d\xi} - u_1(\xi)\dfrac{du_2(\xi)}{d\xi}}$$

(2. S. 214—215).

13) *Randbedingungen.*

Es kommen fünf Arten von homogenen Randbedingungen in Betracht (2. S. 216–217):

I. $f(a) = 0,\ f(b) = 0;$

II. $\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)_{x=a} = 0,\ \left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)_{x=b} = 0;$

III. $\left[\dfrac{df(x)}{dx} + hf\right]_{x=a} = 0,\ \left[\dfrac{df(x)}{dx} + kf\right]_{x=b} = 0;$

IV. $f(a) = hf(b)\ \ p(a)\left[\dfrac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = \dfrac{p(b)}{h}\left[\dfrac{df(x)}{ax}\right]_{x=b};$

IV*. $f(a) = hp(b)\left[\dfrac{df(x)}{dx}\right]_{x=b},\ p(a)\left[\dfrac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = -\dfrac{1}{h}f(b);$

V. $f(x)$ soll in der Nähe des Randpunktes $x = a$ sich in der Form $(x-a)^r\,e(x)$ darstellen lassen, wo $e(x)$ eine für $x = a$ endlich bleibende Funktion bedeutet;

V*. $f(x)$ soll bei der Annäherung an den Randpunkt $x = a$ endlich bleiben.

14) *Die Greensche Funktion* $G(x,\xi)$.

Eine Grundlösung $g(x,\xi)$ für das Intervall (a,b), die inbezug auf x und identisch in ξ an den Randpunkten zwei homogene Randbedingungen befriedigt, heißt die zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$; ferner heißt der Quotient $G(x,\xi) = \dfrac{g(x,\xi)}{p(\xi)}$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ (2. S. 217—218).

Digitized by Google

Wenn eine Greensche Funktion nicht existiert, so besitzt die Differentialgleichung $L(u) = 0$ eine nicht identisch verschwindende stetig differenzierbare Lösung $\psi^0(x)$, die die betreffenden Randbedingungen erfüllt. Wir konstruieren dann ein Integral $g(x, \xi)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$L(u) = p(\xi)\psi^0(x)\psi^0(\xi), \quad \int_a^b (\psi^0(x))^2 dx = 1,$$

dessen Ableitung an der Stelle $x = \xi$ den Abfall -1 erfährt, das an den Randpunkten die Randbedingungen erfüllt und die Gleichung

$$\int_a^b g(x, \xi)\psi^0(x)dx = 0$$

befriedigt. Die Funktionen $g(x, \xi)$ und $\frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$ werden als *Greensche Funktionen im erweiterten Sinne* bezeichnet. (**2.** S. 219—220).

Das Symmetriegesetz der Greenschen Funktion $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ (**2.** S. 220).

15) *Die Lösung der Randwertaufgabe.*

Die Integralgleichung erster Art

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

wird durch die Formel

$$\varphi(x) = -L(f(x))$$

gelöst; und umgekehrt gibt die Integralgleichung dasjenige Integral $f(x)$ der Differentialgleichung, das dieselben Randbedingungen wie $G(x, \xi)$ erfüllt (**2.** S. 220—222).

Die lösende Funktion der Integralgleichung

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda\int_a^b G(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

ist gleich der zu denselben Randbedingungen wie G gehörigen Greenschen Funktion des Differentialausdruckes

$$\Delta(u) = L(u) + \lambda u.$$

(**2.** S. 222—224)[1]).

1) Betreffs der Methode der Parametrix vergl. meine Bemerkungen zum Schlusse meiner fünften Mitteilung (**5.** S. 480) und den Bericht über einen von

Digitized by Google

16) *Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie der Differentialgleichung.*

Die Differentialgleichung $A(u) = 0$ besitzt unendlichviele *Eigenwerte*, d. h. es gibt unendlichviele Werte des Parameters λ, für die die Differentialgleichung $L(u) + \lambda u = 0$ eine nicht identisch verschwindende Lösung, die *Eigenfunktion* besitzt, die an den Randpunkten die betr. homogenen Randbedingungen erfüllt (**2**, S. 224—225).

Sind $\psi^{(1)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$, ... die zu irgendwelchen Randbedingungen gehörigen Eigenfunktionen von $A(u) = 0$, so folgt für jede stetige Funktion $h(x)$ aus

$$\int_a^b h(x)\,\psi^{(m)}(x)\,dx = 0, \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

stets, daß $h(x)$ identisch Null ist. (**2.** S. 225).

Jede zweimal stetig differenzierbare und den Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine nach den Eigenfunktionen fortschreitende gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar (**2.** S. 226).

Uebertragung der Resultate auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + (q(x) + \lambda k(x))\,u = 0,$$

wobei $k(x) > 0$ ist. Beispiele. (**2.** S. 226—229).

Fall der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne und der zugehörige Entwicklungssatz. Beispiele. (**2.** S. 230—232).

17) *Allgemeine Differentialgleichungen.*

Mittelst der Theorie der polaren Integralgleichungen werden die sämtlichen Resultate auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + (q(x) + \lambda\,k(x))\,u = 0, \quad (p > 0)$$

ausgedehnt, wobei $k(x)$ eine endliche Anzahl von Malen sein Vorzeichen ändert. Existenz von unendlichvielen Eigenwerten (**5.** S. 473—474).

18) *Systeme von simultanen Differentialgleichungen.*

Aus dem Variationsproblem

---

mir in der mathematischen Gesellschaft zu Göttingen gehaltenen Vortrag, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16 (1907), S. 77—78, sowie die Ausführungen unten in D (**6.** S. 362—363), wo dann die Methode an dem Beispiel der partiellen Differentialgleichung auf der Kugel dargelegt wird.

Digitized by Google

$$\int_a^b Q(u_1', u_2', u_1, u_2)\, dx = \text{Min.},$$

wo

$$Q = p_{11}(x)\, u_1'^2 + 2p_{12}\, u_1' u_2' + p_{22}\, u_2'^2 + 2q_{11}\, u_1' u_1 + 2q_{12}\, u_1' u_2 + 2q_{21}\, u_2' u_1 + 2q_{22}\, u_2' u_2 + r_{11}\, u_1^2 + 2r_{12}\, u_1 u_2 + r_{22}\, u_2^2$$

entspringen die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung (5, S. 474—475):

$$L_1(u_1, u_2) \equiv \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Q}{\partial u_1'}\right) - \frac{\partial Q}{\partial u_1}\right) = 0, \quad L_2(u_1, u_2) \equiv \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Q}{\partial u_2'}\right) - \frac{\partial Q}{\partial u_2}\right) = 0.$$

Die *Greensche Formel* für diese Differentialgleichungen (5. S. 475):

$$\int_a^b (v_1 L_1(u) - u_1 L_1(v) + v_2 L_2(u) - u_2 L_2(v))\, dx = \tfrac{1}{2}\left[v_1 \frac{\partial Q}{\partial u_1'} - u_1 \frac{\partial Q}{\partial v_1'} + v_2 \frac{\partial Q}{\partial u_2'} - u_2 \frac{\partial Q}{\partial v_2'}\right]_a^b.$$

Das *Greensche Funktionensystem* für diese Differentialgleichungen ist ein System von Funktionen:

$$G_{11}(x, \xi),\ G_{12}(x, \xi),$$
$$G_{21}(x, \xi),\ G_{22}(x, \xi),$$

die paarweise die Differentialgleichungen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ sowie die Randbedingungen inbezug auf x befriedigen, und deren Ableitungen für $x = \xi$ einen gegebenen Abfall erfahren. (5. S. 476).

Das *Symmetriegesetz* dieses Funktionenssystems lautet: (5. S. 476)

$$G_{11}(x, \xi) = G_{11}(\xi, x),$$
$$G_{12}(x, \xi) = G_{21}(\xi, x),$$
$$G_{22}(x, \xi) = G_{22}(\xi, x).$$

Die Lösung der *Randwertaufgabe*: diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$L_1(f_1, f_2) = -\varphi_1,\ L_2(f_1, f_2) = -\varphi_2,$$

die bestimmte homogene Randbedingungen erfüllen, werden durch

$$f_1(x) = \int_a^b \{G_{11}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{12}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\}\, d\xi,$$

$$f_2(x) = \int_a^b \{G_{21}(x, \xi)\varphi_1(\xi) + G_{22}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\}\, d\xi$$

dargestellt, und umgekehrt, diese Integralgleichungen erster Art werden durch jene Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ gelöst. (5. S. 477).

Digitized by Google

Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie: diejenigen Funktionenpaare $u_1(x)$, $u_2(x)$, die an den Randpunkten homogene Randbedingungen erfüllen und das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv L_1(u_1, u_2) + \lambda\,(k_{11}(x)\,u_1 + k_{12}(x)\,u_2) = 0, \\ \Delta_2 &\equiv L_2(u_1, u_2) + \lambda\,(k_{21}(x)\,u_1 + k_{22}(x)\,u_2) = 0 \end{aligned}$$

befriedigen, sind Eigenfunktionen der Integralgleichungen:

$$u_1(x) = \lambda\int_a^b \{G_{11}(x,\xi)(k_{11}u_1 + k_{12}u_2) + G_{12}(x,\xi)(k_{21}u_1 + k_{22}u_2)\}\,d\xi,$$

$$u_2(x) = \lambda\int_a^b \{G_{21}(x,\xi)(k_{11}u_1 + k_{12}u_2) + G_{22}(x,\xi)(k_{21}u_1 + k_{22}u_2)\}\,d\xi.$$

(**5.** S. 477—478). Die Existenz unendlichvieler Eigenwerte und Eigenfunktionen; Entwicklungssätze. (**5.** S. 279).

Greensche Funktionen im erweiterten Sinne (**5.** S. 480).

19) *Eine zweiparametrige Randwertaufgabe* (*Kleins Oszillationstheorem*).

Treten in den Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda a + \mu b)\,y = 0,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\pi\frac{d\eta}{d\xi}\right) - (\lambda\alpha + \mu\beta)\,\eta = 0.$$

$(p(x) > 0,\ a(x) > 0,$ für $x_1 \leqq x \leqq x_2)$
$(\pi(\xi) > 0,\ \alpha(\xi) > 0,$ für $\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2)$

die Parameter λ, μ nicht blos in der Verbindung $\lambda + C\mu$ auf ($C =$ const.), so existieren unendlichviele Paare von Werten λ, μ, für welche das Differentialgleichungssystem ein Lösungssystem $y_h(x)$, $\eta_h(\xi)$ besitzt, derart daß $y_h(x)$ an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles x_1, x_2, $\eta_h(\xi)$ an den Enden und nicht überall im Inneren des Intervalles ξ_1, ξ_2 verschwindet; zugehöriger Entwicklungssatz. (**6.** S. 412—417).

D. Anwendung auf partielle Differentialgleichungen.

20) *Die Greensche Formel.*

Für die allgemeinste sich selbst adjungierte Differentialgleichung zweiter Ordnung von elliptischem Typus

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu = 0,\ (p > 0)$$

lautet die Greensche Formel, wie folgt (**2.** S. 234—235):

Digitized by Google

$$\int_{(J)} \{vL(u) - uL(v)\} dJ = \int_{(C)} p\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

wo J ein Gebiet der xy-Ebene mit der Randkurve C ist.

Die *Grundlösung* ist eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ von der Gestalt

$$\gamma(x, y; \xi, \eta) = \gamma_1(x, y; \xi, \eta)\, l\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \gamma_2(x, y; \xi, \eta),$$

wobei γ_1, γ_2 zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind, und außerdem identisch in ξ, η

$$\gamma_1(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1$$

ist (**2.** S. 236).

21) *Randbedingungen.*

Es kommen fünf Arten von Randbedingungen in Betracht (**2,** S. 237):

I. $f(x, y) = 0$ für alle Punkte x, y der Randkurve C;

II. $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ „ „ „ „ „ „ ;

III. $\frac{\partial f}{\partial n} + hf = 0$ „ „ „ „ „ „ ;

IV. $(f(x, y))_s = (f(x, y))_{s+\frac{l}{2}}$, $\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_s = -\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{s+\frac{l}{2}}$ für alle s,

wobei s die Bogenlänge von einem beliebigen Punkte von C, l die Gesamtlänge bedeutet;

V. $f(x, y)$ soll bei der Annäherung an die Randkurve endlich bleiben.

22) *Greensche Funktion.*

Eine Grundlösung $g(x, y; \xi, \eta)$, die als Funktion von x, y identisch in η, ξ an der Randkurve C eine homogene Randbedingung befriedigt, heißt Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$; ferner heißt der Quotient $\frac{g(x, y; \xi, \eta)}{p(\xi, \eta)}$ die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$. (**2,** S. 237). Symmetriegesetz der Greenschen Funktion (**2.** S. 238).

Greensche Funktion im erweiterten Sinne. (**2.** S. 237—238).

23) *Die Lösung der Randwertaufgabe.*

Die Integralgleichung erster Art

$$f(x, y) = \int_{(J)} G(xy, \xi\eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Digitized by Google

wird durch die Funktion

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} L(f(x, y))$$

gelöst; umgekehrt stellt $f(x, y)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung dar, die denselben Randbedingungen genügt wie $G(xy; \xi\eta)$ (**2.** S. 238—239).

Die lösende Funktion der Integralgleichung

$$f(x, y) = \varphi(x, y) - \lambda \int_{(J)} G(xy; \xi\eta)\, \varphi(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$$

ist die zu den nämlichen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\Delta(u) = L(u) + \lambda u = 0.$$

Beweis der Existenz der Greenschen Funktion und der Lösbarkeit der Randwertaufgabe bei den Randbedingungen I und II (**2.** S. 248—255). Existenz der Greenschen Funktion für die Randbedingung III (**2.** S. 256).

Andere Beispiele. Die sich gegenseitig auflösenden Integralgleichungen erster Art:

$$u(\xi) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} v(x) \cot g \left(\pi \frac{x-\xi}{2}\right) dx$$

$$v(\xi) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u(x) \cot g \left(\pi \frac{x+\xi}{2}\right) dx.$$

(**2.** S. 253).

24) *Eigenwert- und Eigenfunktionentheorie der partiellen Differentialgleichung.*

Es gibt abzählbar unendlichviele reelle Werte — die Eigenwerte — des Parameters λ, für die die Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda u = 0$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung — die Eigenfunktion — besitzt und die auf einer geschlossenen Randkurve homogene Randwerte annimmt (**2.** S. 239); jede willkürliche Funktion ist auf die Fouriersche Weise in eine nach diesen Eigenfunktionen fortschreitende gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar. (**2.** S. 240).

Auftreten eines Parameters in der Randbedingung. Es gibt unendlichviele Werte λ, bei denen die vorgelegte Differentialgleichung $L(u) = 0$ eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, die

Digitized by Google

der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$$

genügt; der zugehörige Entwicklungssatz (**2.** S. 255—256).

25) *Allgemeinere partielle Differentialgleichungen.*

Verallgemeinerung auf partielle Differentialgleichungen, die zu Gebieten auf einer beliebigen krummen Fläche (statt zu ebenen Gebieten) gehören (**2.** S. 241—242).

Die Randwertaufgabe für das folgende System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung von elliptischem Typus:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = pu + qv,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = ku + lv.$$

Wenn diese Differentialgleichungen außer $u = 0$, $v = 0$, kein Lösungssystem u, v besitzen derart, daß u auf der gegebenen geschlossenen Randkurve C verschwindet, so besitzen sie ein Lösungssystem u, v derart, daß u auf C die vorgeschriebenen Werte $f(s)$ annimmt; im entgegengesetzten Falle existiert ein solches Lösungssystem dann und nur dann, wenn $f(s)$ gewissen, endlichvielen Integralbedingungen genügt. (**6.** S. 356—362).

Definition des *auf der Vollkugel regulären Differentialausdruckes*; seine Transformation und der adjungierte Differentialausdruck. (**6.** S. 362—366). Die Methode der *Parametrix*. Die Parametrix ist eine symmetrische Funktion des Argumentpunktes s, t und des Parameterpunktes σ, τ auf der Kugel, die in allen 4 Veränderlichen beliebig oft differenzierbar ist, außer wenn Parameterpunkt und Argumentpunkt zusammenfallen, in welchem Falle sie in bestimmter Weise logarithmisch unendlich wird (**6.** S. 367). Konstruktion der Parametrix einer auf der Vollkugel regulären Differentialgleichung und Nachweis ihrer Eigenschaften (**6.** S. 368—370). Wenn die auf der Vollkugel reguläre Differentialgleichung vom elliptischen Typus $L(z) = 0$ keine von Null verschiedene, auf der ganzen Kugel stetige Lösung besitzt, so hat die Differentialgleichung $L(z) = f$, wo f irgend eine gegebene Funktion auf der Kugel bedeutet, stets eine solche Lösung. Verallgemeinerung dieses Satzes für den Fall, daß $L(z) = 0$ solche Lösungen besitzt (**6.** S. 370—376). Konstruktion der Greenschen Funktion, d. h. einer Parametrix, die die vorgelegte Differentialgleichung befriedigt. (**6.** S. 377). Beweis der Existenz der Greenschen Funktion im „erweiterten

Digitized by Google

Sinne". (**6.** S. 378). Es gibt unendlichviele Werte von λ, derart daß $L(z)+\lambda z = 0$ eine auf der Vollkugel stetige Lösung, die zu diesem „Eigenwerte" gehörige „Eigenfunktion", besitzt; jede willkürliche Funktion ist nach diesen Eigenfunktionen auf die Fouriersche Weise entwickelbar. (**6.** S. 379—380). Die sich selbst adjungierte elliptische Differentialgleichung $L(z)+\lambda z = 0$ hat nur eine endliche Anzahl negativer Eigenwerte (**6.** S. 381—382).

Hängen die Koeffizienten in $L(z) = 0$ von einem Parameter μ analytisch ab, so ist der h-te Eigenwert eine stetige Funktion von μ. (**6.** S. 384—388).

Mittelst der Theorie der polaren Integralgleichungen werden die sämtlichen in 23), 24) erwähnten Resultate auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+(q+\lambda k)\,u = 0$$

ausgedehnt, wobei $k(x, y)$ in einer endlichen Anzahl von Teilgebieten verschiedene Vorzeichen besitzt (**5**, S. 474).

E. Anwendung auf die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln.

26) *Allgemeines Riemannsches Problem.*

Formulierung desselben: man soll Funktionen einer komplexen Variablen bestimmen, wenn zwischen den Real- und Imaginärteilen der Funktionen auf einer gegebenen geschlossenen Randkurve C gegebene Relationen gelten sollen. Man bezeichne die Greenschen Funktionen zweiter Art der Potentialgleichung $\Delta(u) = 0$ für das Innere und Äußere der Kurve C bezw. mit $G_j(x, y; \xi, \eta)$ und $G_a(x, y; \xi, \eta)$ und definiere dann zwei *Integralausdrücke*, wie folgt

$$M_j w = \frac{i}{2\pi}\int_{(C)}\frac{\partial G_j(\sigma, s)}{\partial \sigma}\,w(\sigma)\,d\sigma,$$

$$M_a w = \frac{i}{2\pi}\int_{(C)}\frac{\partial G_a(\sigma, s)}{\partial \sigma}\,w(\sigma)\,d\sigma,$$

wobei $w(\sigma)$ irgend einen komplexen Ausdruck auf der Kurve C bedeutet. Die Bedingung dafür, daß ein auf C definierter komplexer Ausdruck $f_j(s)$ die Randwerten einer innerhalb C regulären Funktion darstellt, ist

$$f_j(s) = M_j f_j + \frac{1}{l}\int_{(C)} f_j(\sigma)\,d\sigma,$$

Digitized by Google

wobei l die Gesamtlänge der Kurve C bezeichnet; ein analoger Satz gilt für die Operation $M_a w$ und das Äußere von C. Die Ausdrücke

$$w + M_j w \text{ bezw. } w - M_a w$$

stellen stets Randwerte einer innerhalb bezw. außerhalb C regulären Funktion dar. (3. S. 309—315).

Durch die erlangten Hülfsmittel wird der Satz bewiesen, daß, wenn $c(s)$ ein gegebener stetiger komplexer Ausdruck auf der Kurve C ist und $\bar{c}(s)$ den konjugierten Ausdruck bedeutet, entweder ein Paar von Funktionen $f_j(z)$, $f_a(z)$ existiert, von denen die erstere innerhalb, die zweite außerhalb C regulär analytisch ist und welche auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllen, oder ein Funktionenpaar $g_j(z)$ und $g_a(z)$ von demselben Charakter, deren Randwerte die Relation

$$g_a(s) = \bar{c}(s) g_j(s)$$

erfüllen (3. S. 315—317). Von diesen beiden Fällen tritt der erste bezw. der zweite ein, jenachdem $\log c(s)$ beim Umlauf in positivem Sinne entlang C eine negative bezw. positive Aenderung erfährt (3. S. 318—317).

Es gibt stets ein Paar von Funktionen $f_a^1(z)$, $f_j(z)$, von denen die erste außerhalb C, die zweite innerhalb C den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, während auf C die Relation

$$f_a(s) = c(s) f_j(s)$$

erfüllt ist (3. S. 318).

Untersuchung des Falles, wo $c(s)$ an einer endlichen Anzahl von Stellen eine Unterbrechung der Stetigkeit aufweist (3. S. 319—321).

Aufstellung der Aufgabe: zwei außerhalb C und zwei innerhalb C reguläre analytische Funktionen f_a, f_a' bezw. f_j, f_j' sollen so bestimmt werden, daß sie auf C die Relationen

$$\begin{aligned} f_a(s) &= c_1(s) f_j(s) + c_2(s) f_j'(s) \\ f_a'(s) &= c_1'(s) f_j(s) + c_2'(s) f_j'(s) \end{aligned}$$

erfüllen, wobei c_1, c_2, c_1', c_2' gegebene komplexe zweimal stetig differenzierbare Ausdrücke in s sind, deren Determinante

$$c_1 c_2' - c_2 c_1'$$

für alle s von Null verschieden ausfällt (3. S. 322—324).

Digitized by Google

Es wird bewiesen, daß entweder die genannte Aufgabe eine Lösung besitzt, oder zwei Funktionenpaare g_a, g'_a, g_j, g'_j existieren die auf C die Relationen

$$g_a = \bar{c}_1 g_j + \bar{c}_2 g'_j$$
$$g'_a = \bar{c}'_1 g_j + \bar{c}'_2 g'_j$$

erfüllen, wobei $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}'_1, \bar{c}'_2$ die zu den gegebenen Ausdrücken c_1, c_2, c'_1, c'_2 konjugiert komplexen Ausdrücke bedeuten. (3. S. 325—326).

Die Randwerte der soeben konstruierten Funktionen f_a, f'_a, f_j, f'_j bezw. g_a, g'_a, g_j, g'_j sind auf C stetig differenzierbare Funktionen von s, und die gestellte Aufgabe besitzt nur eine endliche Anzahl linear voneinander unabhängiger Systeme von Lösungen. (3. S. 326—328).

Beweis des Satzes, daß es stets Funktionen f_a, f'_a, f_j, f'_j gibt, die innerhalb bezw. außerhalb C regulär analytisch sind mit etwaiger Ausnahme einer Stelle innerhalb C, die für eine der Funktionen f_j, f'_j oder für beide ein Pol ist, und die auf C die Relationen

$$f_a = c_1 f_j + c_2 f'_j$$
$$f'_a = c'_1 f_j + c'_2 f'_j$$

erfüllen (3. S. 328—330).

27) *Das Riemannsche Gruppenproblem.*

Das speziellere Riemannsche Problem, die Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe zu beweisen, ist äquivalent mit der folgenden Aufgabe: man verbinde die gegebenen singulären Punkte $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots z^{(m)}$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung durch eine reguläre analytische Kurve C; dann sollen zwei Funktionenpaare f_a, f'_a bezw. f_j, f'_j bestimmt werden, die außerhalb bezw. innerhalb C vom Charakter rationaler Funktionen sind derart, daß ihre Randwerte auf C überall stetig sind und auf dem Kurvenstücke zwischen $z^{(h)}$ und $z^{(h+1)}$ ($h = 1, 2 \ldots m$) die Relationen

$$f_a = \gamma_1^{(h)} f_j + \gamma_2^{(h)} f'_j$$
$$f'_a = \gamma_1'^{(h)} f_j + \gamma_2'^{(h)} f'_j$$

erfüllen, wobei $\gamma_1^{(h)}, \gamma_2^{(h)}, \gamma_1'^{(h)}, \gamma_2'^{(h)}$ gegebene Konstante mit nicht verschwindender Determinante sind. (3. S. 330—331).

Diese Aufgabe wird durch Einführung neuer Funktionen auf die in 25) am Schluß gelöste (wo die Substitutionskoeffizienten stetige Funktionen des Ortes sind) zurückgeführt. (3, S. 332—335).

Durchführung des Existenzbeweises (Riemannsches Gruppenproblem) (3. S. 335—337).

28) *Problem aus der Theorie der automorphen Funktionen.*

Digitized by Google

Automorphe Funktionen mit reeller Substitution, die vier gegebene Werte ∞, a, b, c auslassen. Beweis des Satzes: es gibt unendlichviele Werte λ, so daß der Quotient zweier Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left((x-a)(x-b)(x-c)\frac{dy}{dx}\right)+(x+\lambda)y = 0$$

beim Umlauf der Variabeln x um die singulären Stellen a, b, c Substitutionen mit reellen Koeffizienten erfährt. (**6.** S. 407—411).

F. Anwendung auf Variationsrechnung, Geometrie und Hydrodynamik.

29) *Variationsprobleme.*

Zusammenhang zwischen dem *Dirichletschen* Variationsproblem

$$\int_a^b \left[p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - qu^2\right]dx = \text{Min.}$$

bei der Nebenbedingung

$$\int_a^b u^2\,dx = 1$$

und dem *Gaußschen* Variationsproblem (s. oben, 10))

$$\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)\,\omega(x)\,\omega(\xi)\,dx\,d\xi = \text{Max.}$$

bei der Nebenbedingung

$$\int_a^b \omega^2\,dx = 1.$$

(**2.** S. 232—234). Das gleiche Problem für zwei unabhängige Variable. (**2.** S. 256—258).

Das *Dirichletsche Variationsproblem auf der Kugel*: das absolute Minimum des über die Vollkugel erstreckten Integrals

$$D(z) = \int \frac{az_s^2+2bz_s z_t+cz_t^2-nz^2}{\sqrt{eg-f^2}}\,dk$$

bei der Nebenbedingung

$$\int z^2\,dk = 1$$

ist gleich dem kleinsten Eigenwert der Differentialgleichung

Digitized by Google

$$L(z) \equiv \frac{az_{ss} + 2b z_{st} + cz_{tt} + (a_s + b_t) z_s + (b_s + c_t) z_t + nz}{\sqrt{eg - f^2}} + \lambda z = 0.$$

Verallgemeinerung dieses Satzes: (**6.** S. 383).

30) *Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche.*

Das Volumen V eines konvexen Körpers K ist

$$V = \tfrac{1}{6} \int H(H, H)\, dk,$$

wobei $H(\alpha, \beta, \gamma)$ diejenige auf der Kugel definierte homogene Funktion bedeutet, die die Entfernung der Tangentialebene des Körpers vom Nullpunkt mit den Richtungskosinus α, β, γ angibt, und wobei allgemein für zwei beliebige homogene Funktionen $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$

$$(W, V) = \frac{W_{yy} V_{zz} - 2 W_{yz} V_{yz} + W_{zz} V_{yy}}{x^2}$$
$$= \frac{W_{zz} V_{xx} - 2 W_{zx} V_{zx} + W_{xx} V_{zz}}{y^2}$$
$$= \frac{W_{xx} V_{yy} - 2 W_{xy} V_{xy} + W_{yy} V_{xx}}{z^2}$$

gesetzt ist. (**6.** S. 388—391). Das gemischte Volumen dreier konvexer Körper

$$V_{122} = \tfrac{1}{6} \int H_1 (H_2, H_3)\, dk$$

und ihre Symmetrieeigenschaften. (**6.** S. 399).

Ist H eine gegebene homogene Funktion, so stellt

$$L(\Omega) = (W, H), \quad W(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \Omega(x, y, z)$$

einen für Ω linearen Differentialausdruck auf der Kugel dar, der sich selbst adjungiert und vom elliptischen Typus ist. (**6**, S. 392—394).

Beweis der Sätze: Jede auf der Vollkugel stetige Lösung von $L(\Omega) = 0$ ist eine lineare Kombination der drei Lösungen

$$\Omega = x, \quad \Omega = y, \quad \Omega = z.$$

(**6.** S. 395—398). Die partielle Differentialgleichung

$$L(\Omega) + \lambda \frac{(H, H)}{\mathsf{H}} \Omega = 0, \quad (H = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \mathsf{H})$$

besitzt $\lambda = -1$ als einfachen, $\lambda = 0$ als dreifachen Eigenwert, und die zugehörigen Eigenfunktionen sind H, bezw. x, y, z; die übrigen Eigenwerte sind positiv. (**6.** 399—402).

Beweis der Minkowskischen Ungleichung

Digitized by Google

$$V(H, H, G)^2 \geqq V(H, H, H)\, V(H, G, G),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann statt hat, wenn der eine Körper aus dem anderen durch Parallelverschiebung und Aehnlichkeitstransformation hervorgeht. (6. S. 403—411).
Die Ungleichungen:

$$O^3 \geqq 3VM, \quad M^2 \geqq 4\pi O, \quad O^3 \geqq 36\pi V^2,$$

wobei O die Oberfläche, V das Volumen und

$$M = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) d\omega$$

die mittlere Krümmung eines konvexen Körpers bedeutet, und das Gleichheitszeichen nur statthat, wenn der konvexe Körper die Kugel ist. (6, S. 406).

31) *Ein Problem der Hydrodynamik.*

Anwendung des Entwicklungssatzes in 23) (Parameter λ in der Randbedingung) auf das Problem der kleinen Schwingungen einer der Schwere unterworfenen Flüssigkeit. (2. S. 258—259).

Digitized by Google

Ueber die Konstruktion der Klassenkörper reeller quadratischer Körper mit Hilfe von automorphen Funktionen.

Von

E. Hecke in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 10. Dezember 1910 von D. Hilbert.

§ 1.

In meiner Dissertation[1]) habe ich begonnen, die Theorie derjenigen von D. Hilbert aufgestellten Funktionen zu entwickeln, welche geeignet erscheinen, in gewissen höheren Zahlkörpern die Rolle zu übernehmen, welche im imaginären quadratischen Körper der elliptischen Modulfunktion zukommt. Ich hatte bei Inangriffnahme dieses Problems gehofft, gleichzeitig hierdurch einen Zugang zu den analogen Fragen im reellen quadratischen Körper zu gewinnen, allein im Laufe der Untersuchung stellte sich heraus, daß die Funktionen gerade für die hier in Betracht kommenden Argumente versagen, insofern sie hier entweder unbestimmt werden oder sich bereits durch die elliptische Modulfunktion rational ausdrücken lassen. Inzwischen hat sich mir aber bei weiterer Beschäftigung mit diesen Fragen gezeigt, welche Bedeutung dieser Umstand hat und wie man trotzdem hier zum Ziele gelangen kann. Hier will ich die Resultate meiner Untersuchungen auseinandersetzen, eine ausführliche Darstellung werde ich in einer Arbeit in den Mathematischen Annalen geben.

Die Frage, die ich mir gestellt habe, ist, um es zu präzisieren,

---

1) Zur Theorie der Modulfunktionen von zwei Variabeln und ihrer Anwendung auf die Zahlentheorie. Göttingen 1910.

Digitized by Google

die folgende: Es sind Funktionen zu finden, welche für bestimmte algebraische Argumentwerte den Klassenkörper eines gegebenen reellen quadratischen Körpers liefern. Wenn ich auch die vollständige Lösung des Problems noch nicht besitze, so habe ich mir doch die funktionentheoretischen Grundlagen geschaffen, auf denen sie sich aufbauen kann. Die beiden Gedanken, mit deren Hilfe ich hier den Fortschritt erzielt habe, sind *die Adjunktion von i zu dem reellen quadratischen Körper $k(\sqrt{D})$ und die Modifikation des Aequivalenzbegriffes.*

Es scheint, daß die Größe i auch in der Zahlentheorie, wenigstens in diesen Fragen, eine ähnliche fundamentale Bedeutung hat wie in der Funktionentheorie. Auch hier muß man, um zur völligen Beherrschung der Theorie reeller Körper zu gelangen, ins komplexe Gebiet übergeben. Bisher sind allerdings nur sehr selten Beziehungen zwischen den Körpern $k(\sqrt{D})$ und $k(i, \sqrt{D})$ gefunden worden. Ich nenne den Dirichletschen Satz, daß die Klassenzahl des Körpers $k(i, \sqrt{D})$ (abgesehen von dem Faktor 2) gleich dem Produkt der Klassenzahlen der beiden Körper $k(\sqrt{D})$ und $k(\sqrt{-D})$ ist, sowie einen Satz von Herrn Fueter[1]) über eine notwendige Bedingung, daß die Norm der Grundeinheit in $k(\sqrt{D})$ gleich -1 sei. Es ist bekannt, wie hoch Dirichlet den Satz über die Klassenzahl geschätzt hat. Der Satz gewinnt hier an Bedeutung, wenn man ihn in moderne Sprechweise umsetzt, wo er dann besagt: Die unverzweigten relativ Abelschen Körper (von ungradem Relativgrade) inbezug auf $k(i, \sqrt{D})$ erhält man einfach durch Zusammensetzung der analogen Körper für $k(\sqrt{D})$ und $k\sqrt{-D})$. Die Lösung unsres Problems wird nun in der Weise erfolgen, daß man zuerst mittels automorpher Funktionen den Klassenkörper von $k(i, \sqrt{D})$ findet, daraus läßt sich dann der Klassenkörper für $k(\sqrt{D})$ einfach ableiten.

Nun sind die Funktionen, welche hierzu geeignet erscheinen, zwar nicht unmittelbar die Hilbertschen Modulfunktionen selbst, sie stehen aber mit diesen in algebraischem Zusammenhang. Hier kommt nun der zweite Punkt, die Modifikation des Aequivalenzbegriffes in Betracht. Legt man den absoluten Rationalitätsbereich zu Grunde, so ist als Basis eines Ideals $\mathfrak{A}$ in einem Körper n-ten Grades ein System von n ganzen Zahlen $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ de

1) Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Zahlentheorie. Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. XVII. p. 43.

Digitized by Google

finiert, von der Art, daß man alle durch $\mathfrak{A}$ teilbaren Zahlen des Körpers und nur diese in der Form

$$x_1\Omega_1 + x_2\Omega_2 + \cdots + x_n\Omega_n$$

erhält, wenn man $x_1 \ldots x_n$ alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen läßt. Als Erweiterung dieses Begriffes in einem andern Grundbereich bietet sich zunächst diejenige Definition der „*Relativbasis*" dar, welche ich in meiner Dissertation näher ausgeführt und benutzt habe: Ist jetzt n der Relativgrad, so lasse man $x_1 \ldots x_n$ alle ganzen Zahlen des Grundbereiches durchlaufen. Damit aber reicht man nun nicht aus; vielmehr muß man hier auch zulassen, daß $x_1 \ldots x_n$ *nur die Zahlen gewisser Ideale des Grundkörpers durchlaufen.* Ist $n = 2$, so hat das für die Gruppe, welche man in der Funktionentheorie zu Grunde zu legen hat, die Konsequenz: Man muß auch solche Funktionen betrachten[1]), welche nur ungeändert bleiben bei einer Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$.

$$f\left(\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}, \frac{\alpha'\xi'+\beta'}{\gamma'\xi'+\delta'}\right) = f(\xi, \xi'), \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

deren Koeffizienten gewissen Kongruenzen mod. $\mathfrak{a}$ unterworfen sind, wobei $\mathfrak{a}$ kein Hauptideal ist. Also etwa $\beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$. Diese Gruppe erhält man nicht direkt aus der Transformationstheorie, wie es bei der elliptischen Modulfunktion der Fall ist, sie läßt sich allerdings als größter gemeinsamer Teil zweier Gruppen erklären, zu welchen man durch Transformation gelangt.

§ 2.

Die Kroneckersche Grenzformel für höhere Zahlkörper.

Daß die Hilbertschen Modulfunktionen mit der eben gegebenen Modifikation für unsere Fragestellung eine Bedeutung haben, wird nun durch folgenden Umstand bestätigt. Die Zahlentheorie vermag nämlich durch ein ganz bestimmtes Prinzip ähnliche Funktionen aus sich heraus zu konstruieren. Sowie die Kroneckersche Grenzformel direkt auf die η-Funktion aus der Theorie der elliptischen Funktionen führt, und ebenso die analoge Formel für den Kongruenzstrahl im absoluten Rationalitätsbereich auf die Einheitswurzeln führt, so kann man auch die vorhin definierten Funk-

1) Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie in meiner Dissertation. Akzente bedeuten konjugierte Zahlen (außer bei den Variabeln).

Digitized by Google

tionen von dieser Seite her erhalten. Wenn man das Analogon für die Kroneckersche Grenzformel im reellen quadratischen Körper aufzustellen sucht, so stößt man allerdings gleich auf erhebliche Schwierigkeiten, welche durch die Existenz von Einheiten entstehen. Es ist mir nicht gelungen, durch geeignete Einführung neuer Transcendenten eine brauchbare Formel zu erhalten.

Dagegen kommt man ohne besondere Schwierigkeit zum Ziele, wenn man sich nicht auf den reellen Körper beschränkt, sondern in einen dazu relativ-quadratischen total imaginären Körper übergeht. Ich teile hier die sich so ergebende allgemeinere Kroneckersche Grenzformel mit. Sie bezieht sich auf einen reellen quadratischen Körper, von dem ich voraussetze, daß die Norm der Grundeinheit $\varepsilon\,(>0)$ gleich -1 ist:

Es bedeute x_1, x_1', x_2, x_2' komplexe Variable, von denen x_1 mit x_2 und x_1' mit x_2' konjugiert imaginär sind. x_1 und x_1' sollen positiv imaginären Teil haben. Er durchlaufe α sämtliche ganzen Zahlen des $k(\sqrt{D})$, welche durch ein gegebenes Ideal $\mathfrak{a}$ teilbar sind, β durchlaufe das System total positiver durch ein Ideal $\mathfrak{b}$ teilbarer ganzer Zahlen, dabei aber von den Zahlen $\varepsilon^n\beta$ immer nur eine. Dann gilt folgende Grenzformel

$$\lim_{s=1}\left(\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{(\alpha+\beta x_1)^s(\alpha+\beta x_2)^s(\alpha'+\beta' x_1')^s(\alpha'+\beta' x_2')^s}-\frac{M}{(s-1)(x_1-x_2)(x_1'-x_2')}\right)=$$

$$A+\frac{B+C\log\left((x_1-x_2)(x_1'-x_2')\right)}{(x_1-x_2)(x_1'-x_2')}$$

$$+\frac{16\pi^2}{\Delta(x_1-x_2)(x_1'-x_2')}\left[F(x_1,x_1')+F(-x_2,-x_2')+F(\varepsilon x_1,\varepsilon' x_2')+F(-\varepsilon x_2,-\varepsilon' x_1')\right]$$

Die Größen M, A, B, C sind Konstante, die nicht von den Variabeln x abhängen; Δ ist gleich $|N(\mathfrak{a})\sqrt{D}|$; die Funktion F ist eine für alle in Betracht kommenden Werte der Variabeln reguläre Funktion und $\varphi = e^F$ hat dann folgende Invarianzeigenschaft:

$$\varphi\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ \frac{\alpha' x'+\beta'}{\gamma' x'+\delta'}\right)=(\gamma x+\delta)^p(\gamma' x'+\delta')^p\,\varphi(x,x'),$$

wenn $\alpha\delta-\beta\gamma$ eine total positive Einheit ist und die Kongruenzen

$$\beta\equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$$
$$\gamma\equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}}$$

erfüllt sind.

Digitized by Google

Für F gilt die folgende Fourierentwickelung:

$$F(\varepsilon x, \varepsilon' x') = \sum_{\beta, \mu} \frac{1}{\beta\beta'} e^{2\pi i \frac{\beta\mu' x - \beta'\mu x'}{\Delta}}$$

β durchläuft dieselben Zahlen wie oben, μ dagegen durchläuft alle total positiven durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Zahlen von $k(\sqrt{D})$.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MINNESOTA
3 1951 D00 018 997 4

Minnesota Library Access Center
9 ZA R02 D27 S09 TI C

Digitized by Google